

## Bibliografia

- [1] BATHE, K.-J.. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, INC, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [2] BLEVINS, R. D.. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993.
- [3] G. F. CAREY, J. T. O.; BECKER, E. B.. **Finite Elements: An Introduction**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [4] CAREY, G. F.; ODEN, J. T.. **Finite Elements: A Second Course**. Prentice Hall, INC, New Jersey, 1983.
- [5] DESAI, C. S.. **Elmentary Finite Elemento Method**. Prentice Hall, INC, New Jersey, 1979.
- [6] GUO-PING CAI, J.-Z. H.; YANG, S. X.. **Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass**. Mechanics Research Communications 32, p. pgs 173 to 190, 2005.
- [7] HUGHES, T. J. R.. **The Finite Element Method: Linear Satic and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [8] INMAN, D. J.. **Engineering Vibration**. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [9] HE, J.. **Modal Analysis**. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2001.
- [10] F. MA, C. N.. **The orthogonality of natural modes of vibration**. Mechanics Research Communications 31, p. pgs 295 to 299, 2004.
- [11] MITCHELL, A. R.. **The finite element method in partial differential equations**. John Wiley and Sons, Ltd, USA, 1977.
- [12] PAZ, M.. **Structural Dynamics**. International Thomson Publishing, USA, 1997.

- [13] RAO, S. S.. **Mechanical Vibrations**. Pearson Education, Inc, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.
- [14] REDDY, J. N.. **An Introduction to the Finite Element Method**. McGraw-Hill, Inc, 1993.
- [15] STRANG, G.. **An analysis of Finite Elements Method**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [16] J.B. YANG, L. J.; CHEN, D.. **Dynamic modelling and control of a rotating euler-bernoulli beam**. Journal of sound and vibration 274, p. pgs 863 to 875, 2004.
- [17] ZIENKIEWICZ, O. C.. **The Finite Element Method**. McGraw-Hill, Inc.

## A

# MANUAL DE PROGRAMAS DO MATLAB

Este manual tem por objetivo explicar, detalhadamente, os programas referentes a simulações numéricas de sistemas contínuos, discretizados por Elementos Finitos com o auxílio do *software* MATLAB.

As variáveis seguem um padrão de nomenclatura definido por:

$R_{Mat\_M} \Rightarrow$  matriz  $M$ ;

$R\_x \Rightarrow$  vetor  $x$ ;

$E \Rightarrow$  escalar  $E$ ;

Todos os programas utilizam uma ferramenta numérica chamada Calfem, que consiste num conjunto de funções já definidas para calcular a dinâmica de sistemas pelo Método de Elementos Finitos. As funções do Calfem possuem uma nomenclatura própria, então é necessário colocar todos os parâmetros do programa de forma que sejam reconhecidos e aceitos pelas funções que serão utilizadas futuramente.

Os programas apresentam a seguinte estrutura:

### 1. Objetivo:

Calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema.

### 2. Dados de Entrada:

- Variáveis Geométricas ( $L, h, b, A, I$ );
- Propriedades do Material ( $E, \rho$ );
- Número de modos a serem calculados ( $N$ );
- Precisão desejada ( $e$ );
- Número de elementos iniciais ( $N E_{ini}$ );
- Definição do tipo de elemento;

### 3. Desenvolvimento

Essa etapa consiste na definição de diversas variáveis, seguindo a nomenclatura exigida pelos programas do Calfem que serão utilizados.

Uma vez definido o número de elementos em que o sistema será discretizado e o tipo de elemento, sabe-se o número de nós existentes.

- **Topologia**  $\Rightarrow$  informa quais graus de liberdade estão associados a cada elemento. As barras apresentam apenas deslocamento longitudinal, por isso, um grau de liberdade por nó é suficiente para representar esse sistema; enquanto as vigas, que apresentam deslocamento vertical e rotação, necessitam de 2 graus de liberdade por nó. Caso seja escolhido, por exemplo, o elemento linear (de dois nós), cada elemento de barra possui dois graus de liberdade (um por nó); enquanto os elementos de viga, terão quatro graus de liberdade (dois por nó).

$Edof = [Edof\ 1\ Edof\ 2]$   $\therefore$  tal que  $Edof\ 1$  representa os elementos do sistema e  $Edof\ 2$  os graus de liberdade a eles associados.

- **Lista de coordenadas**  $\Rightarrow$  apresenta as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nó

$Coord = [X\ Y]$

no caso de sistemas tridimensionais, a variável  $Coord$  apresenta três coordenadas  $[X\ Y\ Z]$ .

- **Graus de liberdade por nó**  $\Rightarrow$  informa os graus de liberdade (GL) que estão associados a cada nó do sistema.

$Dof = [GL]$

- **Montagem de matrizes de massa e rigidez para cada elemento**

Utiliza-se um programa do Calfem que monta as matrizes de massa e de rigidez elementares (calfem bar2d, para barras; e calfem

beam2d, para vigas)

– **Montagem das matrizes globais do sistema**

O programa "calfem assem" reúne todas as matrizes elementares, formando as matrizes globais do sistema.

– **Graus de liberdade restritos**

Uma vez que as matrizes globais do sistema estiverem montadas, deve-se eliminar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restritos.

– **Problema de auto-valor**

Existe um programa do Calfem que fornece as frequências naturais e os modos de vibração do sistema (calfem eigen).

#### 4. Resultados

Através das simulações, descobre-se o número de elementos finitos necessários para aproximar as frequências naturais, os modos de vibração e a dinâmica do sistema dentro de uma precisão inicialmente estabelecida. Os resultados adquiridos são: as cinco primeiras frequências naturais aproximadas junto com os respectivos gráficos dos cinco primeiros modos de vibração. Além disso, os programas geram o gráfico da dinâmica do sistema no ponto de observação  $x = x_0$ .

Os sistemas contínuos estudados correspondem a barras e vigas. Existem diversas diferenças entre eles, por isso os programas serão explicados separadamente.

## A.1

### Simulações de problemas de barras

Foram desenvolvidos diversos programas para calcular frequências naturais, modos de vibração e dinâmica de barras, envolvendo diferentes condições de contorno, barras com área variável e com variação de material:

**barra fixa livre** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pela solução analítica;

**barra fixa livre ef2** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pelo MEF (elementos de dois nós);

**barra fixa livre ef3** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pelo MEF (elementos de 3 nós);

**barra fixa fixa** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-fixa, pela solução analítica;

**barra fixa fixa ef** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-fixa, pelo MEF;

**barra fixa livre 2areas** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com área variável, pelo MEF;

**barra fixa livre 2mat** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com dois materiais diferentes, pelo MEF;

**barra fixa massa ef** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com massa concentrada na extremidade livre, pelo MEF;

**barra fixa mola ef** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com mola horizontal na extremidade livre, pelo MEF;

**barra livre livre** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra livre-livre, pela solução analítica;

**barra livre livre ef** Calcula frequências naturais e modos de vibração de uma barra livre-livre, pelo MEF;

### A.1.1

#### Simulação de um problema de barra fixa-livre (aprox. linear)

A seguir, será apresentado todo o programa em MATLAB de um problema de barra fixa-livre, com o objetivo de mostrar os parâmetros da simulação, apresentando os graus de liberdade do sistema, as coordenadas dos nós, as matrizes elementares e globais etc.

Inicialmente, definiu-se todos os parâmetros geométricos (comprimento ( $L$ ), altura ( $h$ ) e espessura ( $b$ ) da barra, área da seção reta ( $A$ )) e as propriedades do material (módulo de elasticidade ( $E$ ) e densidade ( $\rho$ )). Deseja-se calcular os cinco primeiros modos de vibração do sistema ( $N = 5$ ), para uma barra dividida em 10 elementos ( $NE = 10$ ) e cada elemento é linear, de dois nós.

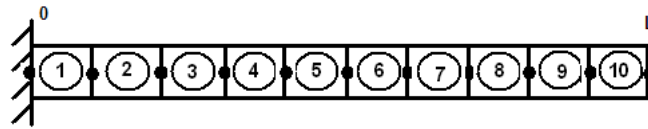


Figura A.1: Barra fixa-livre discretizada em 10 elementos

A barra foi então discretizada em 10 elementos e, como cada um deles tem dois nós, o sistema contém um total de 11 nós.

- **Topologia**  $\Rightarrow$  mostra os graus de liberdade associados a cada elemento:

<i>Elemento</i>	$GL_1$	$GL_2$
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	10	11

Tabela A.1: Graus de liberdade associados a cada elemento de barra (*Edof*)

- **Lista de coordenadas**  $\Rightarrow$  apresenta as coordenadas X e Y de cada nó:

X	Y
0.0	0.0
0.1	0.0
0.2	0.0
0.3	0.0
0.4	0.0
0.5	0.0
0.6	0.0
0.7	0.0
0.8	0.0
0.9	0.0
1.0	0.0

Tabela A.2: Coordenadas de cada nó de um problema de barra (*Coord*)

- **Lista de graus de liberdade por nó**  $\Rightarrow$  cada nó apresenta apenas um grau de liberdade, correspondente ao movimento longitudinal da barra:

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Tabela A.3: Graus de liberdade associados a cada nó (*Dof*)

- **Construção das matrizes de massa e de rigidez elementares**  $\Rightarrow$  cada elemento terá uma matriz de massa e uma matriz de rigidez, de dimensão  $2 \times 2$ , relacionando os deslocamentos  $X_i$  e  $X_{i+1}$  de cada elemento:



$$RMat\_M^e = \begin{pmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e \end{pmatrix} \quad RMat\_K^e = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{pmatrix}$$

- **Montagem das matrizes globais do sistema**  $\implies$  essas matrizes são montadas respeitando os deslocamentos que caracterizam cada elemento e, nesse caso, elas têm dimensão 11 X 11 (referenciando cada grau de liberdade):

$$RMat\_M^G = \begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 + M_{11}^3 & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Graus de liberdade restritos**  $\implies$  como a barra está fixa em  $x = 0$ , deve-se eliminar a primeira linha e primeira coluna (a restrição é no primeiro grau de liberdade) das matrizes de massa e de rigidez globais; e então elas passam a ter dimensão 10 X 10 e são chamadas de  $RMat\_K$  e  $RMat\_M$ :

$$RMat\_M = \begin{pmatrix} M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & \cdots & 0 \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 + M_{11}^3 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Problema de auto-valor**  $\implies$  com o problema discretizado, pode-se calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema:

#### Frequências Naturais:

$$0.7937 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$2.4007 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$4.0668 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$5.8320 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$7.7330 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

#### Modos de Vibração (6 primeiros modos)

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

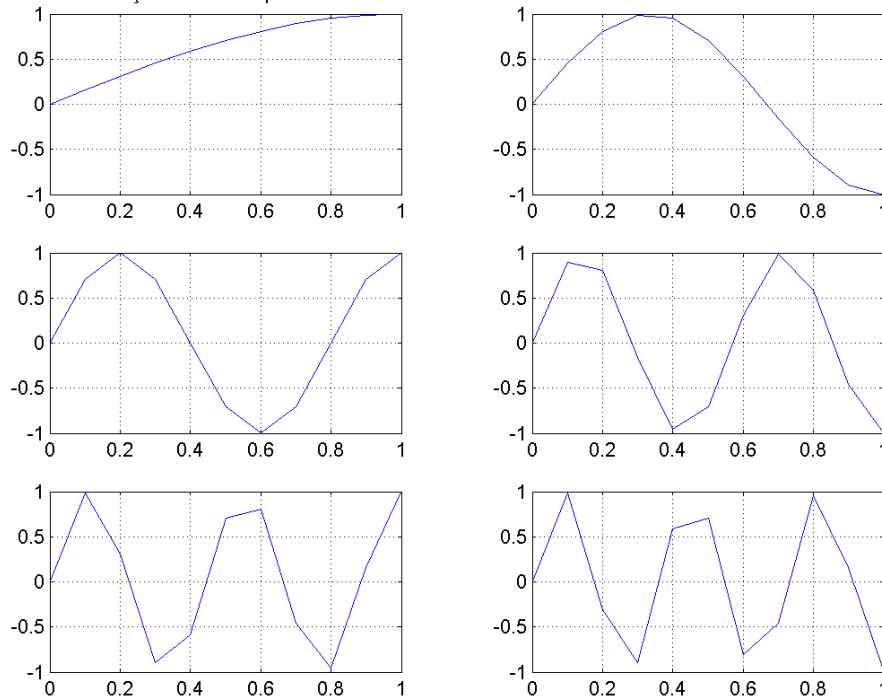


Figura A.2: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (10 elem)

