

7

A q-contagem, $q > 0$

Duas coberturas t_1 e t_2 de uma superfície quadriculada diferem por um *flip* se elas são idênticas exceto em um quadrado 2×2 , onde uma cobertura tem dois dominós horizontais e o outro tem dois dominós verticais. Duas coberturas t_1 e t_2 de um disco com buracos ou faixa diferem por um flip se e somente se suas funções altura θ_1 e θ_2 diferem em um único ponto, o centro v do quadrado, e então $\theta_2(v) - \theta_1(v) = \pm 4$. Assuma $\theta_2(v) - \theta_1(v) = 4$; da característica local das funções altura, v é um mínimo local (resp. máximo) de θ_1 (resp. θ_2). Além disso, flips são admissíveis exatamente em extremos locais da função altura.

Segue das referências [4] e [5] que duas coberturas quaisquer em um disco quadriculado com buracos podem ser associados por uma sequência de flips.

Um *flop* é uma rodadinha ao redor de um buraco secundário.

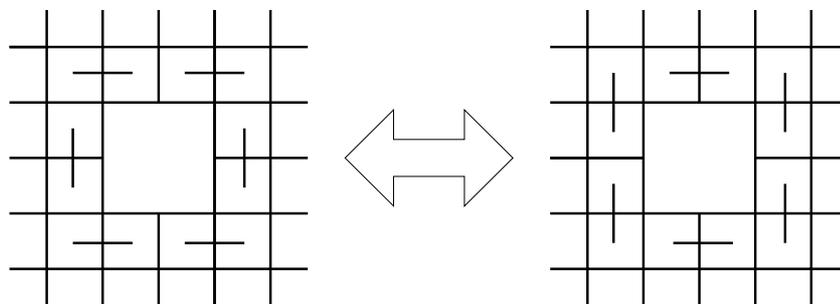


Figure 7.1: Flop

Teorema 7.1 *Seja D um disco com buracos livre de paredes. Sejam t_1 e t_2 coberturas com mesmo fluxo (primário).*

Então t_1 e t_2 são acessíveis via flips e flops.

A hipótese de D ser livre de paredes é necessária como mencionado em [4], p. 224.

Seja $D = cl \Delta$ um disco quadriculado com buracos com cobertura universal $D^\infty = \dots \Delta_{-1} \Delta_0 \Delta_1 \dots$. Sejam t_1 e t_2 coberturas de D induzindo coberturas periódicas $\pi^{-1}(t_1)$ e $\pi^{-1}(t_2)$ de D^∞ . Uma cobertura $t_{1,2}$ de D^∞ *interpola* de t_1 para t_2 se existe um inteiro k tal que $t_{1,2}$ e $\pi^{-1}(t_1)$ (resp.

$\pi^{-1}(t_2))$ coincide em Δ_k para $k < -K$ (resp. $k > K$). Duas coberturas t_1 e t_2 de D são *eventualmente compatíveis* se eles admitem interpolações $t_{1,2}$ e $t_{2,1}$.

Do Lema 1, coberturas com fluxos diferentes não são eventualmente compatíveis.

Proposição 7.2 *Seja D um disco com buracos livre de paredes. Sejam t_1 e t_2 coberturas com mesmo fluxo (primário).*

Então t_1 e t_2 são eventualmente compatíveis.

Seja Δ um track segment e seja i um índice: i é ativo-esquerda (resp. ativo-direita) se existe uma cobertura da faixa metade esquerda (resp. direita) $\dots\Delta_{-1}\Delta_0$ (resp. $\Delta_1\Delta_2\dots$) com índice i em $\xi_{\frac{1}{2}}$.

Uma definição alternativa é a seguinte: para o valor f do fluxo, construa o grafo f -índice \mathfrak{S}_f , um grafo orientado onde os vértices são os índices do fluxo f em $\xi_{\frac{1}{2}}$ e uma i e i' por uma aresta orientada se existe uma cobertura de Δ_0 com índice i em $\xi_{-\frac{1}{2}}$ e i' em $\xi_{\frac{1}{2}}$. Um índice i é ativo-esquerda (resp. ativo-direita) se existe um caminho infinito em \mathfrak{S}_f terminando (resp. começando) em i .

Teorema 7.3 *Seja Δ um track segment periódico com $(N - 1)$ buracos, f um valor do fluxo e \mathfrak{S}_f o grafo f -índice. Então existe um inteiro N tal que para todo $n > N$ e todos índices i e i' a seguinte afirmação é válida: existe um caminho em \mathfrak{S}_f de comprimento n começando em i e terminando em i' se e somente se i é ativo-direita e i' é ativo-esquerda.*

Demonstração: Seja I o número de vértices em \mathfrak{S}_f (i.e., o número de índices do fluxo f). Se existe um caminho de comprimento $I + 1$ começando em i então o caminho deve passar duas vezes por alguns vértices e é simples construir um caminho infinito eventualmente periódico começando de i (um caminho infinito i_0i_1 é *eventualmente periódico* se existem inteiros positivos k e J tal que $i_{j+k} = i_j$ para todo $j > J$; k é o período). Então, se um caminho começa em i , termina em i' e tem comprimento maior que I então i é ativo-direita e i' é ativo-esquerda.

