

7

Experimentos computacionais

Neste capítulo são apresentados os experimentos computacionais realizados com as heurísticas lagrangeanas na Seção 7.1 e os algoritmos do tipo GRASP e híbrido na Seção 7.2 propostos nesta tese. Esses algoritmos foram implementados no Visual Studio 6.0 e compilados utilizando a opção de otimização -O2. O gerador de números aleatórios usado é aquele apresentado em [61]. Todos os experimentos foram realizados em um Pentium IV com relógio de 2.0 GHz e 512 Mbytes de memória RAM.

7.1

Experimentos computacionais com as heurísticas lagrangeanas

Estes experimentos foram realizados com as instâncias dos Grupos 1, 2 e algumas instâncias do Grupo 3. Foram executadas 1000 iterações ($\tau = 1000$) da relaxação lagrangeana. O valor inicial do parâmetro $\pi \in (0, 2]$ é igual a 2, sendo dividido por 2 sempre que o melhor limite inferior não tiver sido aprimorado após 50 iterações consecutivas ($\tau_\pi = 50$).

As heurísticas OTT e OTT-M2 foram aplicadas para a geração de soluções primais. As heurísticas lagrangeanas que utilizam a heurística OTT e os custos lagrangeanos e complementares são chamadas respectivamente de HL e HC. A heurística OTT-M2 também foi testada utilizando os custos lagrangeanos e complementares e as versões decorrentes são chamadas respectivamente de HL2 e HC2.

Em cada iteração da relaxação lagrangeana, uma solução primal foi gerada utilizando uma das heurísticas citadas acima. Além disto, a cada 25 iterações ou sempre que um melhor limite inferior é encontrado, a busca local apresentada no Algoritmo 12 foi aplicada à solução gerada pela heurística empregada. Os custos associados a cada aresta para aplicação da busca local à solução considerada foram os custos originais de cada aresta.

Nas Tabelas 7.1, 7.2 e 7.3 encontram-se os resultados obtidos através das heurísticas HL, HC, HL2 e HC2. Nessas tabelas são apresentados, para cada instância, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro. Cada linha corresponde a uma instância diferente. Os valores O^* das soluções ótimas são dados para as instâncias dos Grupos 1 e 2. Para as

instâncias do Grupo 3, a melhor solução conhecida da literatura é indicada na coluna S^* . São fornecidos os limites superiores S' obtidos através das heurísticas lagrangeanas. As diferenças relativas percentuais $100 \cdot (S' - O^*)/O^*$ são fornecidas para os Grupos 1 e 2, identificadas nas tabelas deste capítulo por *dif.*. Para os resultados do Grupo 3, este percentual é calculado em função do melhor limite inferior S^* conhecido. Estes mesmos percentuais também são utilizados nos experimentos realizados com as heurísticas baseadas em metaheurísticas apresentados na Seção 7.2.

Nas instâncias em grafos completos do Grupo 1, as heurísticas HL, HC, HL2 e HC2 encontraram, respectivamente, limites superiores a menos de 10%, 5%, 2,5% e 2% dos custos ótimos. Para as instâncias esparsas deste grupo, as heurísticas HL, HC, HL2 e HC2 encontraram, respectivamente, limites superiores a menos de 7,5%, 8,5%, 2% e 6,5% dos custos ótimos. Observa-se que as heurísticas HL2 e HC2 obtiveram melhor desempenho que HL e HC. A heurística que apresentou os melhores resultados, entre todas as testadas para o Grupo 1, foi HL2 pois encontrou resultados a menos de 2,1% do valor ótimo para todas as instâncias.

As instâncias do Grupo 2 são todas em grafos esparsos e a maioria possui diâmetros pequenos. Estas características são difíceis de serem tratadas. Como constatado anteriormente no Capítulo 4, o modelo multifluxo básico produz melhores limites inferiores quando o diâmetro é grande. Isto afeta também a qualidade dos limites superiores produzidos por heurísticas que se baseiam na relaxação lagrangeana desenvolvida para esta formulação. Como pode ser verificado na Tabela 7.2, os limites superiores para o Grupo 2 estão mais distantes dos valores ótimos do que os obtidos no Grupo 1. A heurística HC encontrou limites superiores a no máximo 11% dos valores ótimos. A heurística HL2 produziu os menores limites inferiores para sete instâncias das 12 deste grupo. Entretanto, o maior limite superior, dentre todos os limites encontrados, também foi produzido por HL2 e está a 18,67% de distância do valor ótimo. As outras heurísticas HL e HC2 também obtiveram resultados que estão distantes dos custos ótimos.

Na Tabela 7.3 estão os resultados para as instâncias do Grupo 3. Os limites superiores encontrados pelas heurísticas HL, HC, HL2 e HC2 estão distantes (na pior situação), respectivamente, 4,48%, 3,05%, 3,65% e 1,83% dos melhores resultados conhecidos na literatura. Uma única solução melhor que a existente na literatura foi encontrada pela heurística HL2.

Conclui-se destes experimentos que, em geral, a heurística HL2, executando-se 1000 iterações, apresentou um melhor desempenho que as demais. Os tempos de execução da relaxação lagrangeana são altos. Por exemplo, para a instância de 60 nós e 150 arestas do Grupo 1 foram consumidos 2797

segundos no cálculo da relaxação.