A simulação com a barra fixa-livre foi repetida, porém dividiu-se o sistema em 30 elementos e os resultados encontrados foram:

**Frequências Naturais:**0.7930 · 10<sup>4</sup> Hz2.3810 · 10<sup>4</sup> Hz3.9757 · 10<sup>4</sup> Hz5.5812 · 10<sup>4</sup> Hz7.2020 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

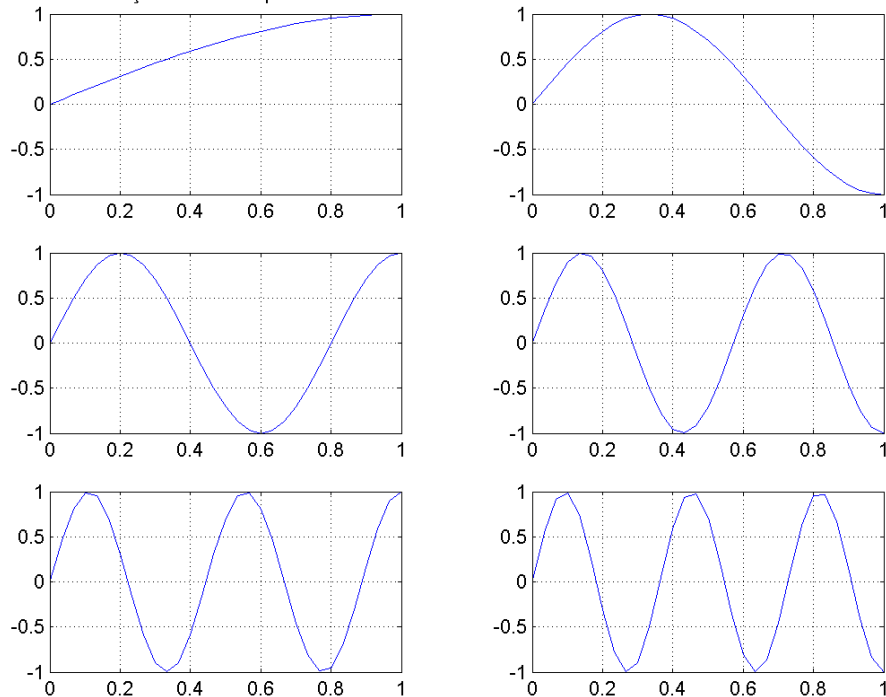


Figura A.3: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. linear)

Como era de se esperar, a simulação feita com 30 elementos apresenta resultados mais precisos, o que pode ser observado pelos valores das frequências naturais (que, no caso da malha mais refinada, estão mais próximos da solução analítica (exemplo A.1.2)) e pelo formato dos modos de vibração, especialmente para o quarto e quinto modo [8].

## A.1.2

## Simulação de um problema de barra fixa-livre (sol. analítica)

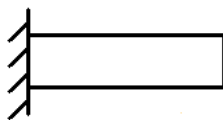


Figura A.4: Barra fixa-livre

**Frequências Naturais:**  $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{L}, n = 0, 1, 2, \dots$

0.7929 · 10<sup>4</sup> Hz

2.3786 · 10<sup>4</sup> Hz

3.9643 · 10<sup>4</sup> Hz

5.5501 · 10<sup>4</sup> Hz

7.1358 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra fixa-livre

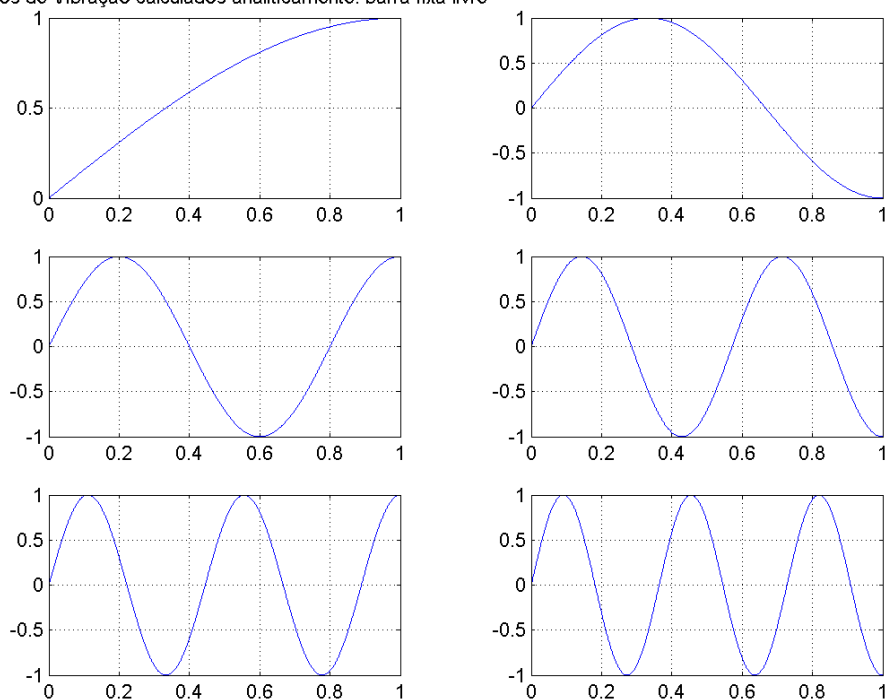


Figura A.5: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (solução analítica)

### A.1.3

#### Simulação de um problema de barra fixa-livre (aprox. quadrática)

##### Frequências Naturais:

0.7929 · 10<sup>4</sup> Hz

2.3786 · 10<sup>4</sup> Hz

3.9643 · 10<sup>4</sup> Hz

5.5501 · 10<sup>4</sup> Hz

7.1360 · 10<sup>4</sup> Hz

##### Modos de Vibração

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

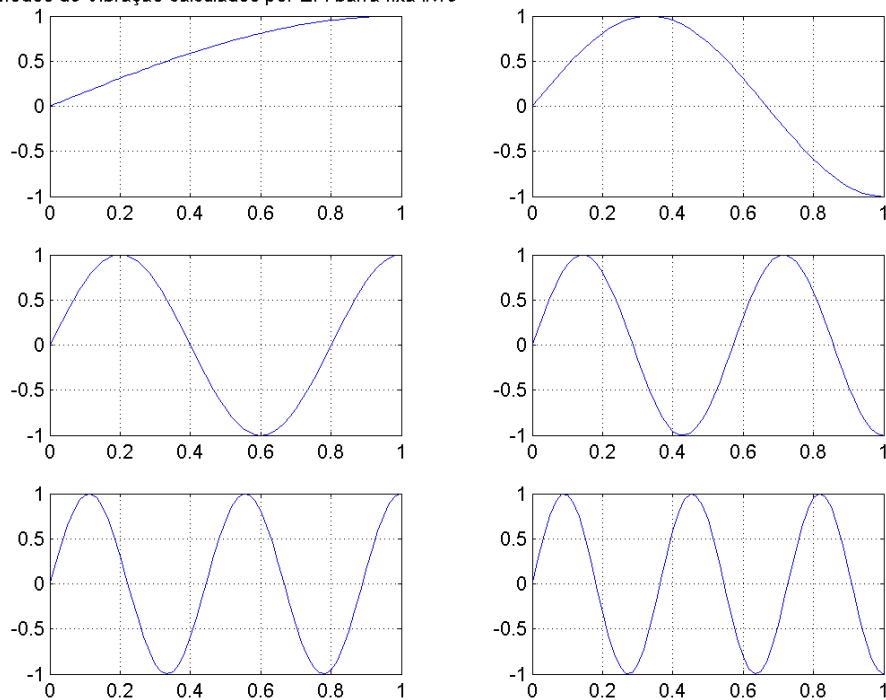


Figura A.6: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. quadrática)

Pode-se comparar os resultados das aproximações de frequências e modos de elementos de dois nós (A.1.1) e elementos de três nós (A.1.3) com a solução analítica do problema de uma barra fixa-livre (A.1.2). Pode-se perceber facilmente que a aproximação quadrática é mais eficiente do que a aproximação linear.

### A.1.4

#### Simulação de um problema de barra fixa-fixa (sol. analítica)

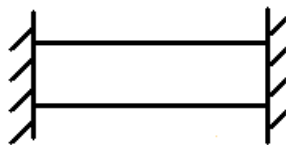


Figura A.7: Barra fixa-fixa

**Frequências Naturais:**  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n = 1, 2, \dots$

1.5857 · 10<sup>4</sup> Hz

3.1715 · 10<sup>4</sup> Hz

4.7572 · 10<sup>4</sup> Hz

6.3429 · 10<sup>4</sup> Hz

7.9287 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\sin \frac{n\pi x}{L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra fixa-fixa

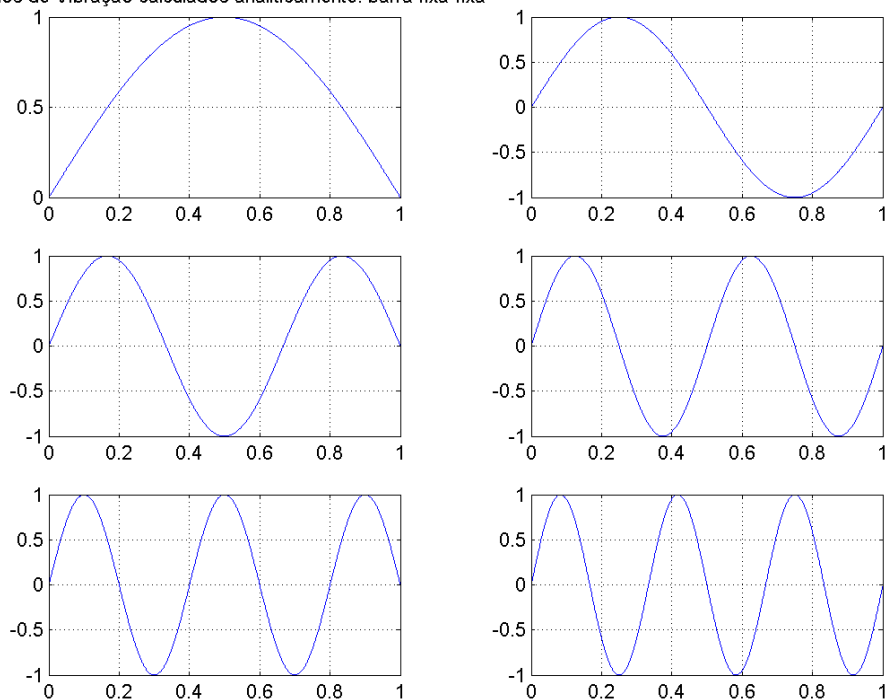


Figura A.8: Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (solução analítica)

**A.1.5****Simulação de um problema de barra fixa-fixa (aprox. linear)****Frequências Naturais:**1.5865 · 10<sup>4</sup> Hz3.1773 · 10<sup>4</sup> Hz4.7768 · 10<sup>4</sup> Hz6.3894 · 10<sup>4</sup> Hz8.0195 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-fixa

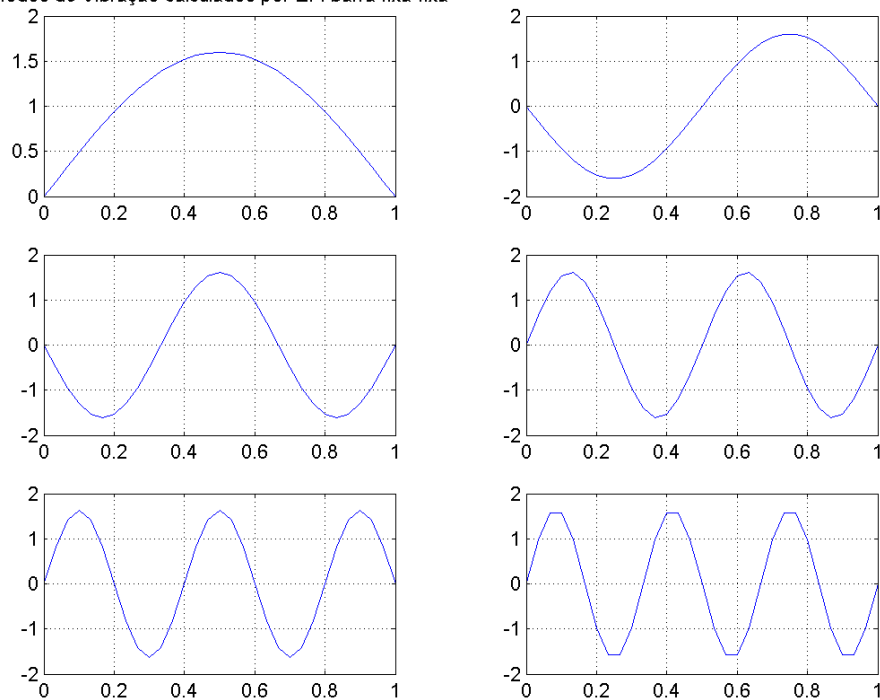


Figura A.9: Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (30 elem - aprox. linear)

