

1

Introdução

Problemas computacionalmente simples, como o da árvore geradora de custo mínimo podem tornar-se intratáveis após a adição de alguns tipos de restrições. Estudos dedicados ao desenvolvimento de algoritmos eficientes para esses problemas são importantes do ponto de vista teórico e prático. Particularmente, o interesse em problemas de árvores geradoras ocorre por serem estruturas fundamentais de grafos, por comporem blocos de modelos mais complexos e por surgirem frequentemente relacionadas a problemas de projetos de redes [14, 51].

Nesta tese são propostos modelos e algoritmos para o problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo com Restrição de Diâmetro (AGMD). O diâmetro de uma árvore é a quantidade de arestas em seu maior caminho. Seja um grafo conexo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas, com custos $c_{ij} \geq 0$ associados às arestas. AGMD consiste em encontrar uma árvore geradora de G com custo mínimo, tal que qualquer caminho nesta árvore contenha no máximo D arestas, onde $D \geq 2$. Este problema é NP-difícil para diâmetros $4 \leq D < |V| - 1$ [24].

Na Figura 1.1 é ilustrado um exemplo. Deseja-se obter uma árvore geradora do grafo da Figura 1.1-(a) com diâmetro menor ou igual a 2. A solução ótima está representada na Figura 1.1-(c) e a árvore geradora de custo mínimo (AGM) é apresentada na Figura 1.1-(b). O custo da AGM pode ser um limite inferior de péssima qualidade mesmo para instâncias pequenas como essa do exemplo.

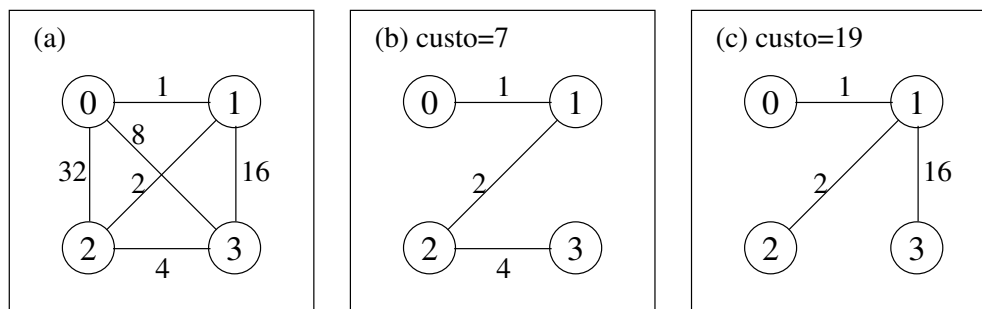


Figura 1.1: Exemplo para o caso $D = 2$.

AGMD modela tipicamente aplicações em projetos de redes de computadores onde todos os vértices devem comunicar-se entre si a custo mínimo, garantindo um certo nível de serviço. As restrições de diâmetro podem surgir associadas ao retardo ou à confiabilidade de transmissão na rede [7, 58]. Outras aplicações surgem em exclusão mútua distribuída [20, 57, 63] e compressão de dados [12]. Um exemplo de problema associado ao AGMD em exclusão mútua distribuída é tratado por Raymond [57]. Para acessar a memória compartilhada, os computadores devem trocar mensagens entre si para obter permissão. Cada computador envia mensagens para os vizinhos que estão a uma distância $2D$, onde D é o diâmetro. Isto controla a quantidade de mensagens geradas por solicitação. Minimizar o custo da árvore significa reduzir o custo de transmissão na rede. Em compressão de dados, Bookstein e Klein [12] propuseram realizar essa atividade agrupando vetores de *bitmaps* e comprimindo-os em caminhos de uma árvore. Os custos associados às arestas correspondem ao espaço de armazenamento e o diâmetro é associado à eficiência na descompressão dos dados.

Na literatura encontram-se trabalhos que objetivam resolver AGMD de forma exata [3, 30, 32] e estudos que visam encontrar boas soluções utilizando métodos heurísticos [20, 42, 43, 56]. Os modelos para AGMD podem ser aprimorados através do desenvolvimento de desigualdades válidas e redução do número de variáveis e restrições. Um algoritmo exato do tipo *branch-and-bound* para AGMD proposto em [3] é capaz de resolver, com garantia de otimalidade, instâncias em grafos esparsos com até 50 nós. Por outro lado, os métodos heurísticos utilizados geralmente não utilizam informações associadas aos modelos matemáticos existentes. Além disto, comumente os experimentos realizados com as heurísticas não relacionam as soluções por elas encontradas com limites inferiores ou valores ótimos conhecidos para algumas classes de instâncias. Aliado a estes fatos, as diversas aplicações práticas associadas ao AGMD e sua relação com problemas importantes da literatura motivam o desenvolvimento de algoritmos que possam fornecer boas soluções eficientemente.

Nesta tese, modelos propostos para AGMD em [3] são reforçados através da introdução de restrições válidas. Dessa forma, tornou-se possível resolver instâncias de grafos esparsos de 60 nós e 600 arestas e de grafos completos com até 25 nós. Uma relaxação lagrangeana é proposta para o modelo de multifluxo básico apresentado em [28]. Essa relaxação é utilizada para o desenvolvimento de heurísticas lagrangeanas. Adaptações são realizadas nas heurísticas construtivas propostas em [20, 56]. São propostas ainda quatro estratégias de busca local, uma heurística do tipo GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) e outra híbrida. São obtidos limites superiores a

menos de 2% do ótimo para as classes de instâncias usadas em [30, 60] e os melhores resultados conhecidos até o presente momento para 11 instâncias de grafos completos usadas em [42, 43, 56].

No Capítulo 2, é realizada uma revisão bibliográfica sobre o AGMD. No Capítulo 3, são apresentadas extensões dos modelos matemáticos e os resultados obtidos. Uma relaxação lagrangeana, heurísticas lagrangeanas e resultados computacionais são descritos no Capítulo 4. No Capítulo 5, são relatadas as extensões das heurísticas construtivas e os experimentos realizados com as mesmas. No Capítulo 6, são descritas quatro estratégias de busca local, uma heurística do tipo GRASP e uma heurística híbrida. Experimentos computacionais realizados com esses algoritmos heurísticos são apresentados no Capítulo 7. Conclusões e trabalhos futuros são descritos no Capítulo 8.