

**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Mecânica**

Rio de Janeiro  
Agosto de 2006



**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento  
de Engenharia Mecânica da PUC–Rio

Orientador: Prof. Rubens Sampaio

Rio de Janeiro  
Agosto de 2006



**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Rubens Sampaio, Dr.-Ing.**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Fernando Alves Rochinha**

Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

**Prof. Lavinia Maria Sanabio Alves Borges**

Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

**Prof. Marco Antonio Meggiolaro**

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 01 de Agosto de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Priscilla Oliveira de Almeida**

Graduou-se em Engenharia Mecânica e Produção Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Atualmente, dedica-se ao curso de Doutorado em Engenharia Mecânica na PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Almeida, Priscilla Oliveira

Dinâmica de estruturas flexíveis unidimensionais / Priscilla Oliveira de Almeida; orientador: Rubens Sampaio . — Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Mecânica, 2006.

176 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Sistemas Contínuos. 3. Formulação Fraca. 4. Discretização. 5. Método Elementos Finitos. I. Sampaio, Rubens. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Aos meus pais, Nair e Carlos.

## Agradecimentos

Aos meus pais, Nair e Carlos Almeida, pela confiança, paciência e carinho fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao professor Rubens, pelo estímulo e dedicação demonstrados por todo esse tempo.

Ao suporte financeiro da CAPES e CNPq.

Aos meus amigos, que muito me apoiaram.

## Resumo

Almeida, Priscilla Oliveira; Sampaio, Rubens. **Dinâmica de estruturas flexíveis unidimensionais**. Rio de Janeiro, 2006. 176p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho, calcula-se a dinâmica de sistemas contínuos unidimensionais. Problemas de barras e vigas com diferentes condições de contorno e condições intermediárias são tratados no contexto da formulação fraca para que seja aplicado o *Método de Elementos Finitos*; e então seja possível calcular as aproximações das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema. Uma vez conhecidos os modos (exata ou aproximadamente), constrói-se um modelo reduzido de equações diferenciais ordinárias e, então, calcula-se a dinâmica do sistema. Essa dissertação propõe um material didático a ser utilizado no curso de Vibrações, com o intuito de auxiliar os alunos de graduação no estudo de sistemas contínuos, através do desenvolvimento da formulação fraca e aplicação do MEF.

## Palavras-chave

sistemas contínuos; formulação fraca; discretização; método elementos finitos.

## Abstract

Almeida, Priscilla Oliveira; Sampaio, Rubens. **Dynamic of one-dimensional flexible structures**. Rio de Janeiro, 2006. 176p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, the dynamic of one-dimensional continuum systems is calculated. Problems of bars and beams with different boundary and intermediate conditions are treated in the context of weak formulation, so the *Finite Element Method (FEM)* can be applied; and it is possible to calculate the approximation of natural frequencies and vibration modes of the system. Once the modes are known (exactly or approximately), a reduced-model of ordinary differential equations is constructed and the dynamic of the system is calculated. This essay proposes a didactic material to be used at the Vibration course, with the purpose to help undergraduate students in the studies of continuum systems, through the development of the weak formulation and the application of the FEM.

## Keywords

continuum systems; weak formulation; discretization; finite elements method



## Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivo do Trabalho	17
1.2	Organização do Trabalho	19
2	MODELAGEM DE PROBLEMAS DE BARRAS	21
2.1	Dinâmica de Barras	21
2.2	Problema Modelo: resolução por separação de variáveis	24
3	FORMULAÇÃO FRACA	32
3.1	Vantagens da Formulação Fraca	33
3.2	Formulação Fraca e Método Variacional de Aproximação	34
3.3	Formulação Fraca: problemas de barras	38
3.4	Problema de uma Barra Fixa-Livre	48
3.5	Problema de Barra Fixa-Massa	51
4	MODELAGEM DE PROBLEMAS DE VIGAS	55
4.1	Dinâmica de Vigas	55
4.2	Problema Modelo: resolução por separação de variáveis	57
5	FORMULAÇÃO FRACA PARA PROBLEMAS DE VIGAS	62
5.1	Problema de uma Viga Livre-Livre	62
5.2	Problema de uma Viga Engastada-Livre	67
5.3	Problema de uma Viga Engastada-Mola	69
6	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS - MEF	75
6.1	Aproximação do domínio	81
6.2	Aproximação da solução no domínio aproximado	81
6.3	Escolha do número de elementos iniciais (N)	92
6.4	Análise do erro	92
7	APLICAÇÃO DO MEF PROBLEMAS DE BARRAS E VIGAS	94
7.1	Problema de uma barra fixa-livre	94
7.2	Viga engastada com massa concentrada na extremidade	99
7.3	Viga engastada com mola vertical na extremidade livre	103
8	VIGAS COM CONDIÇÕES INTERMEDIÁRIAS	107
8.1	Problemas de vigas com um apoio intermediário	107
8.2	Problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários	114
8.3	Viga bi-engastada com uma mola vertical em coordenada intermediária	116
8.4	Viga bi-apoiada com massa concentrada em coordenada intermediária	118
8.5	Problema de viga apoiada-livre com uma mola torcional	120
8.6	Aproximação da dinâmica de um problema de viga com apoio intermediário	121