V	E	D	O*	HL		HC		HL2		HC2	
				S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)
10	45	4	252	252	0,0%	252	0,0%	252	0,0%	252	0,0%
		5	230	230	0,0%	230	0,0%	230	0,0%	230	0,0%
		6	221	221	0,0%	221	0,0%	221	0,0%	221	0,0%
		7	203	214	5,4%	203	0,0%	203	0,0%	203	0,0%
		8	232	232	0,0%	232	0,0%	232	0,0%	232	0,0%
		9	254	254	0,0%	254	0,0%	254	0,0%	254	0,0%
		10	254	254	0,0%	254	0,0%	254	0,0%	254	0,0%
15	105	4	346	346	0,0%	346	0,0%	346	0,0%	346	0,0%
		5	331	340	2,7%	331	0,0%	331	0,0%	331	0,0%
		6	314	316	0,6%	316	0,6%	314	0,0%	314	0,0%
		7	303	323	6,6%	308	1,7%	303	0,0%	303	0,0%
		8	240	240	0,0%	240	0,0%	240	0,0%	240	0,0%
		9	290	293	1,0%	293	1,0%	291	0,3%	291	0,3%
		10	286	291	1,8%	291	1,8%	291	1,8%	291	1,8%
20	190	4	349	349	0,0%	349	0,0%	349	0,0%	349	0,0%
		5	414	421	1,7%	421	1,7%	414	0,0%	414	0,0%
		6	298	301	1,0%	301	1,0%	298	0,0%	299	0,3%
		7	333	333	0,0%	333	0,0%	333	0,0%	333	0,0%
		8	331	335	1,2%	335	1,2%	331	0,0%	331	0,0%
		9	327	335	2,5%	336	2,8%	334	2,1%	327	0,0%
		10	324	324	0,0%	324	0,0%	324	0,0%	324	0,0%
25	300	4	500	500	0,0%	500	0,0%	506	1,2%	500	0,0%
		5	429	471	9,8%	450	4,9%	429	0,0%	429	0,0%
		6	378	380	0,5%	391	3,4%	378	0,0%	383	1,3%
		7	408	416	2,0%	415	1,7%	408	0,0%	411	0,7%
		8	580	369	0,0%	380	3,0%	369	0,0%	369	0,0%
		9	336	338	0,6%	336	0,0%	336	0,0%	336	0,0%
		10	379	389	2,6%	389	2,6%	384	1,3%	381	0,5%
20	50	4	442	442	0,0%	446	0,9%	442	0,0%	442	0,0%
		5	381	381	0,0%	381	0,0%	381	0,0%	381	0,0%
		6	329	329	0,0%	339	3,0%	329	0,0%	329	0,0%
		7	362	366	1,1%	367	1,4%	362	0,0%	362	0,0%
		8	366	374	2,2%	374	2,2%	366	0,0%	366	0,0%
		9	362	365	0,8%	365	0,8%	362	0,0%	362	0,0%
		10	359	360	0,3%	360	0,3%	359	0,0%	359	0,0%
40	100	4	755	755	0,0%	755	0,0%	755	0,0%	755	0,0%
		5	729	750	2,9%	750	2,9%	732	0,4%	750	2,9%
		6	599	599	0,0%	599	0,0%	599	0,0%	599	0,0%
		7	667	679	1,8%	673	0,9%	668	0,2%	674	1,1%
		8	580	582	0,3%	582	0,3%	580	0,0%	580	0,0%
		9	552	578	4,7%	598	8,3%	558	1,1%	561	1,6%
60	150	5	968	1036	7,0%	1021	5,5%	984	1,6%	1027	6,1%

Tabela 7.1: Resultados das heurísticas lagrangeanas para as instâncias do Grupo 1.

V	E	D	O*	HL		HC		HL2		HC2	
				S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)
40	400	5	612	630	2,9%	630	2,9%	630	2,9%	630	2,9%
		7	527	567	7,6%	550	4,4%	534	1,3%	536	1,7%
		9	495	521	5,3%	531	7,3%	508	2,6%	508	2,6%
		5	253	260	2,8%	260	2,8%	267	5,5%	279	10,3%
		7	171	181	5,8%	181	5,8%	171	0,0%	181	5,8%
		9	154	154	0,0%	154	0,0%	163	5,8%	154	0,0%
60	600	5	965	1009	4,6%	1071	11,0%	1013	5,0%	985	2,1%
		7	789	883	11,9%	862	9,3%	814	3,2%	826	4,7%
		9	738	778	5,4%	778	5,4%	762	3,3%	767	3,9%
		5	256	279	9,0%	274	7,0%	274	7,0%	292	14,1%
		7	150	155	3,3%	160	6,7%	178	18,7%	161	7,3%
		9	124	128	3,2%	132	6,5%	146	17,7%	129	4,0%

Tabela 7.2: Resultados das heurísticas lagrangeanas para as instâncias do Grupo 2.

V	E	D	S*	HL		HC		HL2		HC2	
				S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)	S'	dif. (%)
50	1225	5	7,60	7,94	4,5%	7,83	3,1%	7,84	3,1%	7,72	1,6%
			7,68	7,73	0,6%	7,81	1,7%	7,82	1,8%	7,74	0,8%
			7,24	7,42	2,5%	7,42	2,5%	7,26	0,3%	7,36	1,7%
			6,59	6,70	1,7%	6,68	1,4%	6,83	3,7%	6,71	1,8%
			7,32	7,43	1,5%	7,43	1,5%	7,25	-0,9%	7,37	0,7%

Tabela 7.3: Resultados das heurísticas lagrangeanas para algumas instâncias do Grupo 3.

No Grupo 2, cada instância de 40 nós consumiu aproximadamente 1900 segundos no cálculo da relaxação lagrangeana. Cada instância de 60 nós consumiu aproximadamente 12000 segundos no cálculo da relaxação lagrangeana. No Grupo 3, a relaxação lagrangeana foi executada em aproximadamente 13300 segundos para as instâncias de 50 nós. Os tempos adicionais consumidos para executar as heurísticas OTT ou OTT-M2 e a busca local tornam-se insignificantes quando comparados com os tempos necessários para a execução da relaxação lagrangeana.

7.2

Experimentos computacionais com as heurísticas baseadas em metaheurísticas

Neste seção são apresentados os experimentos que objetivam averiguar a qualidade das soluções geradas a partir das heurísticas híbrida e do tipo GRASP propostas e a robutez destes métodos, assim como realizar com-

parações, quando possível, com os resultados obtidos a partir dos algoritmos existentes na literatura.

7.2.1

Experimento com o segundo filtro do algoritmo híbrido

O objetivo deste filtro é especificar em quais soluções a busca local será aplicada após uma perturbação realizada no algoritmo híbrido. A busca local será aplicada a uma solução proveniente de uma perturbação, somente se o valor desta solução está a uma distância percentual menor ou igual ao valor especificado neste filtro. Este filtro recebe um valor inicial que é modificado, como explicado no Capítulo 6, a medida que o algoritmo evolui. Neste experimento avalia-se qual deve ser o valor percentual inicial para este filtro. A escolha do percentual inicial foi feita com base em alguns testes apresentados na Tabela 7.4. Nestes testes, um subconjunto de instâncias dos Grupos 1, 2 e 3 é utilizado. Estas instâncias foram escolhidas aleatoriamente. Uma única execução foi realizada para cada instância.

				Percentuais iniciais			
	$ V $	$ E $	D	5%	10%	15%	20%
Grupo 1	25	300	4	500	500	500	500
	20	50	4	442	442	442	442
	60	150	5	990	983	989	989
Grupo 2	60	600	5	967	967	967	967
			6	158	156	155	155
			4	128	127	124	124
Grupo 3	70	2415	7	7,23	7,24	7,23	7,23
			7	7,09	7,10	7,08	7,08
			7	7,26	7,26	7,25	7,26

Tabela 7.4: Resultados dos testes do filtro utilizado na perturbação.

Os valores em negrito na Tabela 7.4 indicam os melhores custos encontrados. No subconjunto de instâncias testadas, os percentuais iniciais 15% e 20% apresentaram em geral resultados melhores do que 5% e 10% para as instâncias avaliadas. Escolheu-se 15% porque este valor produz bons resultados.