**A.1.6**

**Simulação de um problema de barra fixa-livre com duas áreas (aprox. linear)**

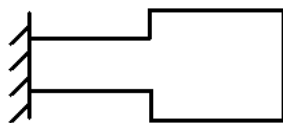


Figura A.10: Barra fixa-livre com duas áreas

**Frequências Naturais:**

0.4681 · 10<sup>4</sup> Hz

2.7070 · 10<sup>4</sup> Hz

3.6483 · 10<sup>4</sup> Hz

5.9118 · 10<sup>4</sup> Hz

6.8685 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre de area variavel

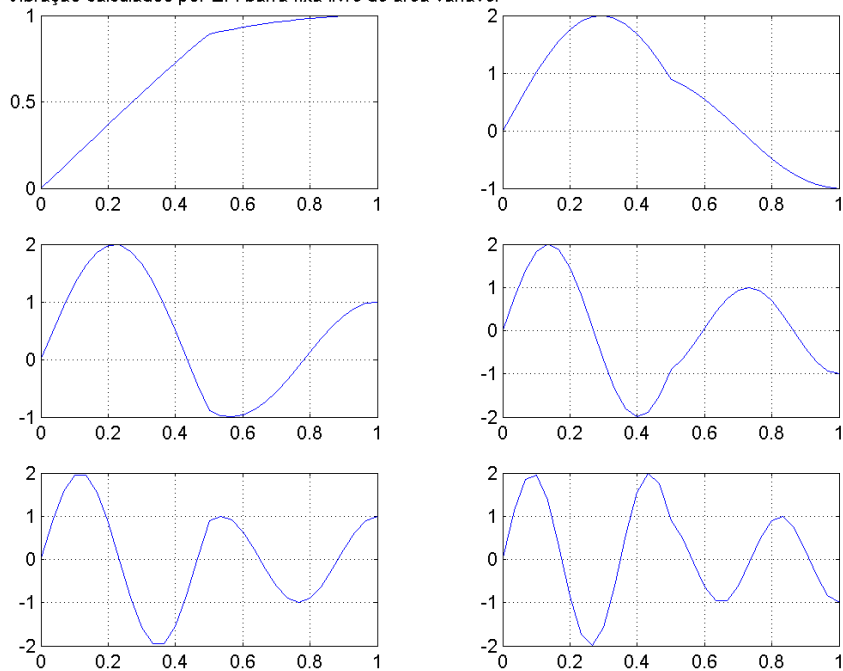


Figura A.11: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com duas áreas (30 elem)



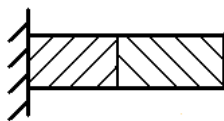
**A.1.7****Simulação de um problema de barra fixa-livre com dois materiais (aprox. linear)**

Figura A.12: Barra fixa-livre com dois materiais

**Frequências Naturais:**1.0552 · 10<sup>4</sup> Hz2.1434 · 10<sup>4</sup> Hz4.2647 · 10<sup>4</sup> Hz5.3663 · 10<sup>4</sup> Hz7.5203 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

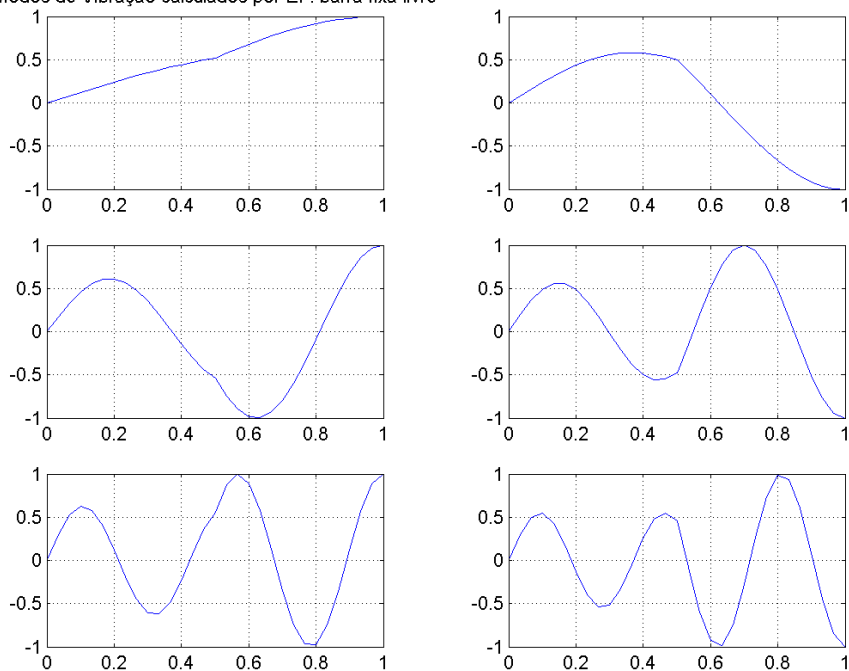


Figura A.13: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com dois materiais (30 elem)

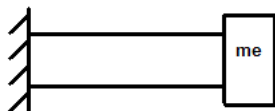
**A.1.8****Simulação de um problema de barra fixa-massa (aprox. linear)**

Figura A.14: Barra fixa-massa

**Frequências Naturais:**0.5060 · 10<sup>4</sup> Hz1.7964 · 10<sup>4</sup> Hz3.2968 · 10<sup>4</sup> Hz4.8591 · 10<sup>4</sup> Hz6.4520 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-massa

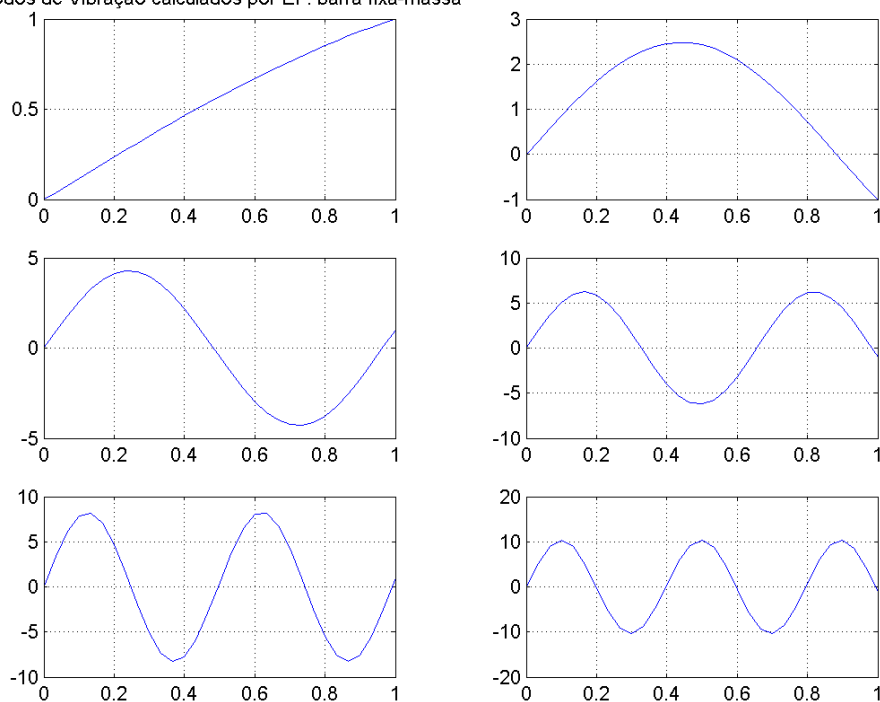


Figura A.15: Modos de vibração do problema de barra fixa-massa (30 elem)

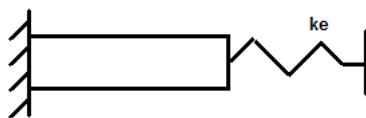
**A.1.9****Simulação de um problema de barra fixa-mola (aprox. linear)**

Figura A.16: Barra fixa-mola

**Frequências Naturais:**0.9272 · 10<sup>4</sup> Hz2.4334 · 10<sup>4</sup> Hz4.0078 · 10<sup>4</sup> Hz5.6044 · 10<sup>4</sup> Hz7.2203 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-mola

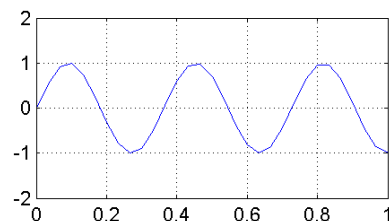
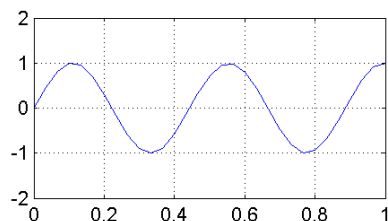
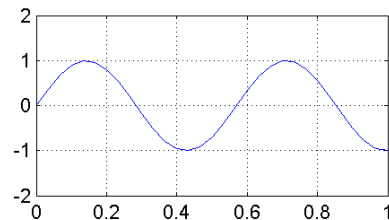
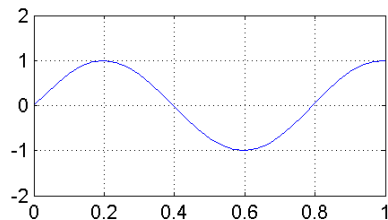
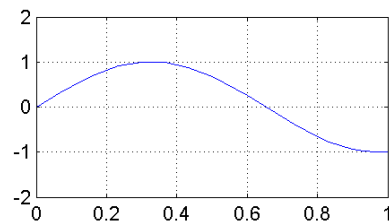
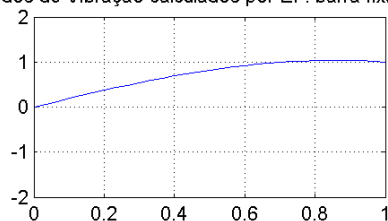


Figura A.17: Modos de vibração do problema de barra fixa-mola (30 elem)

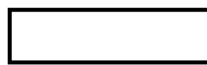
**A.1.10****Simulação de um problema de barra livre-livre (sol. analítica)**

Figura A.18: Barra livre-livre

**Frequências Naturais:**  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n = 0, 1, 2, \dots$

1.5857 · 10<sup>4</sup> Hz

3.1715 · 10<sup>4</sup> Hz

4.7572 · 10<sup>4</sup> Hz

6.3429 · 10<sup>4</sup> Hz

7.9287 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\cos \frac{n\pi x}{L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra livre-livre

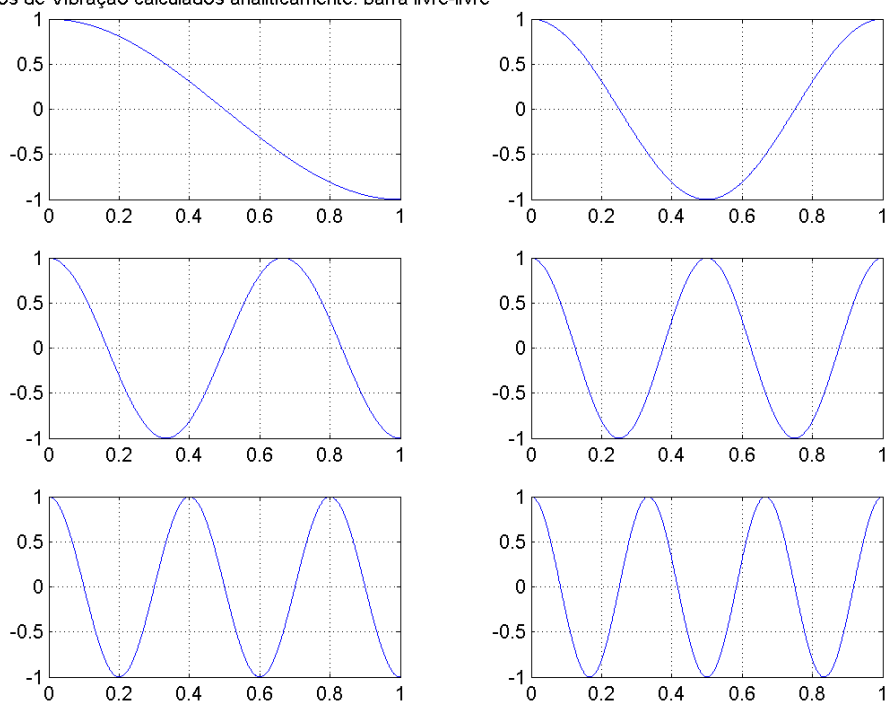


Figura A.19: Modos de vibração do problema de barra livre-livre (solução analítica)

## A.2

### Simulações de Vigas

Foram desenvolvidos, também, programas para calcular frequências naturais, modos de vibração e dinâmica de vigas, envolvendo diferentes condições de contorno, condições intermediárias e diversos tipos de elementos.

