

3

Extensões dos modelos matemáticos

Os modelos matemáticos definidos por (2-1)–(2-6) e (2-7)–(2-13), propostos por Achuthan e Caccetta e apresentados no Capítulo 2, são reforçados neste trabalho através da utilização de restrições válidas. A estratégia empregada é chamada de *lifting*. Esta técnica, na forma aqui utilizada, é descrita por exemplo em Desrochers e Laporte [21].

Inicialmente, é proposta uma formulação alternativa para o caso ímpar. Além disto, as inequações consideradas em [21] para o *lifting* são adaptadas ao AGMD e em seguida aplicadas às inequações (2-4) e (2-10). Outras desigualdades válidas também são geradas para esses modelos.

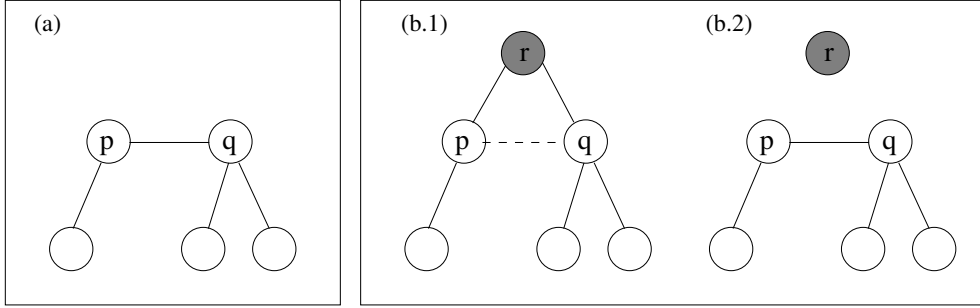
3.1

Uma formulação alternativa para o caso D ímpar

O modelo proposto em [2, 3] para o caso ímpar seleciona uma aresta em E para ser o centro da árvore e simultaneamente constrói uma rede que envia fluxo das extremidades da aresta central para os outros nós da árvore. A Figura 3.1-(a) ilustra uma solução obtida para $D = 3$. A aresta $[p, q]$ é a aresta central e os outros nós estão no máximo a uma distância $L = (D - 1)/2 = 1$ da extremidade mais próxima, p ou q .

Uma formulação alternativa que utiliza um vértice artificial r , como no caso par, também é possível para o caso ímpar. No caso par, o vértice artificial r é conectado somente a um vértice de V , ou seja, à raiz da árvore geradora. No caso ímpar, o nó artificial r deve ser conectado a exatamente dois vértices. Esses vértices correspondem às extremidades da aresta central. A escolha da aresta central pode ser modelada implicitamente garantindo que as arestas $[p, r]$ e $[q, r]$ estejam na solução. Uma ilustração desse esquema é apresentado na Figura 3.1-(b.1). Uma árvore geradora viável T de G é obtida após a eliminação das duas arestas incidentes a r , conectando suas extremidades através da aresta central $[p, q]$, ver Figura 3.1-(b.2).

No modelo definido por (3-1) a (3-11), as variáveis binárias x_{ij} associadas a cada arco $(i, j) \in A'$ identificam a árvore geradora. As variáveis não negativas u_i são associadas a cada vértice $i \in V'$ e representam a profundidade de i em relação à raiz. A profundidade da raiz é 0. As variáveis binárias z_{ij}

Figura 3.1: Solução para AGMD caso ímpar com $D = 3$.

associadas a cada aresta $[i, j] \in E$, com $i < j$, identificam a aresta escolhida como aresta central da árvore geradora. São introduzidas variáveis adicionais x_{ri} , para todo $i \in V$, que representam as arestas associadas ao nó artificial r . Uma aresta $[i, j] \in E$ é selecionada como aresta central da árvore geradora se e somente se as arestas $[r, i]$ e $[r, j]$ também são selecionadas. Essa condição é garantida pela equação não linear $z_{ij} = x_{ri} \cdot x_{rj}$ ou pela sua conveniente linearização. A linearização deste tipo de estrutura foi estudada em [54]. O modelo resultante é descrito por:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{[i,j] \in E} c_{ij} z_{ij} \quad (3-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in V} x_{rj} = 2, \quad (3-2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A'} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V, \quad (3-3)$$

$$\sum_{[i,j] \in E} z_{ij} = 1, \quad (3-4)$$

$$z_{ij} \geq x_{ri} + x_{rj} - 1 \quad \forall [i, j] \in E, \quad (3-5)$$

$$z_{ij} \leq x_{ri} \quad \forall [i, j] \in E, \quad (3-6)$$

$$z_{ij} \leq x_{rj} \quad \forall [i, j] \in E, \quad (3-7)$$

$$u_i - u_j + (L + 1)x_{ij} \leq L \quad \forall (i, j) \in A', \quad (3-8)$$

$$0 \leq u_i \leq L + 1 \quad \forall i \in V, \quad (3-9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A', \quad (3-10)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall [i, j] \in E. \quad (3-11)$$

