5
Modelo de Previsão de Temperatura

5.1
Previsão de Clima

As variações do clima influenciam os preços das *commodities* pela influência na demanda. Todavia, a correlação entre estes preços e o parâmetro de clima não são perfeitos, pois circunstâncias além da demanda influenciam o mercado, como legislação governamental, equilíbrio do mercado, rede de distribuição, entre outros. Asseldonk, 2003, explica que no caso particular da energia elétrica, o clima é a principal influência nesta demanda em particular, o que evidencia a importância dos derivativos climáticos como ferramenta para o gerenciamento do risco volumétrico neste setor. O uso apropriado das previsões podem aumentar a expectativa de lucro e reduzir o risco de perdas. O ponto principal é que a previsão pode ser usada para determinar o melhor curso de ação e o derivativo de clima pode prevenir contra uma previsão errada.

O tempo pode ser considerado como as condições em um dado local, dia a dia, com mudanças contínuas das condições atmosféricas. O clima, ao contrário, é um sumário estatístico dos eventos do tempo ocorridos em um dado mês, estação, ano ou mais. Normalmente, o clima é previsto em períodos que variam de horas a vários meses. A informação e a técnica utilizada pelo previsor é fortemente dependente do horizonte de previsão que se deseja. Conforme Dischel, 2001b, as previsões de tempo são de curto-prazo e devem ser usadas em decisões que requerem um horizonte pequeno de tempo. No mercado de derivativos climáticos eles fornecem pouca informação por causa do período da maioria dos contratos negociados ser grande. Logo a previsão climática é mais apropriada.

No mercado de risco do clima, o valor do instrumento é calculado pelas estimativas dos resultados futuros e os dados relevantes são as probabilidades dos eventos meteorológicos. Para estimar estas probabilidades, o tempo é projetado para a frente baseado nas décadas passadas e nas medidas da previsão do clima. Sabe-se que prever o clima é uma tarefa complicada por causa da existência de múltiplas variáveis que governam as características do tempo. No entanto, olhando para o passado, podemos obter informações preciosas sobre o possível comportamento deste, pois é possível assumir um comportamento regular devido as mudanças no clima seguirem um ciclo anual com certa variabilidade, como explica Garcia e Sturzenegger, 2001.

Os fatores climáticos serão sempre imprevisíveis. Logo uma boa previsão deve capturar a incerteza na estimação das probabilidades dos múltiplos cenários possíveis. Basicamente, para estimar a probabilidade do clima projetam-se as séries históricas da variável modelada no futuro, estimando-se uma previsão desta. Os valores dos derivativos de clima são calculados com base na estimação da probabilidade que podem se diferenciar em cada caso por conta do desenvolvimento das estimativas e das diferentes disciplinas dos modeladores e previsores. Um dos maiores problemas é tentar achar uma maneira universal de mensurar as condições do clima envolvidas no negócio.

5.1.1
Introdução à Previsão Meteorológica.

As previsões de mudanças nos preços do mercado financeiro são possíveis e podem até ser eficientes. No entanto há um *feedback* entre a previsão e o preço, o que, com o decorrer do tempo, gera falha nas previsões devido as expectativas racionais dos agentes do mercado. O clima, por outro lado, não é afetado pelas previsões climáticas e os fatores que governam o tempo são constantes e independentes de qualquer interferência humana.

Os contratos de derivativos climáticos são baseados em medidas precisas feitas em estações individuais, e consequentemente as previsões usadas na precificação de derivativos climáticos têm que refletir isso. Normalmente, as previsões meteorológicas são divulgadas sem uma definição matemática clara do que elas estão representando. Para o objetivo deste estudo é mais útil que as previsões representem a média e a expectativa da distribuição dos cenários futuros.

As previsões podem ser obtidas de diversas maneiras e os usuários da previsão têm que estar aptos a comparar as previsões e definir qual a melhor. Assume-se que a habilidade no passado implica na habilidade no futuro e comparando o modelo no passado podemos decidir qual modelo vai se comportar melhor no futuro. Este pressuposto é razoável na maioria das vezes, no entanto o sistema de previsão é continuamente aprimorado e por esse motivo a decisão de qual previsão utilizar deve estar sempre sendo revista.