#### A.2.1

##### Simulação de um problema de viga bi-engastada

A seguir, será apresentado todo o programa de um problema de viga bi-engastada. Define-se os parâmetros geométricos ( $L, h, b, A$ ), as propriedades do material ( $E, \rho$ ). Deseja-se calcular os quatro primeiros modos de vibração ( $N = 4$ ), para uma viga discretizada em dez elementos ( $NE = 10$ ), sendo que os elementos são lineares, de dois nós.

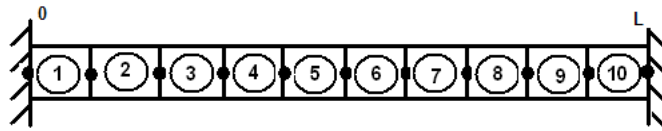


Figura A.20: Viga bi-engastada discretizada em 10 elementos

O sistema foi dividido em 10 elementos e tem, no total, 11 nós. Cada nó da viga necessita de dois graus de liberdade: um representa o deslocamento transversal e o outro, a rotação.

- **Topologia**  $\Rightarrow$  mostra os graus de liberdade associados a cada elemento:

<i>Elemento</i>	$GL_1$	$GL_2$	$GL_3$	$GL_4$
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8
4	7	8	9	10
5	9	10	11	12
6	11	12	13	14
7	13	14	15	16
8	15	16	17	18
9	17	18	19	20
10	19	20	21	22

Tabela A.4: Graus de liberdade associados a cada elemento de viga (*Edof*)

- **Lista de coordenadas**  $\Rightarrow$  apresenta as coordenadas X e Y de cada nó:

X	Y
0	0
0.1	0
0.2	0
0.3	0
0.4	0
0.5	0
0.6	0
0.7	0
0.8	0
0.9	0
1.0	0

Tabela A.5: Coordenadas de cada nó de um problema de viga (*Coord*)

- **Lista de graus de liberdade por nó**  $\Rightarrow$  cada nó apresenta três graus de liberdade:

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22

Tabela A.6: Graus de liberdade associados a cada nó (*Dof*)

- **Construção das matrizes de massa e de rigidez elementares**  $\Rightarrow$  cada elemento terá uma matriz de massa e uma matriz de rigidez, de dimensão 4 X 4, relacionando os deslocamentos  $X_i$  e  $X_{i+1}$  de cada elemento:

$$RMat\_M^e = \begin{pmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & M_{13}^e & M_{14}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & M_{23}^e & M_{24}^e \\ M_{31}^e & M_{32}^e & M_{33}^e & M_{34}^e \\ M_{41}^e & M_{42}^e & M_{43}^e & M_{44}^e \end{pmatrix}$$

$$RMat\_K^e = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{pmatrix}$$

- **Montagem das matrizes globais do sistema**  $\implies$  essas matrizes são montadas respeitando os deslocamentos que caracterizam cada elemento e, nesse caso, elas têm dimensão 22 X 22 (porque existem 22 graus de liberdade no sistema):

$$RMat\_M^G = \begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & M_{13}^1 & M_{14}^1 & \dots \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & M_{23}^1 & M_{24}^1 & \\ M_{31}^1 & M_{32}^1 & M_{33}^1 + M_{11}^2 & M_{34}^1 + M_{12}^2 & \\ M_{41}^1 & M_{42}^1 & M_{43}^1 + M_{21}^2 & M_{44}^1 + M_{22}^2 & \\ & & & & \ddots \\ & \vdots & & & \\ & & & & M_{44}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Graus de liberdade restritos**  $\implies$  como a viga está engastada nas duas extremidades, significa que os nós 1 e 11 são restritos. E isso significa que as linhas e colunas referentes aos graus 1,2,11,22 devem ser eliminadas das matrizes globais do sistema. Essas matrizes passam a ter dimensão 18 X 18 e são chamadas de  $RMat_{\tilde{K}}$  e  $RMat_{\tilde{M}}$ :

$$RMat_{\tilde{M}} = \begin{pmatrix} M_{33}^1 + M_{11}^2 & M_{34}^1 + M_{12}^2 & \dots & & \\ M_{43}^1 + M_{21}^2 & M_{44}^1 + M_{22}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Problema de auto-valor**  $\implies$  com o problema discretizado, basta calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema:

#### Frequências Naturais:

$$0.051886 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.143059 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.280657 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.464707 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.696325 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Modos de Vibração



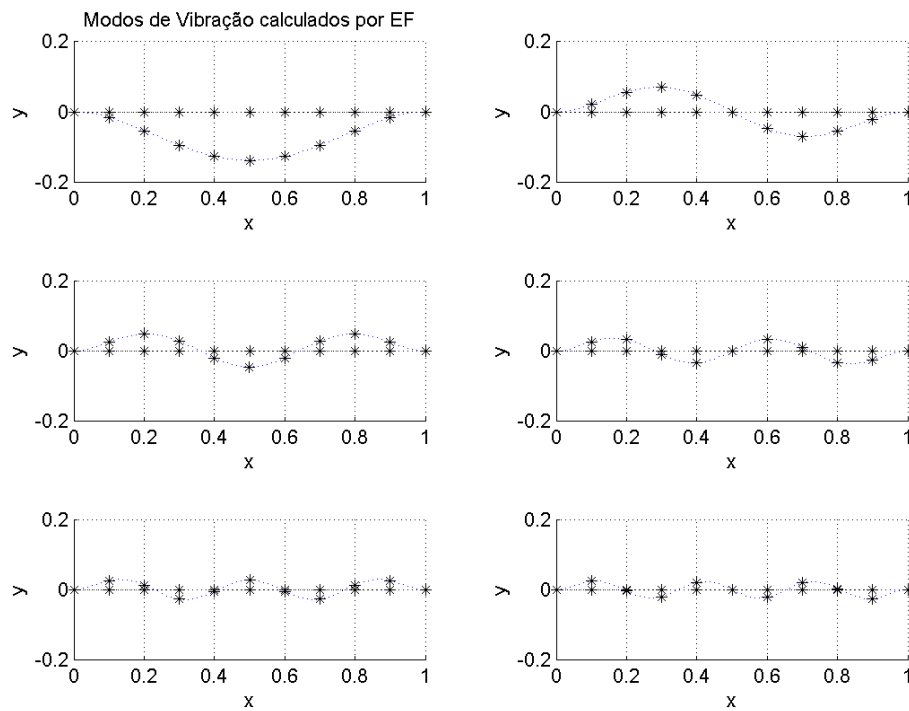


Figura A.21: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (10 elem)

A mesma simulação foi feita utilizando-se 30 elementos e os resultados encontrados foram:

Frequências Naturais:

0.051884 · 10<sup>3</sup> Hz

0.143022 · 10<sup>3</sup> Hz

0.280384 · 10<sup>3</sup> Hz

0.463499 · 10<sup>3</sup> Hz

0.692416 · 10<sup>3</sup> Hz

Modos de Vibração

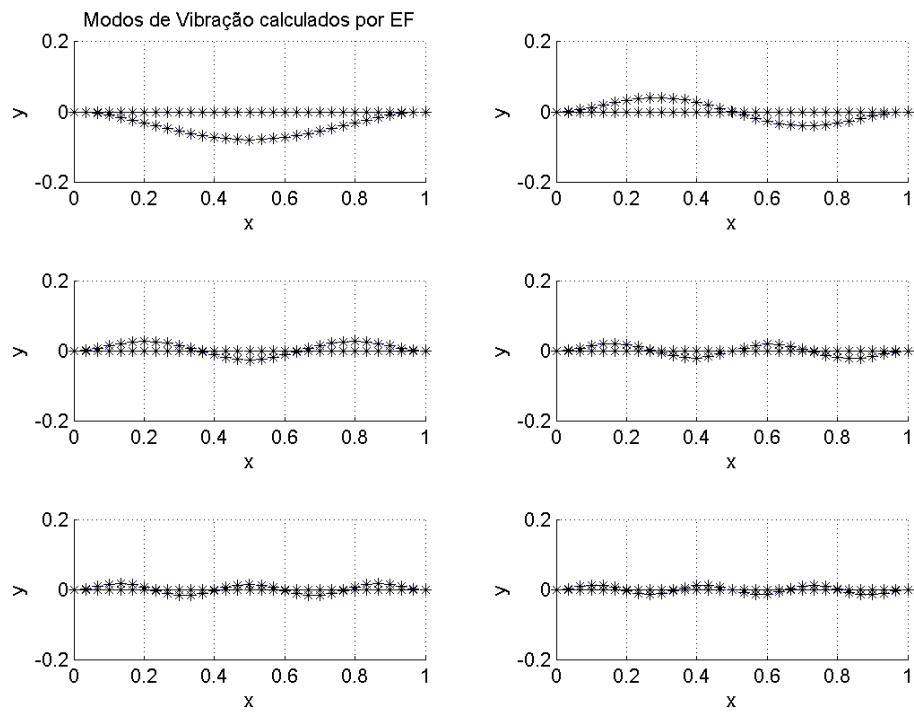


Figura A.22: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (30 elem)

**A.2.2****Simulação de um problema de viga bi-engastada (sol. analítica)****Frequências Naturais:**0.518847 · 10<sup>2</sup> Hz1.430222 · 10<sup>2</sup> Hz2.803807 · 10<sup>2</sup> Hz4.634835 · 10<sup>2</sup> Hz6.923645 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

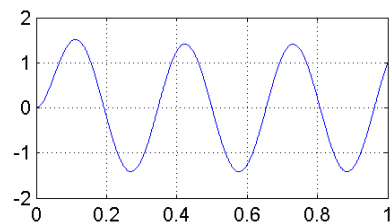
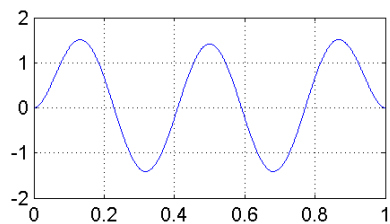
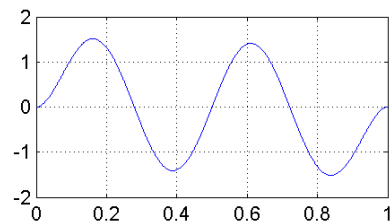
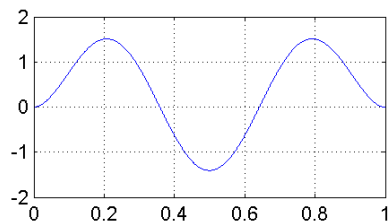
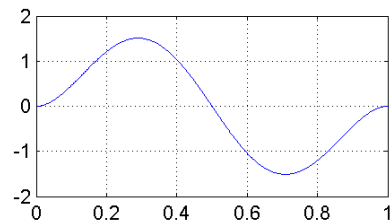
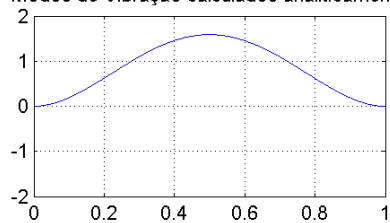


Figura A.23: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (solução analítica)