7.2.2

Experimentos comparativos entre os algoritmos GRASP e híbrido

Neste experimento, são observadas a média e as melhores soluções produzidas pelos algoritmos do tipo GRASP e híbrido propostos para as instâncias dos Grupos 1, 2 e 3.

Para cada um dos métodos testados, foram realizadas cinco execuções, utilizando sementes diferentes. A melhor solução é aquela de menor custo

encontrada dentre todas as execuções. A média aritmética dos valores das melhores soluções geradas em cada execução é fornecida.

O critério de parada utilizado para ambos algoritmos é o tempo de execução. Uma execução de cada algoritmo foi realizada para cada instância e guardou-se o maior tempo atingido por um dos algoritmos testados para serem executadas 500 iterações. Para as instâncias maiores da OR-Library de 500 e 1000 nós em grafos completos, também foram observados os tempos consumidos pelos algoritmos da literatura [56] para executar essas instâncias. Neste caso, tomou-se o maior tempo de execução entre os utilizados na literatura ou o tempo de executar as 500 iterações.

Em uma execução, foram fornecidos para cada algoritmo 0,10, 0,40, 0,50 e um segundo de tempo de execução para cada instância de grafos completos do Grupo 1 com 10, 15, 20 e 25 nós, respectivamente. Nas instâncias esparsas deste grupo, os tempos de execução foram fixados em 5, 10 e 20 segundos para cada instância de 20, 40 e 60 nós, respectivamente. Foram dados para cada algoritmo e cada instância do Grupo 2 de 40 e 60 nós, 10 e 50 segundos de tempo de execução, respectivamente. Os tempos de execução foram fixados em 10, 50, 200, 1500, 3000 e 4500 segundos para as instâncias do Grupo 3 de 50, 70, 100, 250, 500 e 1000 nós, respectivamente. Esses tempos não incluem a leitura e saída de dados.

Os resultados destes experimentos são apresentados nas Tabelas 7.5 a 7.7. São dados, para cada instância, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro. Cada linha corresponde a uma instância diferente. Os valores das soluções ótimas O^* são dados para as instâncias dos Grupos 1 e 2. Para as instâncias do Grupo 3, a melhor solução conhecida antes deste trabalho é indicada na coluna S^* . As diferenças percentuais relativas $diff.$, utilizadas nas heurísticas lagrangeanas, são também fornecidos para as heurísticas baseadas em metaheurísticas.

Os algoritmos do tipo GRASP e híbrido apresentam desempenhos parecidos para as instâncias do Grupo 1. Observa-se na Tabela 7.5 que os dois algoritmos desenvolvidos conseguem encontrar os valores ótimos para 41 das 42 instâncias do Grupo 1. A partir das médias é possível observar ainda que, nas cinco execuções, os métodos encontraram soluções ótimas para 40 instâncias. Vale ressaltar que os algoritmos exatos consomem um tempo de processamento elevado para resolver instâncias como as do Grupo 1. Por isto, é importante dispor de métodos aproximados para resolvê-las.

Os resultados para as instâncias do Grupo 2 são apresentados na Tabela 7.6. As melhores soluções encontradas pelo algoritmo do tipo GRASP e híbrido estão respectivamente a no máximo 6% e 1,5% do valor ótimo. Os algoritmos do tipo GRASP e híbrido atingiram valores ótimos para respecti-

$ V $	$ E $	D	O^*	GRASP			Híbrido		
				melhor	<i>dif.</i> (%)	média	melhor	<i>dif.</i> (%)	média
10	45	4	252	252	0,0%	252,0	252	0,0%	252,0
		5	230	230	0,0%	230,0	230	0,0%	230,0
		6	221	221	0,0%	221,0	221	0,0%	221,0
		7	203	203	0,0%	203,0	203	0,0%	203,0
		8	232	232	0,0%	232,0	232	0,0%	232,0
		9	254	254	0,0%	254,0	254	0,0%	254,0
		10	254	254	0,0%	254,0	254	0,0%	254,0
15	105	4	346	346	0,0%	346,0	346	0,0%	346,0
		5	331	331	0,0%	331,0	331	0,0%	331,0
		6	314	314	0,0%	314,0	314	0,0%	314,0
		7	303	303	0,0%	303,0	303	0,0%	303,0
		8	240	240	0,0%	240,0	240	0,0%	240,0
		9	290	290	0,0%	290,0	290	0,0%	290,0
		10	286	286	0,0%	286,0	286	0,0%	286,0
20	190	4	349	349	0,0%	349,0	349	0,0%	349,0
		5	414	414	0,0%	414,0	414	0,0%	414,0
		6	298	298	0,0%	298,0	298	0,0%	298,0
		7	333	333	0,0%	333,0	333	0,0%	333,0
		8	331	331	0,0%	331,0	331	0,0%	331,0
		9	327	327	0,0%	327,8	327	0,0%	327,0
		10	324	324	0,0%	324,4	324	0,0%	324,4
25	300	4	500	500	0,0%	500,0	500	0,0%	500,0
		5	429	429	0,0%	429,0	429	0,0%	429,0
		6	378	378	0,0%	378,0	378	0,0%	378,0
		7	408	408	0,0%	408,0	408	0,0%	408,0
		8	369	369	0,0%	369,4	369	0,0%	369,0
		9	336	336	0,0%	336,0	336	0,0%	336,0
		10	379	379	0,0%	379,0	379	0,0%	379,0
20	50	4	442	442	0,0%	442,0	442	0,0%	442,0
		5	381	381	0,0%	381,0	381	0,0%	381,0
		6	329	329	0,0%	329,0	329	0,0%	329,0
		7	362	362	0,0%	362,0	362	0,0%	362,0
		8	366	366	0,0%	366,0	366	0,0%	366,0
		9	362	362	0,0%	362,0	362	0,0%	362,0
		10	359	359	0,0%	359,0	359	0,0%	359,0
40	100	4	755	755	0,0%	755,0	755	0,0%	755,0
		5	729	729	0,0%	729,0	729	0,0%	729,0
		6	599	599	0,0%	599,0	599	0,0%	599,0
		7	667	667	0,0%	667,4	667	0,0%	667,4
		8	580	580	0,0%	580,0	580	0,0%	580,0
		9	552	552	0,0%	552,0	552	0,0%	552,0
60	150	5	968	981	1,3%	982,6	983	1,6%	990,6

Tabela 7.5: Resultados do segundo experimento para o Grupo 1.

vamente cinco e oito instâncias das 12 deste grupo. Observou-se que o algoritmo híbrido obteve melhores valores das médias do que o algoritmo do tipo GRASP para dez instâncias. Os resultados obtidos indicam que o algoritmo híbrido apresenta um desempenho melhor do que o GRASP para as instâncias deste grupo.