Os métodos mais simples para medirmos a habilidade da previsão são os que envolvem a comparação das previsões de temperatura com os valores observados. A primeira medida que vamos considerar é o viés e as outras são o erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio (MAD) e o erro médio absoluto percentual (MAPE).

Escrevendo a previsão da temperatura no dia i como f_i, e a temperatura real como T_i, então o erro de previsão é dado por:

$$e_i = f_i - T_i$$

O desvio na média é definido como a esperança deste erro.

$$E(e_i) = E(f_i - T_i) = E(f_i) - E(T_i)$$

Uma maneira prática de estimar o viés na média de uma previsão é pegar a previsão de N dias anteriores e comparar com os N dias de observações e calcular o erro médio.

$$e = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f_i - T_i) = \overline{f_i} - \overline{T_i}$$

O RMSE e o MAE irão nos trazer informações sobre como a previsão se comporta em relação à média durante o período analisado. O erro médio ao quadrado (MSE) de uma previsão é definido como:

$$MSE = E\left[(f_i - T_i)^2\right]$$

E pode ser estimado para N dias de previsão do passado como:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(f_i - T_i\right)^2$$

O RMSE é a raiz quadrada do MSE e mede o tamanho do erro de previsão, assim como tem a mesma unidade deste. Uma alternativa ao RMSE é o MAE, definido como:

$$MAE = E\left(\left|f_i - T_i\right|\right)$$

E estimado por:

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|f_i - T_i\right|$$

Outra importante estatística a se considerar é o MAPE, que é o erro médio absoluto percentual. Este é definido pela equação abaixo:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{f_i - T_i}{T_i}\right|\right)}{n} * 100$$

O MAE é menos afetado por erros grandes do que o RMSE e pode variar de uma aplicação para outra. O RMSE é fortemente influenciado pelo nível de variabilidade da temperatura em uma locação particular e por isso não pode ser considerado bom para comparação. Uma boa estatística para comparação de ajuste entre os modelos é o MAPE pois é dado em valores percentuais.

5.2 Modelos de Previsão

Com o objetivo de encontrar o modelo mais ajustado a série e que ofereça uma boa previsão, o presente trabalho pesquisou duas das principais técnicas univariadas *benchmark*, Holt-Winters e Box & Jenkins, e mais o ajuste pela Transformação de Fourier. No caso da modelagem por Holt-Winters foi utilizado um modelo sem tendência com ciclo anual. Pela técnica de Box & Jenkins, a modelagem foi implementada a estrutura SARIMA ao modelo, devido a incorporação do ciclo anual verificado. No outro modelo a sazonalidade foi captada pela Transformação de Fourier. A intenção é averiguar a capacidade preditiva do modelo 92 passo-à-frente (3 meses).

Esse capítulo encontra-se subdividido em três partes. Primeiro, coloca-se os aspectos teóricos relativos à modelagem Holt-Winters tradicional. Posteriormente, apresenta-se as principais características da modelagem de Box & Jenkins. Para finalizar é exposto a modelagem pela transformação de Fourier com algumas adaptações para melhorar o ajuste do modelo.

5.2.1
Holt-Winters

A técnica Holt-Winters faz parte de um conjunto de modelos para a previsão abrangido pelo Método de Amortecimento Exponencial (MAE), que normalmente é empregado para modelar tendência e/ou sazonalidade existentes na série temporal. Portanto, interessa fazer uma breve descrição do MAE e, ao mesmo tempo, justificar a necessidade de trabalhar com a sua forma sazonal na tentativa de obter previsões melhores quando a referência são dados diários como os que estão sendo investigados.

O Método de Amortecimento Exponencial ganhou destaque em 1970 possibilitando realizar a modelagem univariada dos dados, isto é, fazer as previsões de uma série considerando somente os seus valores defasados. São modelos de validade local e, por isso, o horizonte de previsão não deve ser muito grande.