### A.2.3

#### Simulação de um problema de viga engastada-livre (sol. analítica)

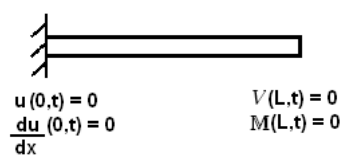


Figura A.24: Viga engastada-livre

#### Frequências Naturais:

0.081538 · 10<sup>2</sup> Hz

0.510990 · 10<sup>2</sup> Hz

1.430787 · 10<sup>2</sup> Hz

2.803773 · 10<sup>2</sup> Hz

4.634837 · 10<sup>2</sup> Hz

#### Modos de Vibração

Modos de Vibração calculados analiticamente

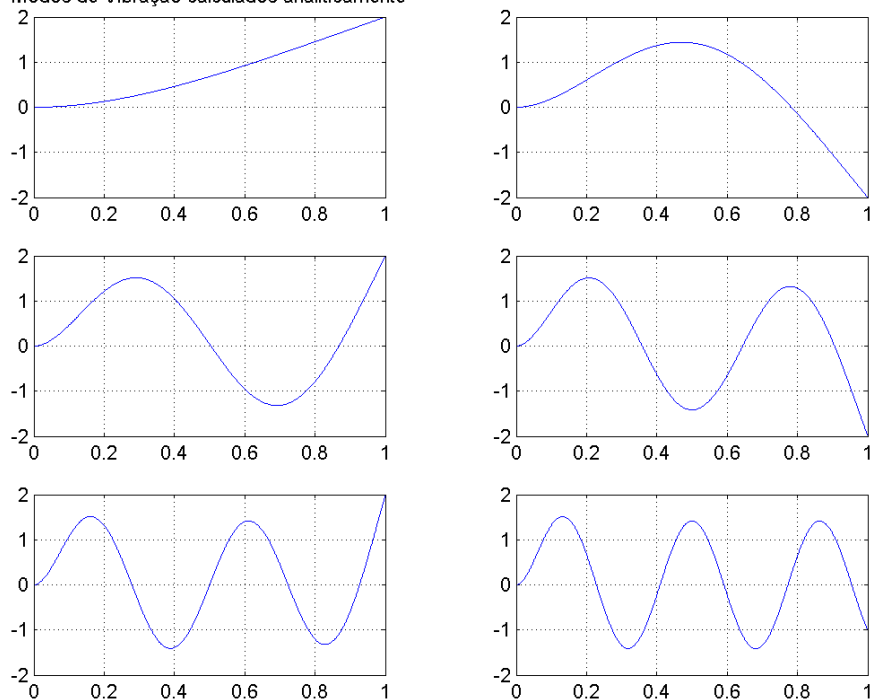


Figura A.25: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (solução analítica)

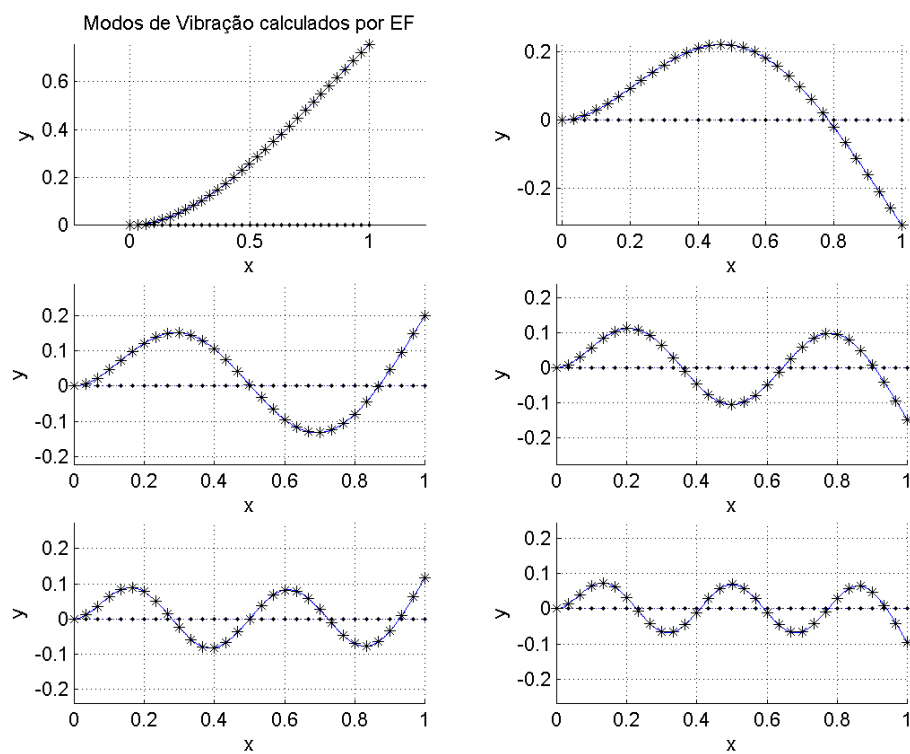
**A.2.4****Simulação de um problema de viga engastada-livre (aprox. linear)****Frequências Naturais:**0.081538 · 10<sup>2</sup> Hz0.510990 · 10<sup>2</sup> Hz1.430787 · 10<sup>2</sup> Hz2.803773 · 10<sup>2</sup> Hz4.634837 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.26: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (30 elem)

### A.2.5

#### Simulação de um problema de viga engastada-mola (aprox. linear)

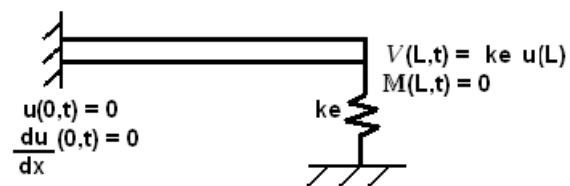


Figura A.27: Viga engastada-mola

#### Frequências Naturais:

8.9059 Hz

51.2257 Hz

143.1244 Hz

280.4038 Hz

463.5134 Hz

#### Modos de Vibração

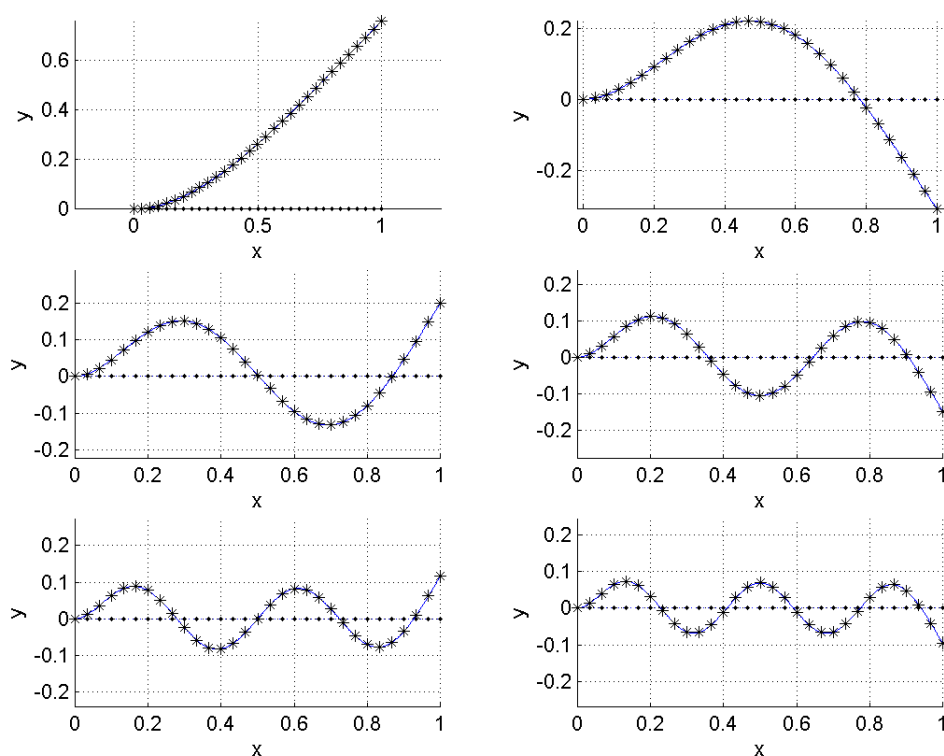


Figura A.28: Modos de vibração do problema de viga engastada-mola (30 elem)

### A.2.6

#### Simulação de um problema de viga engastada-massa (aprox. linear)

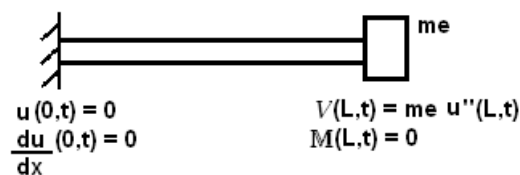


Figura A.29: Viga engastada-massa

#### Frequências Naturais:

$0.007766 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.030643 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.076779 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.175634 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.323205 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

#### Modos de Vibração

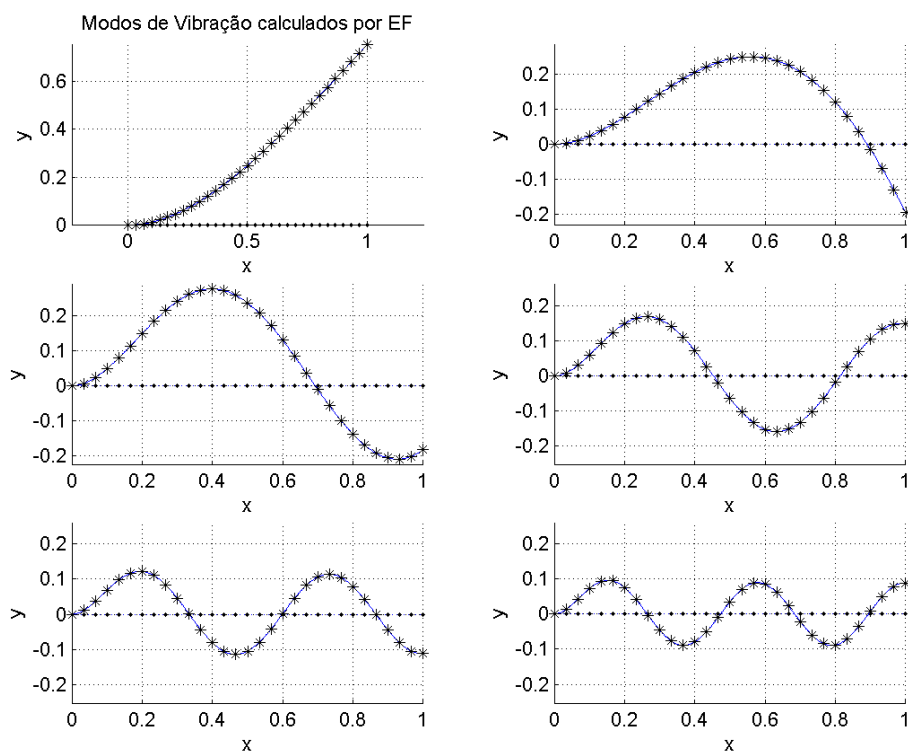


Figura A.30: Modos de vibração do problema de viga engastada-massa (30 elem)

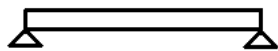
**A.2.7****Simulação de um problema de viga bi-apoiada (sol. analítica)**

Figura A.31: Viga bi-apoiada

**Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz0.915523 · 10<sup>2</sup> Hz2.059927 · 10<sup>2</sup> Hz3.662093 · 10<sup>2</sup> Hz5.722020 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

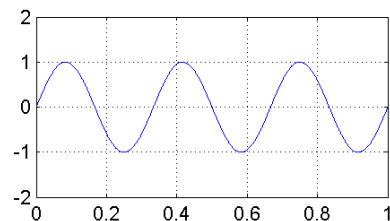
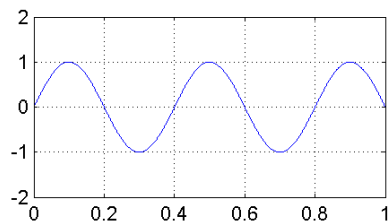
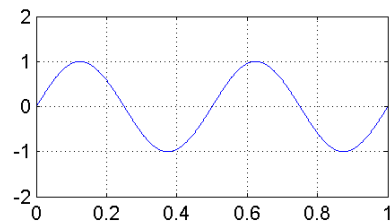
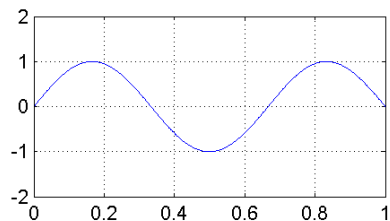
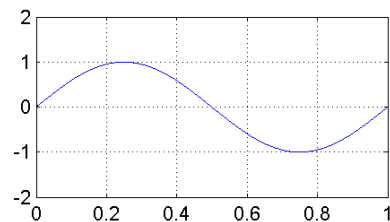
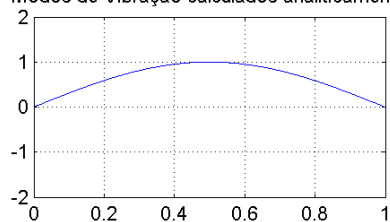


Figura A.32: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (solução analítica)