A equação (3-2) garante que o nó artificial r está conectado a exatamente dois vértices de V . As restrições (3-3) asseguram que existe apenas um arco

incidente a cada vértice de V . As restrições (3-5) a (3-7) correspondem à linearização da equação $z_{ij} = x_{ri} \cdot x_{rj}$ para toda aresta $[i, j] \in E$. As restrições (3-8) e (3-9) garantem que os caminhos do nó artificial r para todos os vértices $i \in V$ contêm no máximo $L + 1$ arcos. As restrições (3-10) e (3-11) estabelecem respectivamente a integralidade das variáveis x e z .

Esse modelo contém $O(|E| + |V|)$ restrições, $O(|E| + |V|)$ variáveis inteiras e $O(|V|)$ variáveis contínuas.

3.2

Restrições válidas

Restrições válidas são obtidas para este modelo a partir da restrição (3-2). Multiplicando-se esta restrição pela variável x_{ri} ($i \in V$), tem-se:

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ri} \cdot x_{rj} + x_{ri} \cdot x_{ri} = 2 \cdot x_{ri}. \quad (3-12)$$

Como todas as variáveis em (3-12) são binárias, então $x_{ri} = x_{ri} \cdot x_{ri}$.

Conseqüentemente,

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ri} \cdot x_{rj} = x_{ri}, \forall i \in V. \quad (3-13)$$

Sendo $z_{ij} = x_{ri} \cdot x_{rj}$ para toda aresta $[i, j] \in E$, então x_{ri} e x_{rj} não podem ser simultaneamente iguais a 1, se a aresta $[i, j]$ não existe em E . Então, as restrições (3-14) são válidas para o modelo (3-1)–(3-11):

$$\sum_{[i,j] \in E: i < j} z_{ij} + \sum_{[j,i] \in E: j < i} z_{ji} = x_{ri} \quad \forall i \in V. \quad (3-14)$$

Observa-se que as restrições (3-14) são redundantes para a formulação (3-1)–(3-11), mas não necessariamente para sua relaxação linear.

3.3

Lifting

Um *lifting* é realizado nas inequações $u_i - u_j + (L + 1)x_{ij} \leq L, \forall (i, j) \in A'$, de Miller-Tucker-Zemlin [53]. A idéia de *lifting* consiste em adicionar um termo não negativo $\alpha_{ji} \cdot x_{ji}$ a essas inequações, transformando-as em:

$$u_i - u_j + (L + 1)x_{ij} + \alpha_{ji} \cdot x_{ji} \leq L. \quad (3-15)$$

Quanto maior o valor de α_{ji} , maior será a redução no espaço de soluções.

Se $x_{ji} = 0$, então α_{ji} pode assumir qualquer valor. Supondo-se que $x_{ji} = 1$, então $u_i = u_j + 1$ quando o caminho do vértice central no caso par (resp. da extremidade mais próxima da aresta central no caso ímpar) para o vértice $i \in V$ passa por j antes de visitar i . Além disto, se $x_{ji} = 1$, então necessariamente $x_{ij} = 0$ devido às restrições (2-3) ou (2-9). Substituindo-se esses valores em (3-15), obtém-se: $u_i - u_j + \alpha_{ji}x_{ji} \leq L$. Dessa forma,

$1 + u_j - u_j + \alpha_{ji} \leq L$ e, conseqüentemente, $\alpha_{ji} \leq L - 1$. Para maximizar o valor de α_{ji} , toma-se $\alpha_{ji} = L - 1$. Então,

$$u_i - u_j + (L + 1)x_{ij} + (L - 1)x_{ji} \leq L. \quad (3-16)$$

Para o caso par, as desigualdades (3-16) são válidas para todo $(i, j) \in A'$ quando $D > 2$. Para o caso ímpar, essas desigualdades são válidas para todo $(i, j) \in A$ quando $D > 3$.