Segundo Taylor (2002), o MAE é um procedimento bastante difundido, especialmente em aplicações cujas séries necessitam de um procedimento automático de atualização, devido a robustez e a exatidão de suas estimativas. O MAE corrige os pesos do conjunto de dados conforme a idade dos mesmos dando pesos maiores às informações mais recentes e pesos menores às observações mais antigas. O método pode ser aplicado tanto em séries não sazonais modelando apenas nível e/ou tendência (método de Brown), quanto em séries sazonais (método de Winters).

De acordo com o método de Brown, os modelos podem ser constantes (nível médio da série constante no tempo), lineares (quando a série apresenta alguma tendência no tempo crescente ou decrescente) ou quadráticos (o modelo é representado por uma função quadrática do tempo).

O MAE atribui pesos diferentes aos dados conforme a sua idade. Desta forma, nos modelos existem os parâmetros (medida numérica que descreve alguma característica da série como nível, tendência e sazonalidade e que varia no tempo sendo atualizado a todo instante) e os hiperparâmetros (quantidade fixa e desconhecida que não varia no tempo e que necessita ser previamente estimada para se estimar o parâmetro). Todo hiperparâmetro é obtido minimizando o erro de previsão 01 passo–à–frente.

Um desdobramento dos modelos de Brown é o método de Holt que considera exclusivamente os modelos lineares. Na modelagem de Holt há dois hiperparâmetros: para a atualização seqüencial do nível, α, e para a atualização seqüencial da tendência, β. Em se tratando de séries sazonais, uma das alternativas do método de amortecimento exponencial para realizar este tipo de modelagem é aplicar a técnica de Winters. Cabe lembrar que sazonalidade refere-se a um tipo de repetição periódica definida que está relacionada às estações do ano.

Segundo o método de Winters, a modelagem é feita utilizando valores discretos, via fatores sazonais, que caracterizam o período sazonal. Estes fatores podem ser incorporados aos modelos de forma aditiva ou multiplicativa.

Os estimadores dos fatores sazonais são seqüencialmente definidos utilizando o método de amortecimento exponencial. As equações de atualização passam a considerar três parâmetros e, respectivamente, três hiperparâmetros. A formulação do modelo Holt-Winters convencional e sua respectiva equação de previsão seguem abaixo:

$$Z_t = (a_1 + a_2 t) * \rho_t + \varepsilon_t$$

Onde ρt :são os fatores sazonais.

$$\hat{Z}_{t+\tau}(t) = E\left\{\frac{Z_{t+\tau}}{Z_{t\tau}}\right\} = E\left\{(a_1 + \hat{a}_2)\rho_{t+\tau} + \frac{\varepsilon_{t+\tau}}{Z_{t\tau}}\right\}$$

$$\hat{Z}_{t+\tau}(t) = (a_1(t) + \hat{a}_2(t)) * \rho_{m(t+\tau)}(t)$$

A partir desta equação de previsão todos os fatores sazonais são estimados, mas somente aquele correspondente à informação recebida é atualizado. Isto pode ser verificado pelas equações abaixo.

Nível: $\hat{a}_1$ (t) ; hiperparâmetro "α"

$$\hat{a}_1(t) = \alpha * \left[\frac{Z_t}{\hat{\rho}_{m(t)+ks}(t-1)} \right] + (1-\alpha)[\hat{a}_1(t-1) + \hat{a}_2(t-1)]$$

Tendência: $\hat{a}_2$ (t) ; hiperparâmetro "β"

$$\hat{a}_2(t) = \beta * [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1-\beta) * \hat{a}_2(t-1) \; ; \; \beta \in [0,1]$$

Fatores sazonais $\hat{\rho}_j$ (t) j = 1, 2, 3, ... ; hiperparâmetro "γ"

$$\hat{\rho}^*{}_{m(t)}(t) = \gamma * \left[\frac{Z_t}{\hat{a}_1(t)} \right] + (1-\gamma) * \hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$$

$$\hat{\rho}^*{}_j(t) = \hat{\rho}_j(t-1)$$

$$\hat{\rho}_j(t) = \left[\frac{\hat{\rho}^*{}_j(t)}{\sum_{j=1}^{S} \hat{\rho}^*{}_j(t)} \right] * S \quad ; \quad \gamma \in [0,1]$$

Onde: $\hat{\rho}^*{}_{m(t)}(t)$ fator sazonal correspondente ao mês da informação *Zt* recebida; $\hat{\rho}^*{}_j(t) = \hat{\rho}_j(t-1)$; *j = 1, 2, ...L; j ≠ m(t):* fatores sazonais estimados e não atualizados.