V	E	D	O*	GRASP			Híbrido		
				melhor	dif. (%)	média	melhor	dif. (%)	média
40	400	5	612	612	0,0%	612,0	612	0,0%	613,6
		7	527	527	0,0%	531,8	527	0,0%	530,2
		9	495	496	0,2%	498,0	495	0,0%	495,4
		5	253	253	0,0%	254,0	253	0,0%	253,0
		7	171	171	0,0%	171,8	171	0,0%	171,0
		9	154	154	0,0%	154,0	154	0,0%	154,0
60	600	5	965	967	0,2%	970,4	965	0,0%	966,6
		7	789	799	1,3%	803,2	796	0,9%	800,4
		9	738	748	1,4%	748,6	741	0,4%	744,4
		5	256	261	2,0%	262,4	257	0,4%	257,8
		7	150	159	6,0%	163,2	152	1,3%	155,0
		9	124	129	4,0%	131,0	124	0,0%	126,0

Tabela 7.6: Resultados do segundo experimento para o Grupo 2.

Os resultados para as instâncias do Grupo 3 são apresentados na Tabela 7.7. Comparando-se os resultados obtidos pela heurística GRASP e pelo algoritmo híbrido, constata-se que o híbrido encontrou soluções melhores do que as obtidas pela heurística GRASP em 26 de um total de 30 instâncias. Em relação aos valores das médias dos custos, o híbrido também obteve 26 melhores resultados do que os produzidos pelo GRASP. A heurística GRASP e o algoritmo híbrido encontraram o mesmo valor da função objetivo para quatro instâncias.

Embora não seja possível realizar uma comparação direta entre os algoritmos propostos nesta tese e os algoritmos descritos na literatura, observa-se que a partir dos métodos desenvolvidos foi possível aprimorar as melhores soluções relatadas na literatura para algumas instâncias. O algoritmo do tipo GRASP encontrou para quatro instâncias os melhores valores apresentados na literatura e conseguiu conhecer sete novas melhores soluções. Já o algoritmo híbrido, encontrou 11 melhores soluções do que as melhores existentes na literatura e atingiu os melhores valores apresentados na literatura para quatro instâncias. Todos esses valores encontram-se em negrito na Tabela 7.7. Nas instâncias em que não foram atingidas as melhores conhecidas S^* , os algoritmos do tipo GRASP e híbrido encontraram soluções cujo valor está a no máximo 4,5% e 2,5% do valor de S^* , respectivamente.

$ V $	$ E $	D	id	S^*	GRASP			Híbrido		
					melhor	$diff.$ (%)	média	melhor	$diff.$ (%)	média
50	1225	5	1	7,60	7,60	0,0%	7,60	7,60	0,0%	7,60
			2	7,68	7,63	-0,6%	7,65	7,61	-0,9%	7,62
			3	7,24	7,24	0,0%	7,24	7,24	0,0%	7,24
			4	6,59	6,59	0,0%	6,59	6,59	0,0%	6,59
			5	7,32	7,25	-1,0%	7,25	7,25	-1,0%	7,25
70	2415	7	1	7,23	7,24	0,1%	7,25	7,23	0,0%	7,23
			2	7,12	7,14	0,3%	7,15	7,08	-0,6%	7,08
			3	6,99	7,05	0,9%	7,07	6,98	-0,1%	6,99
			4	7,52	7,52	0,0%	7,55	7,50	-0,3%	7,51
			5	7,27	7,28	0,1%	7,29	7,25	-0,3%	7,25
100	4950	10	1	7,76	7,89	1,6%	7,94	7,83	1,0%	7,88
			2	7,85	7,98	1,7%	8,01	7,94	1,2%	7,96
			3	7,90	8,06	2,0%	8,08	7,98	0,9%	8,00
			4	7,98	8,11	1,7%	8,17	8,04	0,8%	8,08
			5	8,17	8,29	1,6%	8,33	8,21	0,5%	8,22
250	31125	15	1	12,30	12,67	3,0%	12,69	12,45	1,2%	12,53
			2	12,02	12,42	4,0%	12,52	12,31	2,4%	12,36
			3	12,04	12,40	2,2%	12,45	12,13	0,8%	12,18
			4	12,51	120,94	3,5%	12,99	12,70	1,5%	12,75
			5	12,28	12,73	3,7%	12,76	12,44	1,3%	12,51
500	124750	20	1	16,97	17,59	4,2%	17,69	17,20	1,4%	17,25
			2	16,88	17,39	2,7%	17,46	17,06	1,1%	17,25
			3	16,98	17,58	3,3%	17,63	17,22	0,9%	17,28
			4	16,99	17,59	3,6%	17,65	17,24	1,5%	17,31
			5	16,57	17,21	4,5%	17,32	16,94	2,5%	17,02
1000	499500	25	1	25,18	24,84	-1,3%	25,06	24,66	-2,0%	24,83
			2	25,02	24,75	-1,1%	24,88	24,46	-2,2%	24,77
			3	24,82	24,33	-1,9%	24,59	24,32	-2,0%	24,56
			4	25,29	24,76	-2,1%	24,92	24,61	-2,7%	24,71
			5	25,03	24,50	-2,1%	24,67	24,27	-3,0%	24,50

Tabela 7.7: Resultados do segundo experimento para o Grupo 3.

As Figuras 7.1 e 7.2 ilustram exemplos de árvores encontradas, respectivamente, para os casos par e ímpar. A Figura 7.1 representa uma solução para a instância de 40 nós e diâmetro 4 do Grupo 1. A Figura 7.2 corresponde a uma solução para a primeira instância de 250 nós do Grupo 3 e diâmetro 15. Duas visões dessas árvores são fornecidas. Na primeira, a solução é apresentada no plano, utilizando as coordenadas associadas a cada nó do grafo. Na segunda, a árvore encontra-se desenhada por níveis de profundidade a partir do nó central no caso par (resp. da extremidade da aresta central no caso ímpar). Ressalta-se que o nó central está no nível 0, assim como as extremidades da aresta central.