Limites superiores generalizados também podem ser obtidos para as variáveis u_i , $i \in V$. No caso par, existe um nó artificial r tal que $u_r = 0$. O vértice central conectado a r será necessariamente o primeiro vértice a ser visitado em qualquer caminho partindo de r . Então,

$$u_i \leq (L + 1) - L \cdot x_{ri} \quad \forall i \in V. \quad (3-17)$$

Além disto, $u_i \leq L$ para todo vértice $i \in V$ que não é uma folha da árvore. Então,

$$u_i \leq (L + 1) - x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3-18)$$

Para o caso ímpar, se a aresta central é $[i, j] \in E$, então $z_{ij} = 1$, $u_i = 0$, e $u_j = 0$. Conseqüentemente,

$$u_i \leq L - L \cdot z_{ij} \quad \forall [i, j] \in E. \quad (3-19)$$

Analogamente, para o caso ímpar, $u_i < L$ para todo vértice $i \in V$ que não é uma folha da árvore geradora. Então,

$$u_i \leq L - x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (3-20)$$

As inequações (3-17) e (3-18) definem limites superiores generalizados para o caso D par. As desigualdades (3-19) e (3-20) correspondem a limites superiores generalizados para o caso D ímpar.

Foram obtidos limites inferiores generalizados para as variáveis u_i , $i \in V$. No caso par, $u_i \geq 1 \geq x_{ri}$ para todo $i \in V$. Se i não está diretamente conectado ao vértice central, então $x_{ri} = 0$ e $u_i \geq 2$. Se essas duas condições são consideradas simultaneamente, é obtido o seguinte limite inferior:

$$u_i \geq x_{ri} + 2 \cdot \sum_{j \in V: j \neq r} x_{ji} \quad \forall i \in V. \quad (3-21)$$

A condição é mais simples para o caso ímpar, onde existe uma aresta central:

$$u_i \geq \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ji} \quad \forall i \in V. \quad (3-22)$$

3.4

Experimentos computacionais

Os principais objetivos desses experimentos computacionais são observar se a inserção das desigualdades válidas nos modelos originais de Achuthan permite resolver instâncias maiores (ou obter tempos menores) e se o modelo alternativo é competitivo com as versões originais.

Os experimentos computacionais foram realizados em um Pentium IV com relógio de 2.0 GHz e 512 Mbytes de memória RAM. Foi utilizado o resolvidor CPLEX 9.0 com o modo padrão de execução.

3.4.1

Grupos de instâncias

Os experimentos desta tese foram realizados com três grupos de instâncias. Cada grupo de instância possui características particulares que são descritas a seguir.

O Grupo 1 contém instâncias usadas em [60], onde as instâncias de grafos esparsos contém de 20 a 60 nós, e as instâncias de grafos completos contém de 10 a 25 nós. O diâmetro nestas instâncias varia de 4 a 10. Os grafos foram gerados considerando-se que os nós estão distribuídos uniformemente em um quadrado de lado 100 no plano euclidiano. O custo de cada aresta é dado pelo maior inteiro menor ou igual à distância euclidiana entre as suas extremidades. Observou-se a quantidade de arestas utilizadas nos grafos em [28], então fixou-se um número total de arestas. Para gerar as instâncias esparsas, inicialmente, a estrela de menor custo é escolhida e as $|V| - 1$ arestas que a compõem fazem parte do grafo. As outras $|E| - |V| - 1$ arestas são aquelas de menor custo que não fazem parte da estrela de menor custo. Instâncias adicionais com diâmetro igual a oito também foram geradas dessa forma.

O Grupo 2 contém 12 instâncias de grafos esparsos usadas em [30, 58]. Seis dessas instâncias contém 40 nós e 400 arestas e as demais 60 nós e 600 arestas. Seis instâncias possuem custos gerados aleatoriamente e as outras seis foram geradas no plano euclidiano. Os valores de diâmetro utilizados são 5, 7 e 9. Essas instâncias são de difícil resolução mesmo por heurísticas. Tratam-se de instâncias com diâmetros ímpar, esparsas e com várias arestas com custos iguais. Por possuírem muitas arestas com custos iguais, nos algoritmos heurísticos gulosos, uma decisão por uma aresta dentre diversas de mesmo custo pode levar a soluções finais diferentes.

O Grupo 3 compõe-se de 30 instâncias em grafos completos provenientes da OR-Library e usadas em [32, 42, 56]. A biblioteca contém 15 instâncias para cada tamanho de grafo. Nesta tese, são utilizadas as cinco primeiras, contendo 50, 70, 100, 250, 500 e 1000 vértices. Os valores dos diâmetros utilizados são

5, 7, 10, 15, 20 e 25. A dificuldade deste grupo está nos valores atribuídos aos custos e no tamanho das instâncias. Os custos são valores próximos e fornecidos com oito casas decimais. Os resultados para estas instâncias são apresentados neste trabalho truncados na segunda casa decimal.