É importante salientar que para a soma dos fatores sazonais se igualar ao comprimento *L* da sazonalidade, é preciso normalizá-los. A normalização é útil por permitir interpretar os fatores. Sabe-se que para as séries não sazonais todos os valores são iguais a um. Então, supondo o caso da temperatura, no verão, os fatores assumem índices maiores que 1, indicando um consumo acima da média. No inverno, os valores inferiores a 1 mostram um consumo abaixo da média esperada. Essa análise só é possível porque os fatores sazonais estão normalizados. Neste caso, a diferença entre $\hat{\rho}^*_j(t)$ e $\hat{\rho}_j(t-1)$ está sendo distribuída entre todos os L fatores sazonais. A equação de normalização é dada por:

$$\hat{\rho}_j(t) = \left[\frac{\hat{\rho}*_j(t)}{\sum_{j=1}^{S}\hat{\rho}*_j(t)}\right]*L$$

Uma vez apresentados os aspectos teóricos dos modelos pode-se partir para a sua avaliação empírica. Para isso, é preciso definir as estimativas iniciais dos parâmetros $\hat{a}_1(0)$, $\hat{a}_2(0)$ e dos fatores sazonais C_t. Winters propõe as seguintes equações:

$$\hat{a}_1(0) = \overline{Z}_1 - \frac{(S+1)}{2}\hat{a}_2(0)$$

$$\hat{a}_2(0) = \frac{\left[\overline{Z}_{(j)} - \overline{Z}_{(1)}\right]}{\left[(j-1)*S\right]}$$

$$C_t = \frac{Z_t}{\left\{\overline{Z}_{(i)} - \left[\frac{(S+1)}{2-m(t)}\right]*\hat{a}_2(0)\right\}}$$

O método de amortecimento exponencial possibilita obter uma modelagem "robusta" devido aos parâmetros serem atualizados a todo instante, o que torna os modelos adaptativos. Toda a teoria da técnica tradicional Holt-Winters evidencia que o método comporta apenas um único padrão cíclico relacionado às variações observadas na série em virtude de mudanças nas estações do ano. As informações exibidas nesta seção estão baseadas na leitura de Montegomery, 1976, e Souza, 1983.

5.2.2
Box & Jenkins

A compreensão da técnica Box & Jenkins (BJ) exposta nesse capítulo foi adquirida a partir de Box, G.E.P., Jenkins, GM, 1970, Souza & Camargo, 2004. O fundamento teórico da técnica de previsão por Box & Jenkins é gerar um processo estacionário de 2ª ordem passando um ruído branco por um filtro linear de memória infinita. A idéia é que um modelo com infinitos parâmetros não é implementável dado a impossibilidade de estimar tamanha quantidade de parâmetros. Assim, a modelagem BJ consiste em encontrar a estrutura de autocorrelação presente na série temporal e a autocorrelação existente entre os termos do erro aleatório. Desta forma, infinitos parâmetros são colocados como a razão de dois finitos parâmetros, como é exposto na diagramação abaixo::

$$at \rightarrow \boxed{\psi\ (B)} \rightarrow Zt$$

$$Zt = \psi\ (B)\ at \quad \rightarrow \qquad \Psi(B) = \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \rightarrow \qquad \Phi\ (B)\ Zt = \theta\ (B)\ at$$

Onde: ψ(B): infinitos parâmetros; $\frac{\theta(B)}{\Phi(B)}$: finitos parâmetros; sendo *Φ(B)* o parâmetro da parte autorregressiva (AR) e *θ(B)* o parâmetro da parte média móvel (MA) do modelo, que se refere à modelagem da autocorrelação entre os termos do erro do modelo.