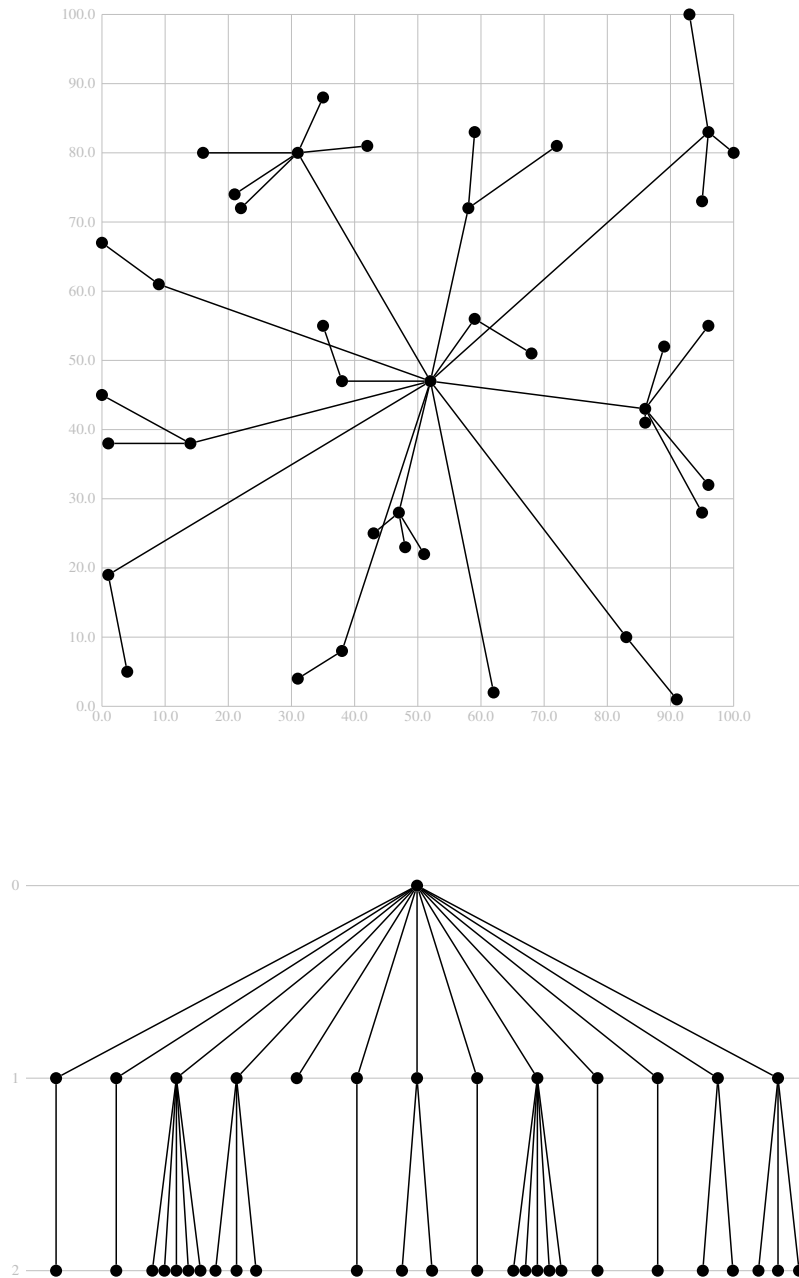


Figura 7.1: Exemplos de uma solução para o caso D par.

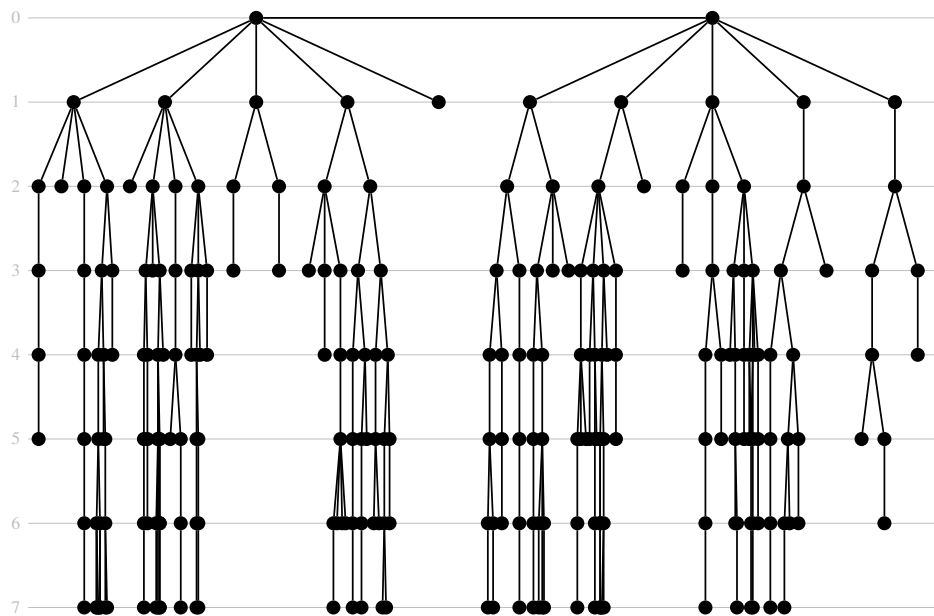
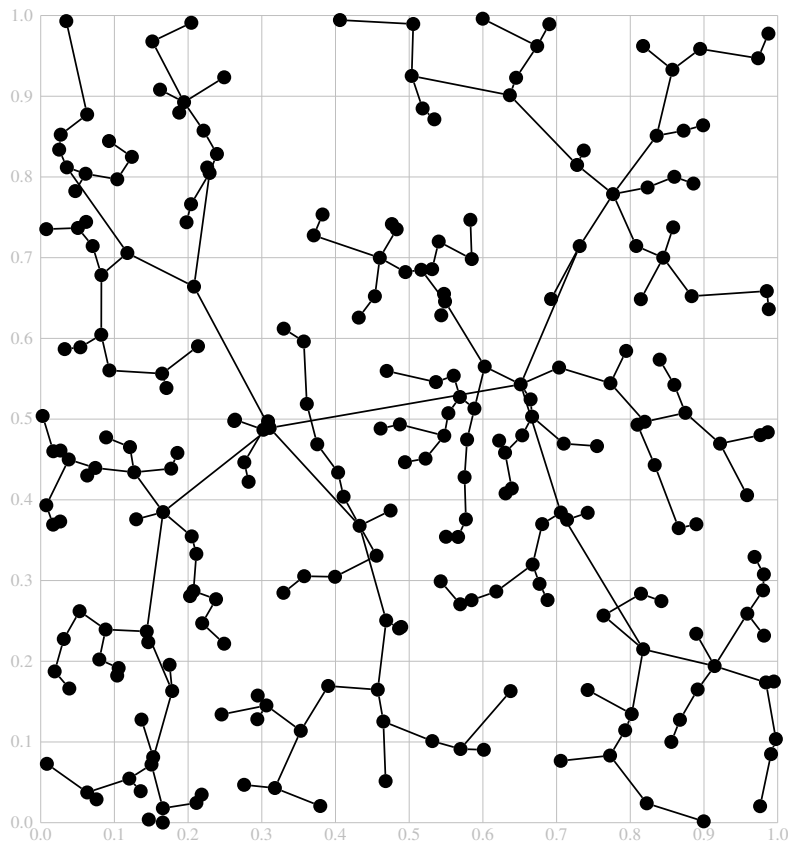


Figura 7.2: Exemplos de uma solução para o caso D ímpar.