9	CONCLUSÃO	127
	Bibliografia	128
A	MANUAL DE PROGRAMAS DO MATLAB	130
A.1	Simulações de problemas de barras	133
A.2	Simulações de Vigas	148

## Lista de Figuras

1.1	Fluxograma representativo do MEF	16
1.2	Principais aspectos da MSA e do MEF	17
1.3	Processo de solução	19
2.1	Barra fixa-livre	21
2.2	Seção $[\overline{x_1 x_2}]$ do domínio	21
2.3	Condições de contorno e configurações associadas a cada tipo de barra	23
2.4	Barra livre-livre	24
3.1	Solução de problemas para diferentes formulações	34
3.2	Barra fixa-livre com área variável	38
3.3	Barra fixa-livre	48
3.4	Barra fixa com acoplamento elástico	49
3.5	Barra fixa-massa	51
3.6	Formulação Fraca de diferentes problemas de barras	54
4.1	Viga bi-engastada	55
4.2	Forças cortantes e momentos, em uma seção da viga	56
5.1	Problemas de vigas e suas configurações	62
5.2	Viga livre-livre	62
5.3	Viga engastada-livre	67
5.4	Viga engastada-mola	69
5.5	Viga engastada-massa	71
5.6	Formulação Fraca de diferentes problemas de Vigas	74
6.1	Procedimento completo do Método de Elementos Finitos [1]	77
6.2	Círculo de raio $R$	78
6.3	Círculo discretizado em 4 e 5 triângulos	79
6.4	Círculo discretizado em 6 e 7 triângulos	79
6.5	Círculo discretizado em 8 e 9 triângulos	79
6.6	Elemento típico de dois nós	81
6.7	Graus de liberdade relacionados ao elemento	82
6.8	Funções de interpolação local e global de um elementos linear	84
6.9	Elemento típico de três nós	85
6.10	Graus de liberdade associados ao elemento de três nós	85
6.11	Funções de interpolação locais e globais do elemento quadrático	87
6.12	Elemento típico de quatro nós	88
6.13	Graus de liberdade associados a um elemento de quatro nós	88
6.14	Funções de interpolação de um elemento de quatro nós	89
6.15	Graus de liberdade associados a um elemento de Hermite	90
6.16	Funções de interpolação de um elemento de Hermite	90
7.1	Barra fixa-livre dividida em elementos	94

7.2	Viga engastada-massa dividida em elementos	99
7.3	Viga engastada-mola dividida em elementos	104
8.1	Viga bi-engastada com apoio intermediário	109
8.2	Viga engastada-apoiada com apoio intermediário	110
8.3	Viga bi-apoiada com apoio intermediário	111
8.4	Viga apoiada-livre com apoio intermediário	112
8.5	Viga livre-livre com apoio intermediário	113
8.6	Viga engastada-livre com dois apoios intermediários	114
8.7	Viga bi-engastada com mola vertical em $x = a$	116
8.8	Viga bi-apoiada com massa concentrada em $x = a$	118
8.9	Viga apoiada-livre com uma mola torcional na extremidade do apoio	120
8.10	Viga engastada-apoiada-engastada com força aplicada	121
8.11	Modos de Vibração de uma viga bi-engastada com apoio intermediário	124
8.12	Dinâmica aproximada no ponto $x = x_0$	125
8.13	Procedimento adotado para aproximar dinâmica de sistemas contínuos	126
A.1	Barra fixa-livre discretizada em 10 elementos	134
A.2	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (10 elem)	137
A.3	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. linear)	138
A.4	Barra fixa-livre	139
A.5	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (solução analítica)	139
A.6	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. quadrática)	140
A.7	Barra fixa-fixa	141
A.8	Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (solução analítica)	141
A.9	Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (30 elem - aprox. linear)	142
A.10	Barra fixa-livre com duas áreas	143
A.11	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com duas áreas (30 elem)	143
A.12	Barra fixa-livre com dois materiais	144
A.13	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com dois materiais (30 elem)	144
A.14	Barra fixa-massa	145
A.15	Modos de vibração do problema de barra fixa-massa (30 elem)	145
A.16	Barra fixa-mola	146
A.17	Modos de vibração do problema de barra fixa-mola (30 elem)	146
A.18	Barra livre-livre	147
A.19	Modos de vibração do problema de barra livre-livre (solução analítica)	147
A.20	Viga bi-engastada discretizada em 10 elementos	148
A.21	Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (10 elem)	152