Portanto, modelar uma série pelo método BJ consiste em definir a estrutura ARMA mais adequada para descrever os dados em estudo. A condição essencial para a aplicação dessa técnica é que a série seja estacionária de 2ª ordem. Caso contrário, do conjunto original de dados, cria-se uma nova série realizando sucessivas diferenças.

Essas diferenças representam o que se chama de derivada para uma variável discreta. Se a série tem um crescimento linear, com a 1ª diferença ficará horizontal. Se o crescimento é quadrático, será preciso fazer a 2ª diferença.

Matematicamente essas diferenciações são representadas pelo operador diferença ∇^d. O índice sobrescrito d diz respeito ao número de diferenças que horizontalizam a série, tornando-a estacionária de 2ª ordem.

$$Zt = \nabla^d Xt.$$

Onde: Xt é série original antes de aplicar as diferenças, ∇^d: operador diferença e Zt: série estacionária após aplicar as diferenças. O número de diferenciações aplicadas à série para torná-la estacionária é representado na estrutura de modelagem pela letra *I*.

Na prática executam-se quantas diferenças forem necessárias para chegar a uma série estacionária. Em geral, quando for preciso aplicar 3 ou 4 diferenças, a série não é adequada para ser modelada por Box & Jenkins.

Portanto, uma estrutura ARMA(p,q) é utilizada para modelar séries originalmente estacionárias de 2ª ordem, sendo representada pelo seguinte modelo:

$$[\Phi\ (B)\ Xt\ = \theta\ (B)\ at]$$

Já uma estrutura ARIMA(p,d,q) é utilizada para modelar séries originalmente não estacionárias pela aplicação de sucessivas diferenciações, sendo representada pelo modelo abaixo:

$$[\Phi\ (B)\ \nabla^d\ Xd\ = \theta\ (B)\ at]$$

Quando for preciso incluir a componente de sazonalidade no modelo, isso pode ser feito recorrendo à modelagem SARIMA. Esta estrutura, além de modelar a correlação convencional das partes AR(p) e MA(q) do modelo, também observa a correlação presente entre os períodos sazonais. Portanto, para descrever a sazonalidade existem estimadores específicos com esta finalidade para as partes AR(P) e MA(Q) sazonal. As letras maiúsculas P e Q simbolizam a ordem sazonal do modelo. Esta ordem é identificada observando exclusivamente os lags sazonais. A notação para representar o modelo com um ciclo sazonal e sua estrutura são especificados abaixo:

$$SARIMA\ (p, d, q) * (P, D, Q)s = (\varphi, \nabla^d, \theta) * (\Phi, \nabla^D, \Theta)$$

$$\varphi\ (B)\ \Phi\ (BS)\ \nabla^d\ \nabla^D\ Xt = \theta\ (B)\ \Theta\ (BS)\ at$$

As ordens *p* e *q* podem ser determinadas respectivamente nos gráficos desenhados pela FACP (função de autocorrelação parcial) e pela FAC (função de autocorrelação total). Para tanto, é preciso estar atento a forma de decréscimo da série e em qual *lag* acontece o corte brusco. Este corte se dá no *lag* cuja correlação é mais significativa determinando a ordem do modelo.

O padrão teórico de um AR é representado por um decréscimo exponencial na FAC e um corte brusco na FACP no *lag* correspondente a ordem do modelo. O padrão MA é verificado a partir de um corte brusco na FAC e um decréscimo exponencial na FACP. No modelo ARMA verifica-se a presença de um corte brusco tanto na FAC quanto na FACP.

Com respeito a identificação da ordem sazonal do modelo, o conceito descrito no parágrafo anterior permanece o mesmo. Contudo, neste caso, apenas os *lags* sazonais devem ser avaliados.