7.2.3

Experimentos sobre a distribuição de probabilidade do tempo para alcançar um valor alvo

O objetivo deste experimento é comparar os algoritmos do tipo GRASP e híbrido desenvolvidos. Gráficos propostos em [5] foram utilizados como metodologia para a comparação dos algoritmos do tipo GRASP e híbrido desenvolvidos. Para realizar este experimento, os algoritmos foram programados para encerrar suas execuções tão logo encontrem uma solução com custo menor ou igual a um valor alvo estabelecido. As heurísticas propostas foram executadas 200 vezes para cada alvo, utilizando-se sementes diferentes para o gerador de números aleatórios. Em seguida, os gráficos foram feitos da seguinte maneira: cada ponto da curva associada a um algoritmo representa o par (t_i, P_i) ($i = 1, \dots, 200$), onde t_i é o tempo de processamento da i -ésima execução mais rápida do algoritmo considerado e $P_i = (i - 0,5)/200$. Estes gráficos indicam uma aproximação da distribuição de probabilidade da variável tempo para alcançar uma solução menor ou igual ao valor alvo. Quanto mais à esquerda está a curva de um algoritmo, mais rapidamente ele converge para o valor alvo. Além disto, quanto menor for a diferença de tempo entre a execução mais rápida e a mais lenta, mais robusto é o algoritmo.

Foram tratadas dez instâncias neste experimento, sendo cinco do Grupo 2 e as demais do Grupo 3. Nas instâncias do Grupo 2, foram utilizados quatro alvos para cada instância. Já para as instâncias do Grupo 3, utilizaram-se apenas dois alvos. Os gráficos mostrados nesta seção apresentam um comportamento similar ao encontrado nas outras instâncias testadas. As Figuras 7.3 e 7.4 apresentam os resultados obtidos para a instância de 60 nós do Grupo 2, cujo valor ótimo é 124. Os quatro alvos estabelecidos foram 131, 130, 129 e 128. Os alvos mais distante e mais próximo do ótimo estão, respectivamente, a 5,64% e 3,22% do valor ótimo. Por esses gráficos, observa-se que o algoritmo híbrido atingiu os alvos estabelecidos mais rapidamente do que o algoritmo do tipo GRASP. Observa-se que existem diferenças de tempos consideráveis entre a execução mais rápida e mais lenta para os dois algoritmos. A medida que os alvos tornam-se mais fáceis e distanciam-se do valor ótimo, essas diferenças de tempos são reduzidas.

A Figura 7.5 apresenta os resultados obtidos para a terceira instância de 70 nós do Grupo 3. Os alvos estabelecidos foram 7,06 e 7,12. As curvas apresentadas nestes gráficos relativas aos resultados obtidos pelo algoritmo híbrido indicam que seu desempenho é melhor do que os resultados do algoritmo GRASP.

Nos testes realizados, as curvas dos algoritmos se interceptaram apenas quando os alvos eram muito fáceis. Nos outros casos, as curvas relativas aos

resultados do algoritmo híbrido estão à esquerda das curvas produzidas pela heurística do tipo GRASP.

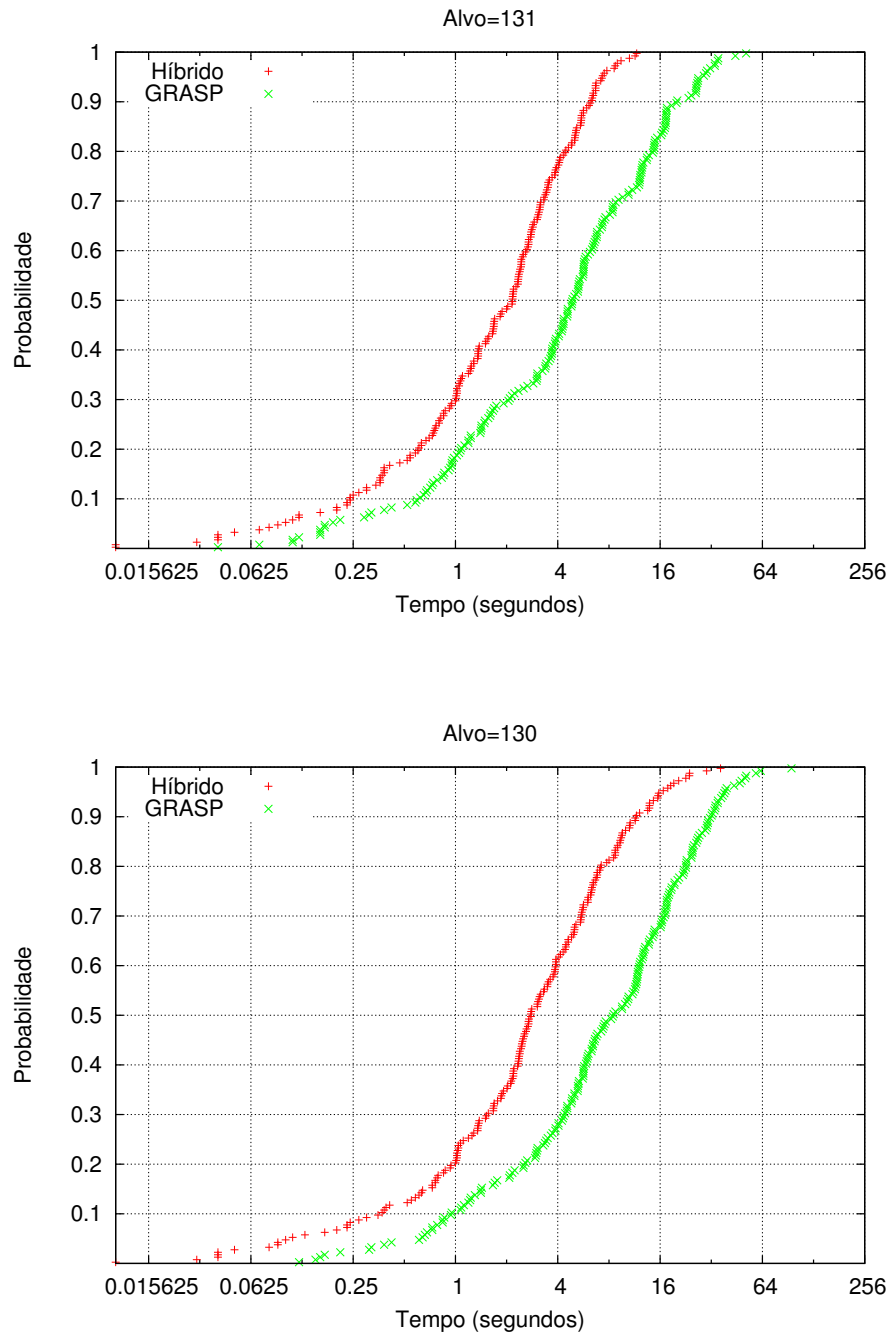


Figura 7.3: Distribuição de probabilidade no tempo (Grupo 2 – alvos 131 e 130).