As maiores instâncias dos Grupos 2 e 3 não participaram dos experimentos dos modelos matemáticos em virtude da limitação existente. Até o momento, os modelos presentes na literatura não resolvem instâncias com mais de 60 nós. As instâncias dos Grupos 1 e 2 são utilizadas pela primeira vez em experimentos com algoritmos heurísticos para AGMD neste trabalho.

3.4.2

Resultados computacionais

Os resultados dos testes realizados com o Grupo 1 de instâncias para os casos D ímpar e D par são mostrados, respectivamente, nas Tabelas 3.1 e 3.2. Os resultados dos testes adicionais com o Grupo 2 encontram-se na Tabela 3.3. Para cada instância a quantidade $|V|$ de vértices, a quantidade $|E|$ de arestas e o valor D do diâmetro são dados respectivamente nas três primeiras colunas. Cada linha corresponde a uma instância diferente. Para cada formulação são dados o tempo de CPU consumido para encontrar a solução ótima (em segundos) e a quantidade de nós visitados na árvore de *branch-and-bound*. O símbolo “—” indica que ocorreram problemas de memória, não sendo possível finalizar as respectivas execuções no modo padrão do CPLEX.

Foram testados os modelos de Achuthan e Caccetta descritos no Capítulo 2, definidos por (2-1)–(2-6) no caso par e por (2-7)–(2-13) no caso ímpar, identificados nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 por formulação A. Os resultados obtidos com estas formulações reforçadas com restrições válidas estão indicados por formulação B. Essas restrições correspondem às desigualdades (3-14) e (3-16) e os respectivos limites generalizados para os casos par e ímpar apresentados nas equações (3-17) a (3-22).

Para o caso ímpar, realizou-se também experimentos com a formulação alternativa proposta neste capítulo, reforçada com as desigualdades válidas (3-14) e (3-16) e os limites generalizados (3-17), (3-18) e (3-21). Os resultados referentes aos experimentos com este modelo são identificados por formulação C.

Os resultados para as 19 instâncias da Tabela 3.1 mostram que a formulação B melhorou os tempos de processamento para 16 instâncias e reduziu a quantidade de nós visitados na árvore de *branch-and-bound* em 18 instâncias em relação à formulação A. A formulação C melhorou os tempos de processamento para 17 instâncias e reduziu o número de nós visitados na árvore de *branch-and-bound* para 18 instâncias em relação à formulação A.

As formulações B e C apresentaram resultados melhores do que os resultados obtidos com a formulação A. Quando os resultados obtidos com as formulações B e C são comparados, observa-se que a formulação C provou a otimalidade para 14 instâncias em tempos computacionais inferiores à formulação B e visitou uma quantidade menor de nós na árvore de *branch-and-bound* em 15 instâncias.

Os resultados para as 24 instâncias da Tabela 3.2 mostram que a formulação B provou a otimalidade em tempos computacionais menores em 23 instâncias e visitou uma quantidade menor de nós na árvore de *branch-and-bound* em relação à formulação A.

Testes adicionais realizados com o Grupo 2 são apresentados na Tabela 3.3. Nesta tabela, também são apresentados os resultados dos modelos propostos em [58]. Em [58] dois modelos foram avaliados, a partir do primeiro modelo, a otimalidade foi provada para seis das 12 instâncias deste grupo, sem problemas de memória. Já a partir do segundo modelo, a otimalidade foi provada para oito instâncias do Grupo 2, sem problemas de memória. Dentre os modelos apresentados em [58], o menor tempo consumido para provar a otimalidade para cada instância é apresentado na Tabela 3.3 na coluna identificada por formulação G. Os experimentos computacionais foram realizados em um Pentium IV 1.5 GHz com 128 Mbytes de memória RAM. O resolvidor utilizado foi o CPLEX versão 7.1.

Observa-se nos resultados da Tabela 3.3 que as formulações A, B e C conseguiram provar a otimalidade para três instâncias. Foram testadas três outras instâncias, mas a árvore de *branch-and-bound* cresceu muito. Por esta razão ocorreram problemas de memória que provocaram a suspensão da execução do algoritmo. As outras seis instâncias deste grupo não foram testadas. Para $D = 9$, as formulações B e C reduzem o tempo de processamento para provar a otimalidade em relação ao melhor resultado obtido em [58]. Fica clara ainda a dificuldade que os modelos de Achuthan reforçados possuem em provar a otimalidade para diâmetros pequenos. Vale ressaltar que, nos experimentos comparativos realizados por Gruber e Raidl em [32], relata-se que os modelos de Achuthan reforçados nesta tese foram os que provaram a otimalidade em tempos menores de processamento para diâmetros grandes dentre todos os modelos por eles avaliados.