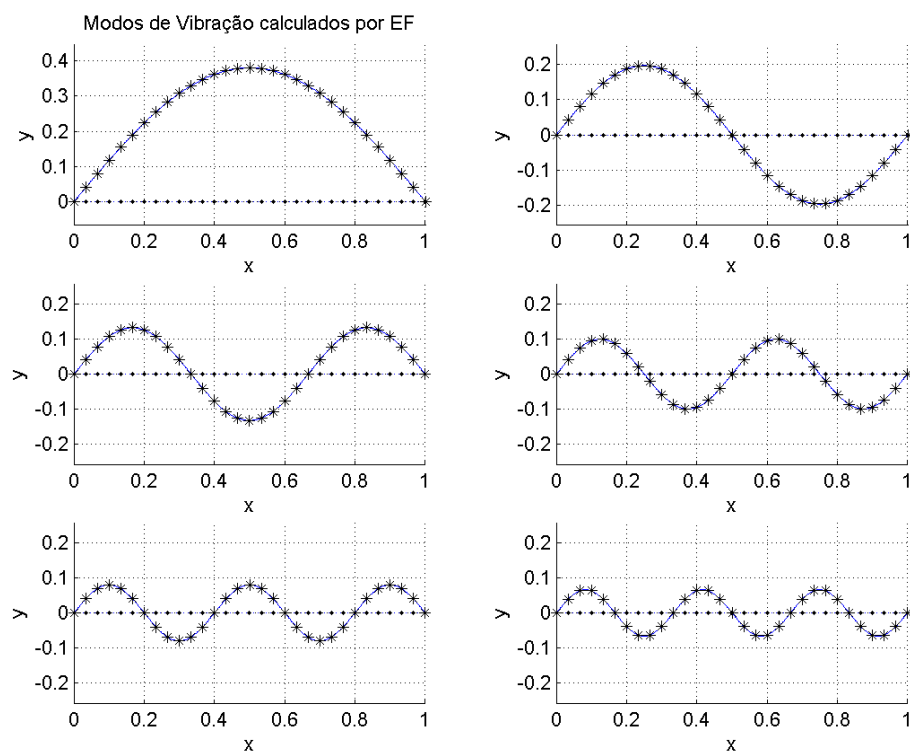
**A.2.8****Simulação de um problema de viga bi-apoiada (aprox. linear)****Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz0.915524 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz3.662171 · 10<sup>2</sup> Hz5.722317 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.33: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (30 elem)

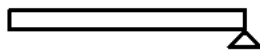
**A.2.9****Simulação de um problema de viga livre-apoiada (sol. analítica)**

Figura A.34: Viga livre-apoiada

**Frequências Naturais:**0.357555 · 10<sup>2</sup> Hz1.158708 · 10<sup>2</sup> Hz2.417553 · 10<sup>2</sup> Hz4.134160 · 10<sup>2</sup> Hz6.308527 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

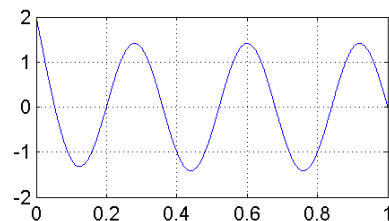
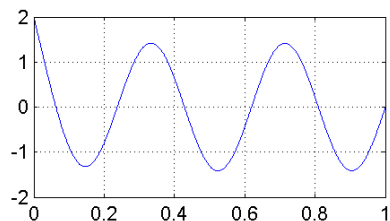
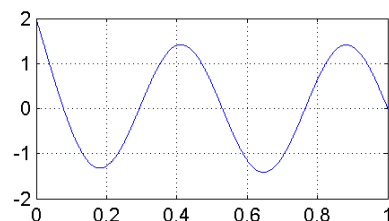
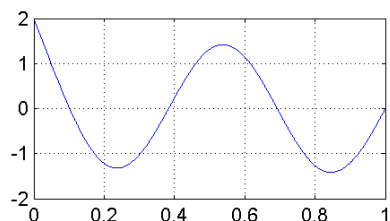
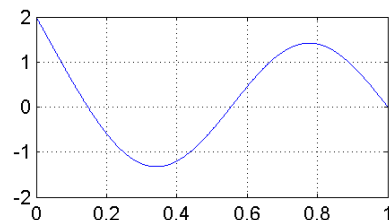
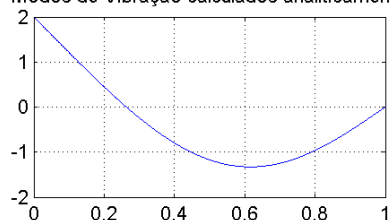


Figura A.35: Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (solução analítica)

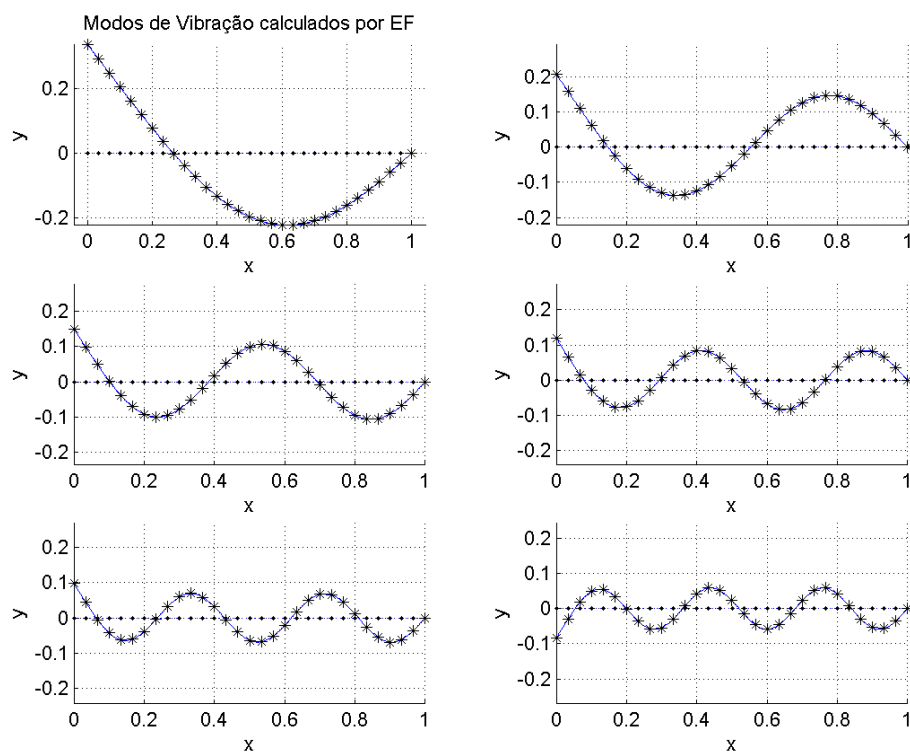
**A.2.10****Simulação de um problema de viga livre-apoiada (aprox. linear)****Frequências Naturais:**0.357555 · 10<sup>2</sup> Hz1.158711 · 10<sup>2</sup> Hz2.417576 · 10<sup>2</sup> Hz4.134271 · 10<sup>2</sup> Hz6.308922 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.36: Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (30 elem)

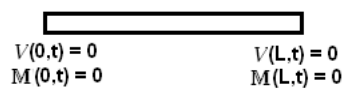
**A.2.11****Simulação de um problema de viga livre-livre (sol. analítica)**

Figura A.37: Viga livre-livre

**Frequências Naturais:**0.518847 · 10<sup>2</sup> Hz1.430222 · 10<sup>2</sup> Hz2.803807 · 10<sup>2</sup> Hz4.634835 · 10<sup>2</sup> Hz6.923645 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

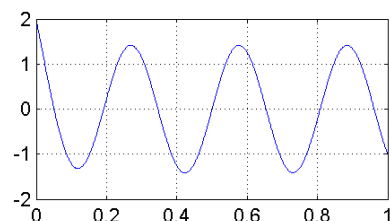
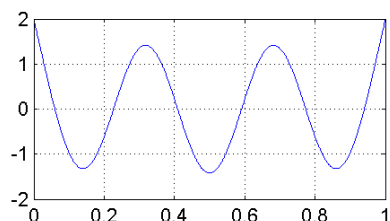
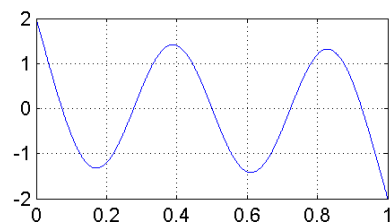
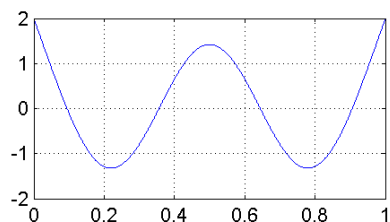
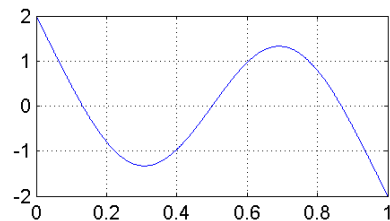
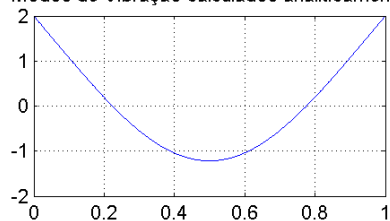


Figura A.38: Modos de vibração do problema de viga livre-livre (solução analítica)

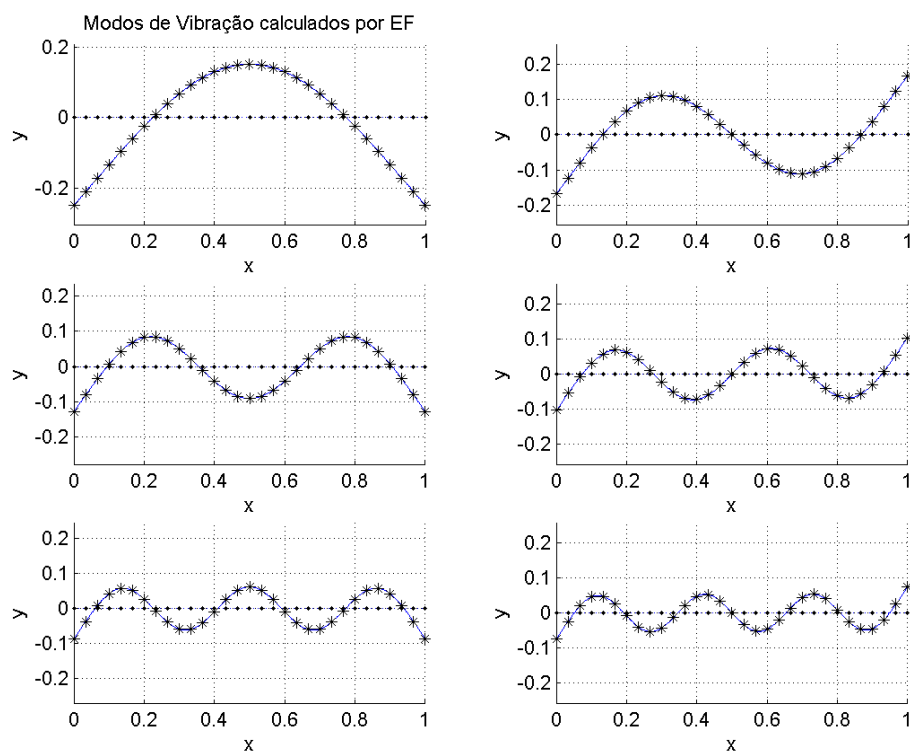
**A.2.12****Simulação de um problema de viga livre-livre (aprox. linear)****Frequências Naturais:**0.051884 · 10<sup>3</sup> Hz0.143022 · 10<sup>3</sup> Hz0.280384 · 10<sup>3</sup> Hz0.463499 · 10<sup>3</sup> Hz0.692416 · 10<sup>3</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.39: Modos de vibração do problema de viga livre-livre (30 elem)

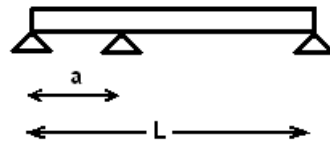
**A.2.13****Simulação de um problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário**

Figura A.40: Viga bi-apoiada com apoio intermediário

**Freqüências Naturais (Blevins):**

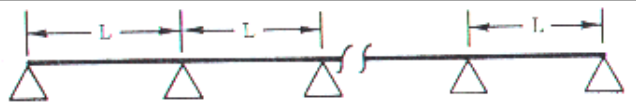
 $f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$						
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)						
Number of Spans (a)	Mode Number (i)					
	1	2	3	4	5	6
1	3.142	6.283	9.425	12.57	15.71	18.85
2	3.142	3.927	6.283	7.068	9.424	10.21
3	3.142	3.557	4.297	4.713	6.707	7.430
4	3.142	3.393	3.928	4.463	6.283	6.545
5	3.142	3.310	3.700	4.152	4.550	6.284
6	3.142	3.260	3.557	3.927	4.293	4.602
7	3.142	3.230	3.460	3.764	4.089	4.394
8	3.142	3.210	3.394	3.645	3.926	4.208
9	3.142	3.196	3.344	3.557	3.800	4.053
10	3.142	3.186	3.309	3.488	3.700	3.927
11	3.142	3.178	3.282	3.436	3.621	3.823
12	3.142	3.173	3.261	3.393	3.557	3.738
13	3.142	3.168	3.244	3.359	3.504	3.666
14	3.141	3.164	3.230	3.332	3.460	3.607
15	3.141	3.161	3.219	3.309	3.424	3.557

Figura A.41: Tabela de freqüências naturais de viga bi-apoiada com apoio intermediário (Blevins)

Essa tabela apresenta as seis primeiras freqüências naturais de problemas de viga bi-apoiada que podem ter de um a quinze apoios intermediários.