Identificada a ordem do modelo, é preciso obter as estimativas dos seus parâmetros. De acordo com Souza & Camargo, 2004, na parte AR, os parâmetros são lineares e um método simples como o de Mínimos Quadrados Ordinários resolveria facilmente o problema. Porém a parte MA do modelo não é linear e exige métodos mais complexos para efetuar a estimação de forma satisfatória. Sendo assim, uma técnica empregada para executar essa tarefa pode ser o Método de Máxima Verossimilhança que produz estimadores com importantes propriedades que os tornam atraentes para gerar as estimativas. O fundamento teórico desta metodologia é que toda a informação populacional absorvida pelos dados encontra-se na função de verossimilhança desde que o modelo tenha sido identificado corretamente.

Estimado o modelo é importante verificar a sua adequação para realizar as previsões pretendidas. Para isso existem testes estatísticos baseados, principalmente, na análise dos ruídos que no caso representam os erros de previsão. Para isso são realizados testes e análises das estatísticas do modelo para ver o ajuste aos dados. Se a modelagem é boa, os ruídos devem formar uma série do tipo "ruído branco". O situação ideal é encontrar o melhor modelo, sendo este parcimonioso, ou seja, com menor número de parâmetros.

5.2.3
Transfomação de Fourier

O presente estudo apresenta uma adaptação da transformada de Fourier baseado em variações da metodologia de Campbell e Diebold (2002) para a previsão de temperaturas diárias. A transformação mostrada na equação abaixo mapeia a temperatura no domínio da freqüência para obter informações adicionais que não estão diretamente disponíveis no formato do domínio temporal.

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi kt} dt$$

Onde *f(t)* é a série temporal original e *k* é a freqüência. A transformação de Fourier busca a correlação entre *f(t)* e a funções *seno* e *cosseno* exponencial complexa de diferentes frequências. *F(k)* é proporcional a variância explicada em *f(t).* Pelo cálculo dos ceficientes de Fourier de diferentes freqüências, a série temporal pode ser expressa como integrais da amplitude randômica e não correlacionada nas várias freqüências.

A regressão é feita de acordo com o modelo proposto por Campbell e Diebold (2002), com adaptações para um melhor ajuste do modelo aos dados principalmente na equação da variância. Dessa forma a regressão é feita nos termos de tendência, sazonalidade e ciclo na série de média diária de temperatura original. A ordem das harmônicas de Fourier e a extensão dos *lags* autorregressivos são selecionados pela análise espectral e pelas estatísticas de ajuste a série de dados, respectivamente.

O foco da modelagem recai sobre o comportamento dinâmico da média, com contribuições vindas de componentes cíclicos, de volatilidade e de tendência. A variação sazonal foi aproximada utilizando a série de Fourier e o componente cíclico da variância por um processo GARCH. Dessa forma a estrutura do modelo se compõe por constante, tendência, sazonalidade e ciclo, representado por uma função degrau de 365 dias, como representado na equação a seguir:

$$T_t = Const + Tendência_t + Sazonalidade_t + \sum_{l=1}^{L} \rho_{t-l} T_{t-l} + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$Tendência_t = \beta_m t^m$$

$$Sazonalidade_t = \sum_{i=1}^{I} (\delta_{c,i} \cos(2\pi i \frac{d(t)}{365}) + \delta_{s,i} \sin(2\pi i \frac{d(t)}{365}))$$

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{i=1}^{4} (\delta_{c,i} \cos(2\pi i \frac{d(t)}{365}) + \delta_{s,i} \sin(2\pi i \frac{d(t)}{365})) + \sum_{l}^{L} \rho_{t-1} T_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2{}_{t-1.} + \phi_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0,1)$$

A equação pode ser considerada uma decomposição clássica de séries temporais, onde o erro é distribuído como uma variável padrão normal, independente e identicamente distribuída*(i.i.d.).* A função degrau *d(t)* gera variáveis dummy para cada dia do ano, sendo que não foram considerados na anãlise os dias 29 de fevereiro dos anos bissextos. O componente cíclico é adicionado para a contabilização do comportamento autorregressivo de longo-prazo, enquanto que a captura do componente cíclico de curto-prazo é feita pela utilização de lags autorregressivos. A estimação do modelo de regressão é realizada com distúrbios modelados pelo processo GARCH por mínimos quadrados ordinários.