A.22 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (30 elem)	153
A.23 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (solução analítica)	154
A.24 Viga engastada-livre	155
A.25 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (solução analítica)	155
A.26 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (30 elem)	156
A.27 Viga engastada-mola	157
A.28 Modos de vibração do problema de viga engastada-mola (30 elem)	157
A.29 Viga engastada-massa	158
A.30 Modos de vibração do problema de viga engastada-massa (30 elem)	158
A.31 Viga bi-apoiada	159
A.32 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (solução analítica)	159
A.33 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (30 elem)	160
A.34 Viga livre-apoiada	161
A.35 Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (solução analítica)	161
A.36 Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (30 elem)	162
A.37 Viga livre-livre	163
A.38 Modos de vibração do problema de viga livre-livre (solução analítica)	163
A.39 Modos de vibração do problema de viga livre-livre (30 elem)	164
A.40 Viga bi-apoiada com apoio intermediário	165
A.41 Tabela de frequências naturais de viga bi-apoiada com apoio intermediário (Blevins)	165
A.42 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário (30 elem)	166
A.43 Viga apoiada-livre com apoio intermediário	167
A.44 Modos de vibração do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (30 elem)	167
A.45 Viga engastada-apoiada com apoio intermediário	168
A.46 Modos de vibração do problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (30 elem)	168
A.47 Viga bi-engastada com apoio intermediário	169
A.48 Tabela de frequências naturais de viga bi-engastada com apoio intermediário (Blevins)	169
A.49 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (30 elem)	170
A.50 Viga engastada-livre com apoio intermediário	171
A.51 Tabela de frequências naturais de viga engastada-livre com apoios intermediários (Blevins)	171
A.52 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (30 elem)	172
A.53 Viga livre-livre com apoio intermediário	173
A.54 Modos de vibração do problema de viga livre-livre com apoio intermediário (30 elem)	173

A.55 Viga bi engastada com mola intermediária	174
A.56 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com mola intermediária (30 elem)	174
A.57 Viga bi-apoiada com massa intermediária	175
A.58 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com massa intermediária (30 elem)	175

## Lista de Tabelas

6.1	Comparação entre aproximações e solução	80
A.1	Graus de liberdade associados a cada elemento de barra ( <i>Edof</i> )	134
A.2	Coordenadas de cada nó de um problema de barra ( <i>Coord</i> )	135
A.3	Graus de liberdade associados a cada nó ( <i>Dof</i> )	135
A.4	Graus de liberdade associados a cada elemento de viga ( <i>Edof</i> )	148
A.5	Coordenadas de cada nó de um problema de viga ( <i>Coord</i> )	149
A.6	Graus de liberdade associados a cada nó ( <i>Dof</i> )	149

## Lista de símbolos

$\sin$	Seno.
$\cos$	Cosseno.
$L$	Comprimento.
$x$	Posição.
$u$	Deslocamento axial para barras.
$A$	Área da seção reta.
$t$	Tempo.
$f$	Força externa.
$P$	Força interna.
$E$	Módulo de elasticidade.
$\varepsilon$	Deformação.
$\partial$	Derivada parcial.
$k_e$	Rigidez de mola na extremidade.
$m_e$	Massa concentrada na extremidade.
$\omega$	Frequência natural de uma barra.
$I$	Inércia.
$\rho$	Densidade.
$\phi$	Modo de vibração.
$u^N$	Aproximação da solução.
$\varepsilon^N$	Erro de aproximação da solução.
$N$	N úmero de modos.
$a$	Coordenada de condição intermediária.
$\psi$	Função-teste.
$I$	Inércia.
$\tilde{E}$	Espaço da solução.
$E$	Espaço das funções-teste.
$Adm$	Espaço das funções admissíveis.
$Adm^N$	Sub-espaço de $Adm$ .
$u_0$	Posição inicial.
$v_0$	Velocidade inicial.
$\mathcal{K}$	Operador de rigidez.
$\mathcal{M}$	Operador de massa.
$\mathcal{F}$	Operador de carregamento.
$F$	Vetor de carregamento.
$m$	Massa.
$k$	Rigidez da mola.
$V$	Esforço cortante.
$M$	Momento fletor.
$u$	Deslocamento transversal para vigas.
$\lambda$	Frequência natural de uma viga.
$\phi_j$	Função de interpolação.
$p$	Precisão desejada.
$e$	Erro.