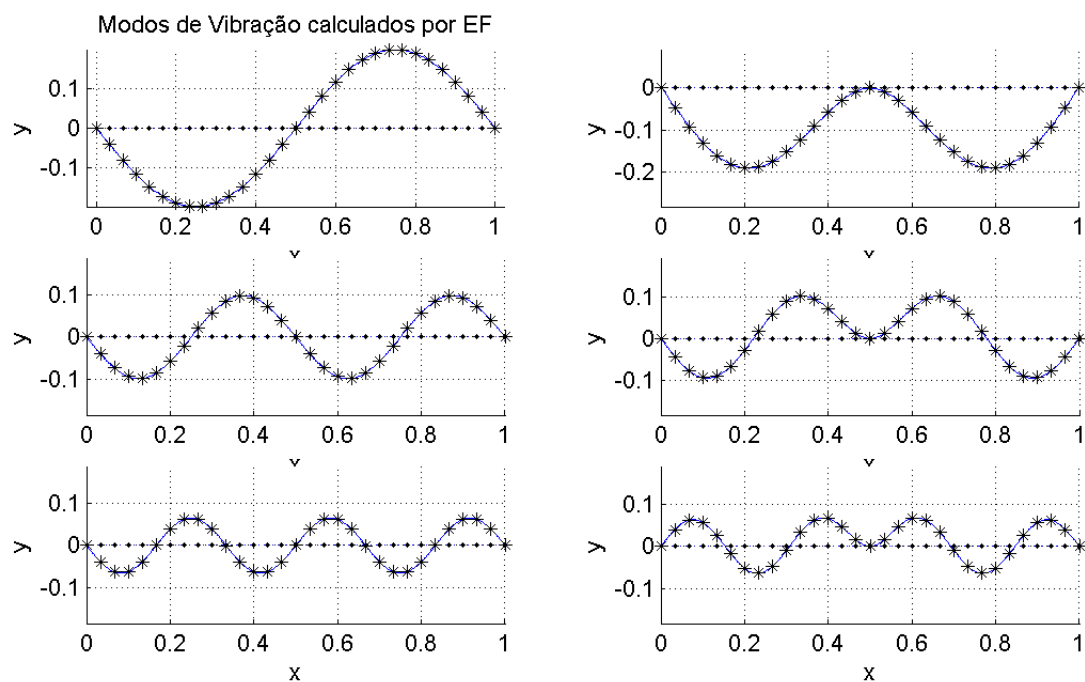
**Frequências Naturais (aprox. linear):**0.915524 · 10<sup>2</sup> Hz1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz3.662171 · 10<sup>2</sup> Hz4.634993 · 10<sup>2</sup> Hz8.240591 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração (aprox. linear)**

Figura A.42: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário (30 elem)

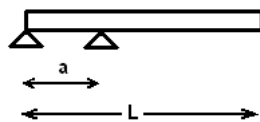
**A.2.14****Simulação de um problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (aprox. linear)**

Figura A.43: Viga apoiada-livre com apoio intermediário

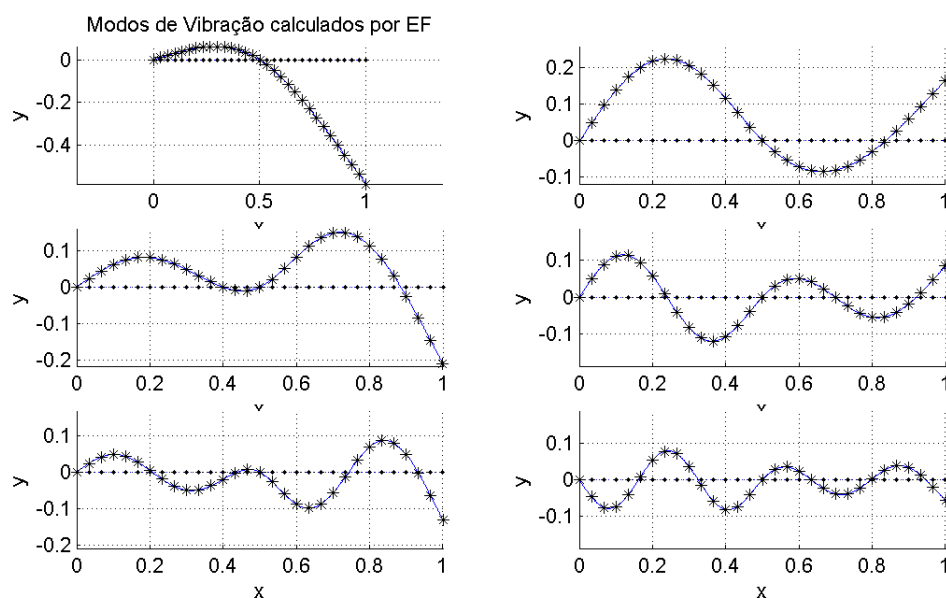
**Frequências Naturais:**0.210363 · 10<sup>2</sup> Hz1.080609 · 10<sup>2</sup> Hz1.826436 · 10<sup>2</sup> Hz3.973202 · 10<sup>2</sup> Hz5.347942 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.44: Modos de vibração do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (30 elem)



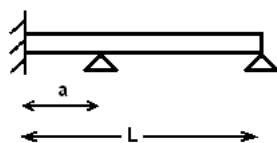
**A.2.15****Simulação de um problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (aprox. linear)**

Figura A.45: Viga engastada-apoiada com apoio intermediário

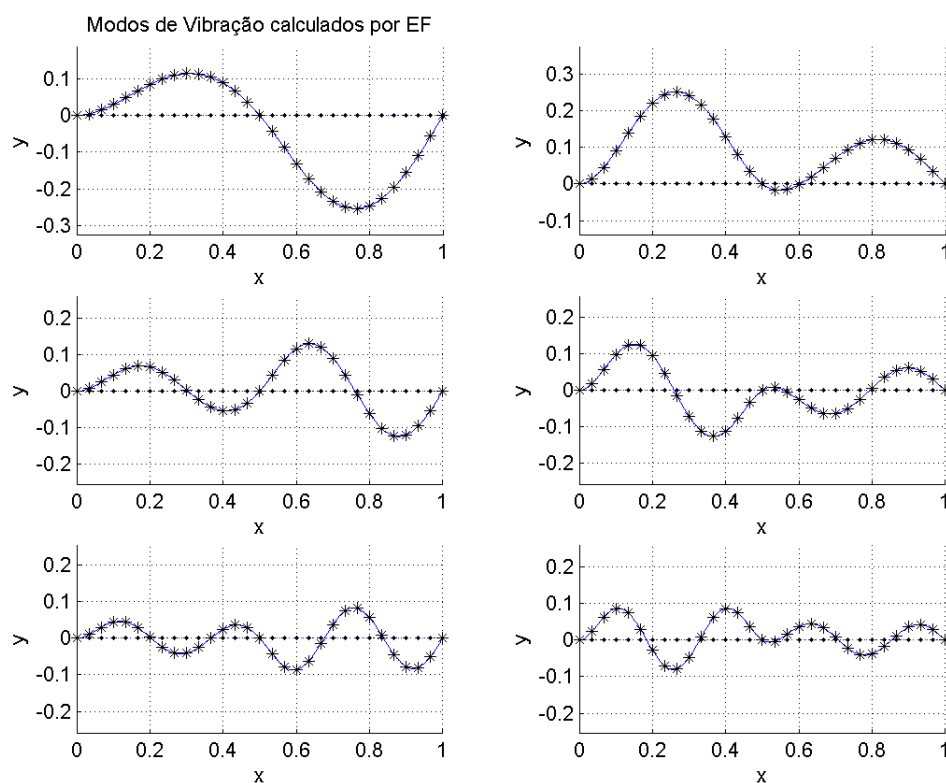
**Frequências Naturais:**0.106806 ·  $10^4$  Hz0.184794 ·  $10^4$  Hz0.397424 ·  $10^4$  Hz0.534635 ·  $10^4$  Hz0.870483 ·  $10^4$  Hz**Modos de Vibração**

Figura A.46: Modos de vibração do problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (30 elem)

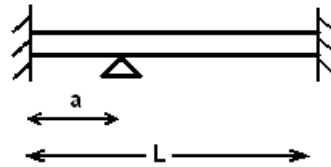
**A.2.16****Simulação de um problema de viga bi-engastada com apoio intermediário**

Figura A.47: Viga bi-engastada com apoio intermediário

**Freqüências Naturais (Blevins):**

						$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)						
Number of Spans (a)	Mode Number (i)					
	1	2	3	4	5	6
1	4.730	7.853	11.007	14.14	17.28	20.42
2	3.927	4.730	7.068	7.853	10.21	11.00
3	3.557	4.297	4.730	6.707	7.430	7.853
4	3.393	3.928	4.463	4.730	6.545	7.068
5	3.310	3.700	4.152	4.550	4.730	6.460
6	3.260	3.557	3.927	4.298	4.602	4.730
7	3.230	3.460	3.764	4.089	4.394	4.634
8	3.210	3.394	3.645	3.926	4.208	4.464
9	3.196	3.344	3.557	3.800	4.053	4.298
10	3.186	3.309	3.488	3.700	3.927	4.153
11	3.178	3.282	3.435	3.621	3.823	4.030
12	3.173	3.261	3.393	3.557	3.738	3.927
13	3.168	3.244	3.359	3.504	3.666	3.839
14	3.164	3.230	3.332	3.460	3.607	3.764
15	3.161	3.219	3.309	3.424	3.557	3.701

Figura A.48: Tabela de freqüências naturais de viga bi-engastada com apoio intermediário (Blevins)

A tabela acima apresenta as seis primeiras freqüências naturais de problemas de viga bi-engastada que tenham de um a quinze apoios intermediários.

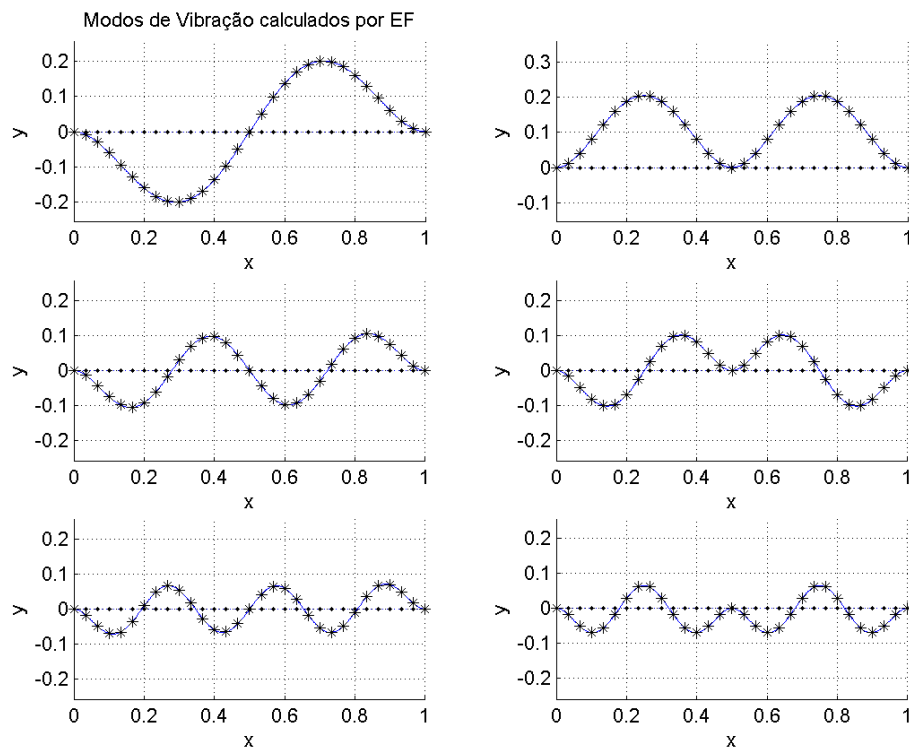
**Frequências Naturais (aprox. linear):**0.1430 · 10<sup>3</sup> Hz0.2075 · 10<sup>3</sup> Hz0.4635 · 10<sup>3</sup> Hz0.5721 · 10<sup>3</sup> Hz0.9672 · 10<sup>3</sup> Hz**Modos de Vibração (aprox. linear)**

Figura A.49: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (30 elem)

A.2.17

Simulação de um problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (aprox. linear)

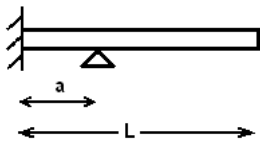


Figura A.50: Viga engastada-livre com apoio intermediário

Frequências Naturais (Blevins):

						$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)						
Number of Spans(a)	Mode Number (i)					
	1	2	3	4	5	6
1	1.875	4.694	7.855	11.00	14.14	17.28
2	1.570	3.923	4.707	7.058	7.842	10.19
3	1.541	3.570	4.283	4.720	6.707	7.430
4	1.539	3.403	3.928	4.450	4.723	6.545
5	1.539	3.316	3.706	4.148	4.538	4.724
6	1.539	3.265	3.563	3.927	4.292	4.592
7	1.539	3.233	3.466	3.767	4.086	4.389
8	1.539	3.213	3.399	3.649	3.926	4.204
9	1.539	3.198	3.349	3.560	3.802	4.051
10	1.539	3.187	3.312	3.492	3.703	3.927
11	1.539	3.179	3.285	3.439	3.624	3.624
12	1.539	3.173	3.263	3.397	3.559	3.739
13	1.539	3.168	3.245	3.362	3.507	3.669
14	1.539	3.165	3.232	3.334	3.463	3.609
15	1.539	3.162	3.221	3.311	3.427	3.559

Figura A.51: Tabela de frequências naturais de viga engastada-livre com apoios intermediários (Blevins)

A tabela apresenta as seis primeiras frequências naturais de problemas de viga engastada-livre que tenham de um a quinze apoios intermediários.