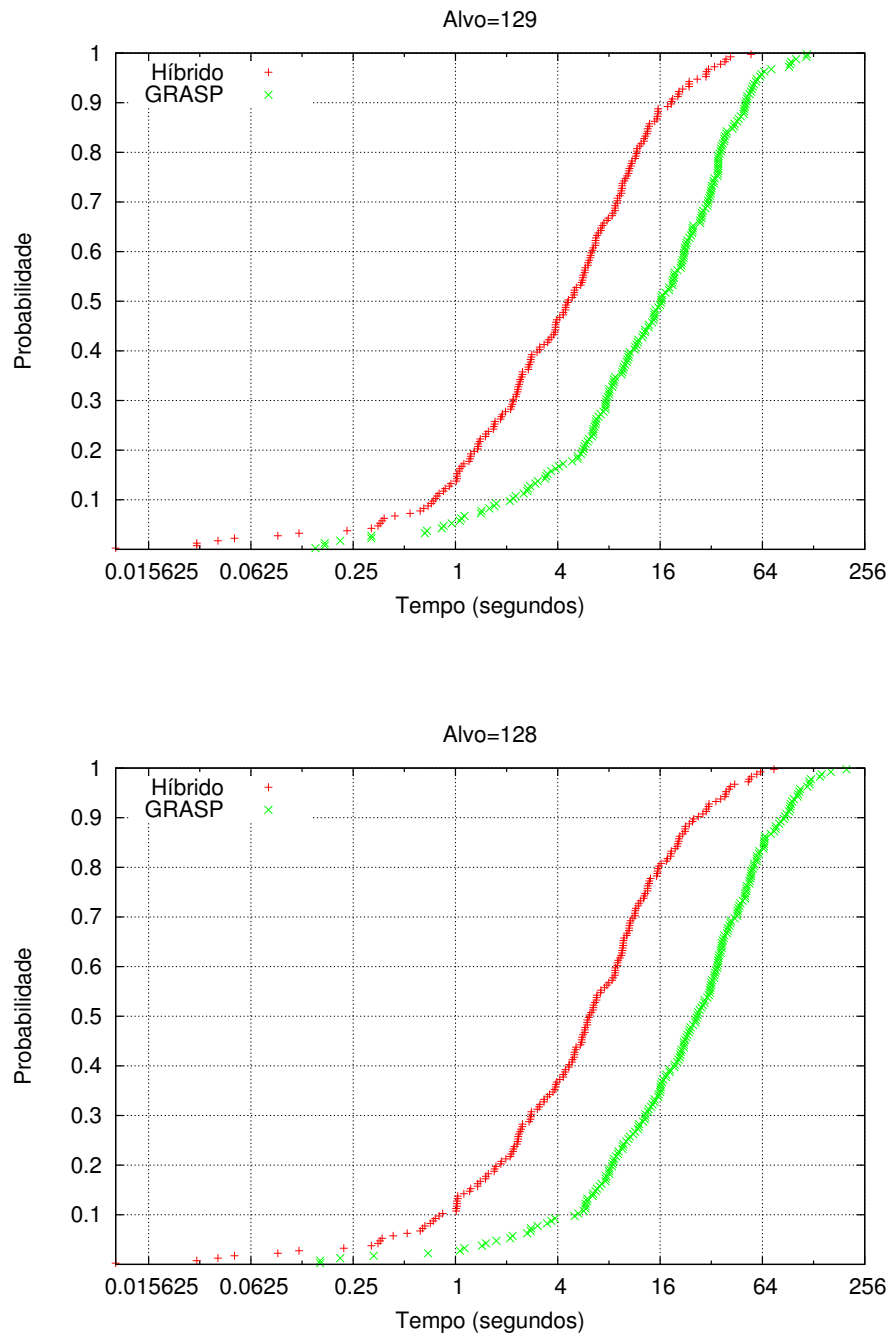


Figura 7.4: Distribuição de probabilidade no tempo (Grupo 2 – alvos 129 e 128).