$ V $	$ E $	D	Formulação A		Formulação B		Formulação C	
			tempo (s)	nós	tempo (s)	nós	tempo (s)	nós
10	45	5	0,14	85	0,16	62	0,13	28
		7	0,14	190	0,17	88	0,17	49
		9	0,05	40	0,10	73	0,08	10
15	105	5	40,95	73331	22,27	18640	31,22	21814
		7	85,13	163355	25,02	23226	19,23	16118
		9	76,14	146948	10,56	9597	7,80	6174
20	190	5	1686,17	1753713	272,00	132678	216,36	95813
		7	31,16	36168	8,39	3532	5,05	1519
		9	884,36	982551	151,50	85204	91,33	46559
25	300	5	–	–	73857,81	24309253	51551,80	17235497
		7	24513,01	15083987	20160,13	6225967	16617,61	5272473
		9	177024,22	66213391	9172,04	2438057	40183,44	12040315
20	50	5	39,78	93283	7,74	9386	5,58	3707
		7	39,06	68843	3,16	4908	2,23	1915
		9	70,12	128376	26,16	45561	40,28	57603
40	100	5	3596,34	3506756	780,74	688912	20,67	13993
		7	12581,45	12272065	976,98	849861	207,64	171846
		9	27735,56	23763469	4584,19	3530233	23359,05	15583400
60	150	5	–	–	215161,75	116775357	11644,75	5003876

Tabela 3.1: Resultados para as instâncias do Grupo 1 (caso D ímpar).

$ V $	$ E $	D	Formulação A		Formulação B	
			tempo (s)	nós	tempo (s)	nós
10	45	4	0,95	1849	0,77	1300
		6	0,13	55	0,08	7
		8	0,08	73	0,06	37
		10	0,06	29	0,08	17
15	105	4	65,80	73024	24,17	26711
		6	53,19	66834	32,53	41882
		8	81,98	124389	81,16	130228
		10	38,41	61822	8,95	11790
20	190	4	7462,10	4877014	1888,02	1091803
		6	1630,58	1210813	593,91	412770
		8	5331,31	3695322	2067,06	1351130
		10	2729,48	2285819	172,81	144382
25	300	4	—	—	158836,45	64913343
		6	43044,61	17498605	5194,90	2119161
		8	101505,45	42749938	30080,28	13280119
		10	1031,36	565737	459,88	205747
20	50	4	62,47	115144	0,64	615
		6	221,31	446477	10,81	16396
		8	43,00	102643	29,93	70554
		10	619,52	1443014	74,15	173234
40	100	4	8957,38	8110166	54,14	51476
		6	205940,95	167119305	909,95	1012212
		8	—	—	176469,01	169002391
		10	—	—	146019,52	155646590

Tabela 3.2: Resultados para as instâncias do Grupo 1 (caso D par).

$ V $	$ E $	D	Formulação G	Formulação A		Formulação B		Formulação C	
			tempo(s)	tempo(s)	nós	tempo(s)	nós	tempo(s)	nós
40	400	7	92,00	3337,27	1660043	557,30	112272	220,38	34769
		9	59,00	18,09	6949	2,93	108	11,19	1007
60	600	9	46014,00	219948,26	64506074	16741,89	2457284	3768,21	404874

Tabela 3.3: Resultados para as instâncias do Grupo 2 (caso D ímpar).

3.5

Conclusões

A estratégia de incluir *lifting* nos modelos originais de Achuthan possibilita que esses modelos resolvam instâncias da literatura em menores tempos de processamento. Embora os limites duais tenham sido reduzidos em relação aos dos modelos originais, estes ainda são grandes, entre 15 e 30%.

Nos experimentos realizados com os modelos de Achuthan, pode-se observar que a formulação alternativa proposta, e reforçada com as desigualdades válidas e os limites generalizados, explora uma quantidade menor de nós na árvore de *branch-and-bound* para a maioria das instâncias dos Grupos 1 e 2. Em termos de tempo de processamento para provar a otimalidade, esta formulação consome menores tempos para maioria das instâncias.

Nos testes realizados com o Grupo 2, observou-se que os modelos de Achuthan e Caccetta reforçados com *lifting* encontram o ótimo para estas instâncias em tempos computacionais menores do que os dos modelos de Gouveia [30, 58] quando o diâmetro requerido é grande (por exemplo, $D = 9$). Quando o diâmetro requerido é pequeno, os modelos de Gouveia provam a otimalidade para as instâncias do Grupo 2 em tempos computacionais menores que os modelos de Achuthan e Caccetta reforçados com *lifting*.