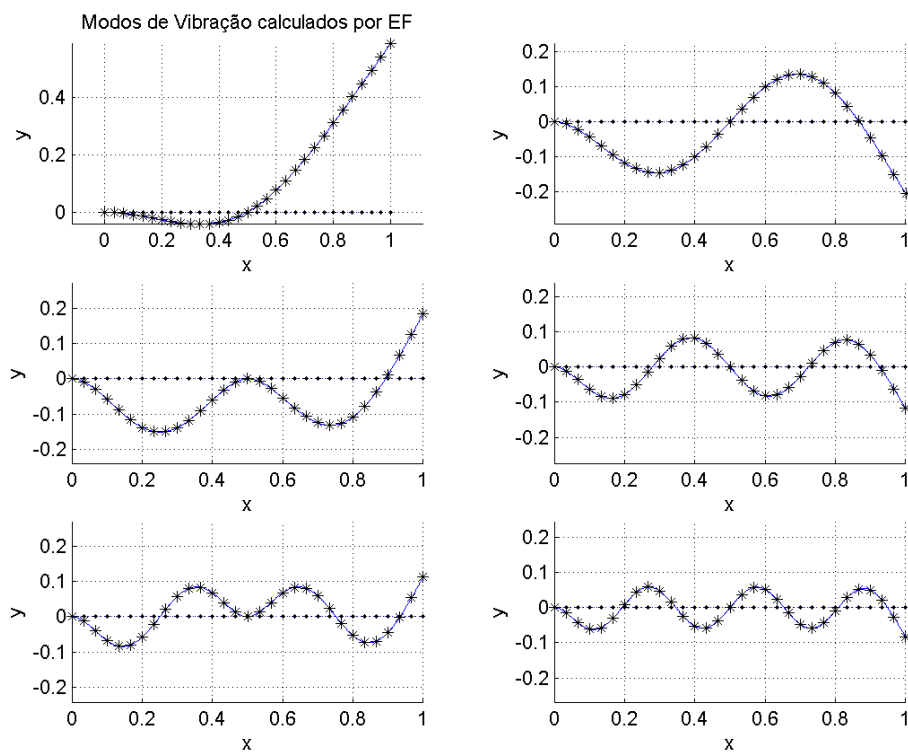
**Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz4.634993 · 10<sup>2</sup> Hz5.722316 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.52: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (30 elem)

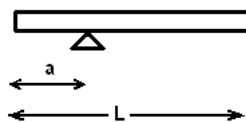
**A.2.18****Simulação de um problema de viga livre-livre com apoio intermediário (aprox. linear)**

Figura A.53: Viga livre-livre com apoio intermediário

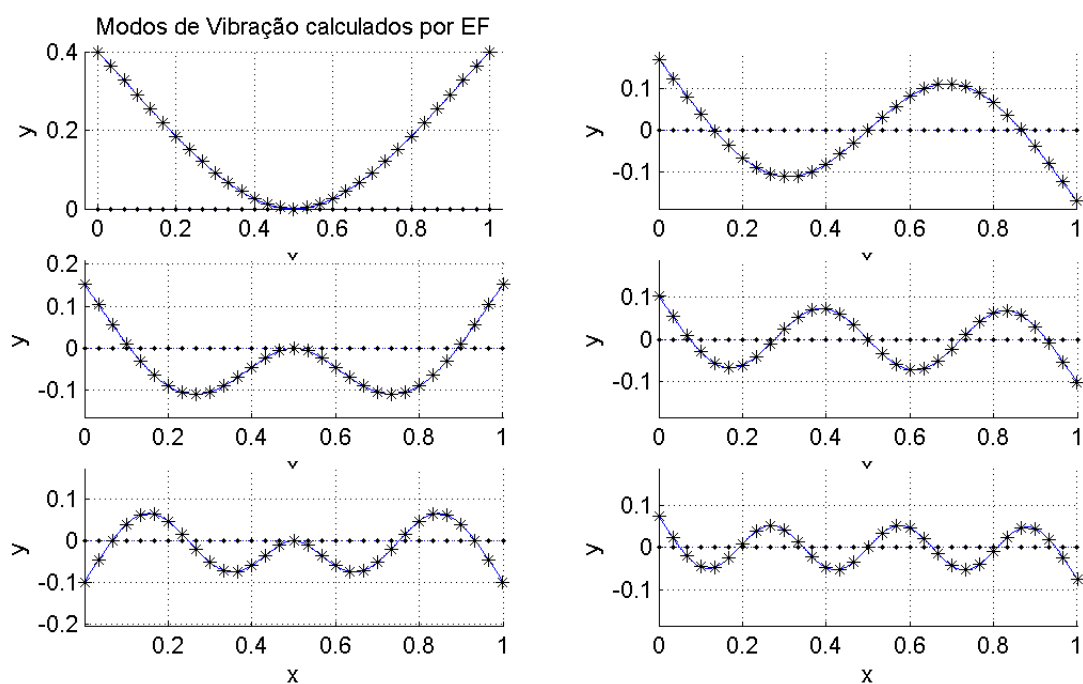
**Frequências Naturais:**0.326152 · 10<sup>2</sup> Hz1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz2.043974 · 10<sup>2</sup> Hz4.634992 · 10<sup>2</sup> Hz5.723445 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.54: Modos de vibração do problema de viga livre-livre com apoio intermediário (30 elem)

**A.2.19**

**Simulação de um problema de viga bi-engastada com mola intermediária (aprox. linear)**

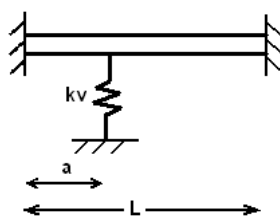


Figura A.55: Viga bi engastada com mola intermediária

**Frequências Naturais:**

$0.051963 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.143022 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.280395 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.463499 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

$0.692421 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

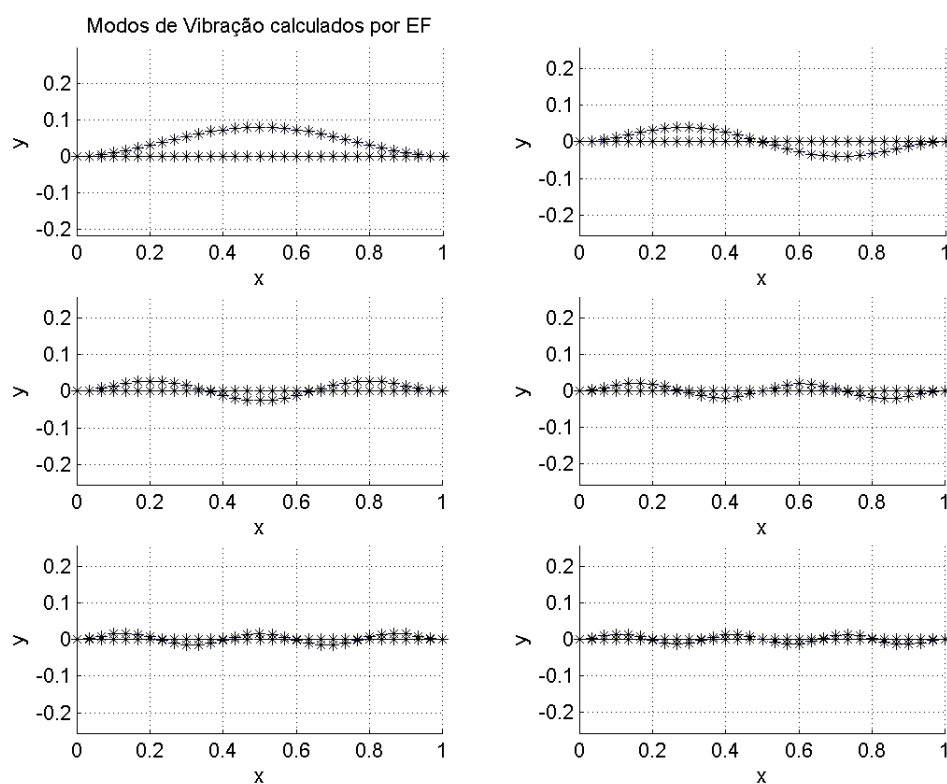
**Modos de Vibração**

Figura A.56: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com mola intermediária (30 elem)

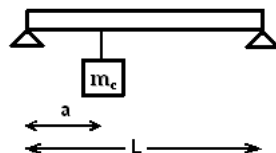
**A.2.20****Simulação de um problema de viga bi-apoiada com massa intermediária (aprox. linear)**

Figura A.57: Viga bi-apoiada com massa intermediária

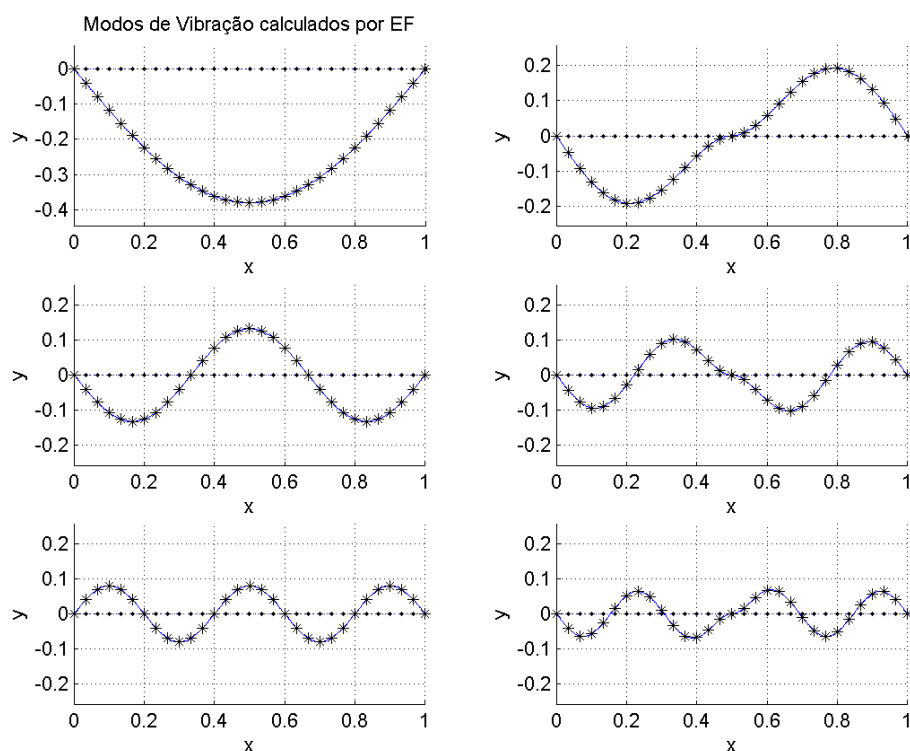
**Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz1.430699 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz4.635139 · 10<sup>2</sup> Hz5.722317 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.58: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com massa intermediária (30 elem)