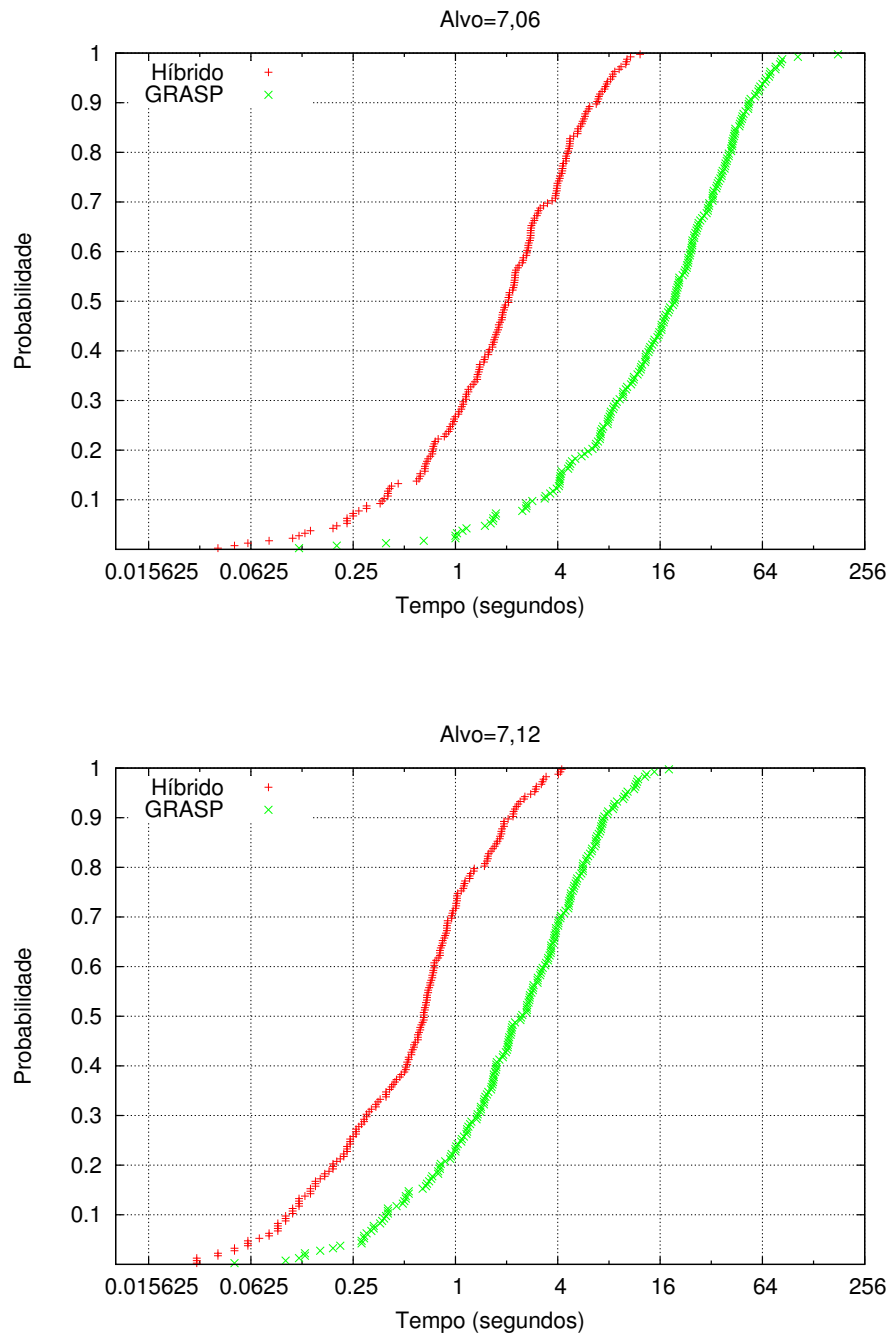


Figura 7.5: Distribuição de probabilidade no tempo (Grupo 3 – alvos 7,06 e 7,12).

7.2.4

Experimento com as perturbações do algoritmo híbrido

O objetivo deste experimento é mostrar a influência das perturbações DCV e SAR na qualidade dos resultados produzidos pelo algoritmo híbrido.

O algoritmo híbrido foi ajustado e executado utilizando cada uma das duas perturbações, sem nenhuma delas e também empregando as duas alternadamente como proposto no Capítulo 6. Para cada uma dessas situações, uma única execução foi realizada utilizando uma amostra de instâncias dos Grupos 2 e 3.

Nas Tabelas 7.8 e 7.9 encontram-se os valores dos custos das soluções obtidas. São dados nestas tabelas, para cada instância, a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro. Cada linha corresponde a uma instância diferente. A coluna “Somente DCV” indica que apenas a perturbação DCV foi utilizada dentro do algoritmo híbrido. Na coluna “Somente SAR” estão os resultados obtidos aplicando-se apenas a perturbação SAR. Nas colunas “Sem perturbações” e “com DCV e SAR” encontram-se respectivamente os resultados quando nenhuma das duas perturbações é utilizada e quando as duas são empregadas alternadamente. Os valores das soluções ótimas para as instâncias do Grupo 2 são apresentados na coluna O^* da Tabela 7.8. Os identificadores de cada instância do Grupo 3 utilizada e os valores da melhor solução conhecida são mostrados respectivamente nas colunas id e S^* da Tabela 7.9.

$ V $	$ E $	D	O^*	Somente DCV	Somente SAR	Sem perturbações	Com DCV e SAR
40	400	5	253	254	253	264	253
		7	171	171	171	181	171
60	600	5	965	987	985	991	983
		7	789	818	812	818	805
		9	124	131	134	134	128

Tabela 7.8: Resultados dos testes com as perturbações para o Grupo 2.

$ V $	$ E $	D	id	S^*	Somente DCV	Somente SAR	Sem DCV e SAR	Com DCV e SAR
50	1225	5	3	7,24	7,26	7,24	7,26	7,24
70	2415	7	3	6,99	7,11	7,00	7,15	7,00
100	4950	10	1	7,76	7,93	7,91	7,96	7,89
			4	7,98	8,14	8,08	8,23	8,09
			5	8,17	8,33	8,23	8,35	8,24

Tabela 7.9: Resultados dos testes com as perturbações para o Grupo 3.

Comparando-se os resultados obtidos quando utiliza-se isoladamente cada uma das perturbações, observa-se que a perturbação SAR consegue melhores resultados que DCV. A perturbação SAR não obteve melhor resultado que a DCV em apenas uma instância do Grupo 2. Constata-se ainda, que a qualidade dos resultados é pior quando nenhuma das perturbações é aplicada.

Dentre as situações avaliadas, conclui-se que aplicar as perturbações alternadamente produz resultados em geral melhores que a utilização isolada da perturbação SAR.

7.3

Conclusões

Neste capítulo foram realizados experimentos com as heurísticas lagrangeanas, a heurística GRASP e o algoritmo híbrido propostos.

Heurísticas lagrangeanas foram desenvolvidas utilizando OTT e OTT-M2 para o cálculo de soluções viáveis. Duas estratégias foram desenvolvidas, considerando os custos lagrangeanos e os custos complementares. Para o Grupo 1, as heurísticas HL2 e HC2 obtiveram os melhores resultados. Nos Grupos 2 e 3, a heurística HL2 apresentou melhor desempenho que as demais. Uma solução melhor do que a relatada na literatura foi encontrada por HL2 para o Grupo 3. Constatou-se que a heurística lagrangeana que utiliza OTT-M2 para geração de soluções viáveis produziu os melhores resultados, em geral, para os Grupos 1, 2 e 3. As heurísticas lagrangeanas tiveram altos tempos de processamento em virtude dos tempos requeridos para a execução da relaxação lagrangeana.

O desempenho dos algoritmos do tipo GRASP e híbrido foi avaliado para as instâncias dos Grupos 1, 2 e 3. Para o Grupo 1 de instâncias, os dois algoritmos alcançaram os valores ótimos para 40 das 42 instâncias. No Grupo 2, foram atingidas cinco e oito soluções ótimas utilizando os algoritmos do tipo GRASP e híbrido, respectivamente. Foram encontradas sete e 11 melhores soluções do que as melhores relatadas na literatura para o Grupo 3, utilizando-se os algoritmos do tipo GRASP e híbrido, respectivamente. Os algoritmos atingiram ainda quatro soluções tão boas quanto as encontradas na literatura. Para as outras instâncias deste grupo, os algoritmos do tipo GRASP e híbrido encontraram, respectivamente, soluções a no máximo 4,5% e 2,5% do valor das melhores soluções conhecidas. A partir dos resultados obtidos nos experimentos realizados, constata-se que para os grupos de instâncias avaliados, o algoritmo híbrido é melhor do que o algoritmo do tipo GRASP.