Uma cobertura de $cl(\Delta^n)$ induz um circuito de comprimento n em \mathfrak{S}_f ; inversamente, qualquer circuito é induzido por alguma cobertura. Sejam os índices i um ativo-direita e i' um ativo-esquerda. Construa um caminho eventualmente periódico começando em i . Seja k o seu período: o caminho corresponde eventualmente a uma cobertura de $cl(\Delta^k)$ que é compatível com $t_{f,min}$ pelo Teorema 7.2 (aqui $t_{f,min} \in T_D^\infty$ é a cobertura periódica correspondente a função altura minimal $\theta_{f,min}$ com fluxo f em D^∞). Isto mostra como modificar o caminho para obter um caminho eventualmente periódico de período 1, correspondendo a uma cobertura na faixa-metade

direita coincidindo eventualmente com $t_{f,min}$. A mesma construção aplicada ao caminho terminando em i' produz uma cobertura da faixa-metade esquerda coincidindo eventualmente com $t_{f,min}$. Deixando claro como justapor estas duas coberturas para obter uma cobertura de $\Delta_0 \dots \Delta_n$ com índices i e i' para qualquer n suficientemente grande. \square

Um índice i é bi-ativo se é ativo-esquerda e -direita. A submatriz $C_{*,\Delta,f}$ bi-ativa é obtida removendo de $C_{\Delta,f}$ todas as linhas e colunas associadas com índices que não são bi-ativos.

Teorema 7.4 *Para quaisquer p_2, \dots, p_N, q números complexos fixos, os espectros de $C_{*,\Delta,f}$ e $C_{\Delta,f}$ diferem por autovalores nulos.*

Demonstração:

Um índice i é *estritamente ativo-esquerda* se -esquerda mas não ativo-direita, *estritamente ativo-direita* se -direita mas não ativo-esquerda, *inativo* se nem ativo-esquerda nem ativo-direita. Permutando linhas e colunas de $C = C_{\Delta,f}$ tal que os índices aparecem da seguinte forma: ativo-esquerda, bi-ativo, ativo-direita, inativo, tornando C uma matriz em blocos 4×4 (com blocos de tamanhos diferentes). O bloco $C_{2,2}$ é $C_{*,\Delta,f}$.

É esperado que $(C^n)_{2,2} = (C_{2,2})^n$ (i.e., o bloco 2,2 na n -ésima potência de C é a n -ésima potência do bloco 2,2). De fato, um monômio na expansão das entradas de $(C^n)_{2,2}$ é um caminho em \mathfrak{S}_f começando em um índice bi-ativo e terminando em um índice bi-ativo: pela definição de bi-ativo, este caminho pode ser estendido tanto pela esquerda quanto pela direita e portanto, mais uma vez pela definição, todos os índices são bi-ativos. Em outras palavras, os únicos monômios não-nulos da expansão $(C^n)_{2,2}$ são aqueles em $(C_{2,2})^n$.

Segue do Teorema 7.3, para todo $n > N$,

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deixando claro que o espectro de C^n e $(C^n)_{2,2}$ diferem por autovalores nulos. Segue do parágrafo anterior, o espectro de C^n e $(C_{2,2})^n$ diferem por autovalores nulos, finalizando a demonstração. \square

Uma matriz X é *positiva* se todas as entradas são reais positivas. Uma matriz quadrada X é *eventualmente positiva* se X^n é positiva para algum n positivo.

Usando uma simples modificação do clássico teorema de Perron.

Teorema 7.5 *Se M é uma matriz eventualmente positiva então ela admite um autovalor simples positivo λ estritamente maior que o valor absoluto de qualquer outro autovalor.*

Teorema 7.6 *Sejam Δ um track segment periódico com $(N - 1)$ buracos com um fechamento $D = cl \Delta$ livre de paredes. Para p_2, \dots, p_N, q números reais positivos fixos quaisquer, a matriz quadrada $C_{\Delta, f}$ tem um autovalor positivo simples λ estritamente maior que o valor absoluto de qualquer outro autovalor.*

Demonstração: Segue do Teorema 7.3, que a submatriz $C_{*, \Delta, f}$ bi-ativa é eventualmente positiva. Do Teorema 7.5, $C_{*, \Delta, f}$ admite um autovalor simples positivo λ estritamente maior que o valor absoluto de qualquer outro autovalor. O resultado agora segue do Teorema 7.4. \square

Teorema 7.7 *Seja D um disco quadriculado com N buracos e $\Phi_D(p_1, p_2, \dots, p_N, q) = \sum_t$ cobertura de D $p_1^{\text{fluxo } 1 \text{ de } t} p_2^{\text{fluxo } 2 \text{ de } t} \dots p_N^{\text{fluxo } N \text{ de } t} q^{\text{altura } t}$. Então se $\widehat{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_N, \overline{q} > 0$, o polinômio $f(p_1) = \Phi_D(p_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_N, \overline{q})$ tem todas as raízes reais (e negativas).*

Demonstração:

Fixe p_2, \dots, p_N, q números reais positivos. Considere-os $\overline{p}_2, \dots, \overline{p}_N, \overline{q}$.

Suponha $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ as raízes não-nulas de $\Phi_D(p_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_N, \overline{q})$, com $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m| > 0$.

Assuma por indução que $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ são números reais negativos e que $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_{k-1}| > |\lambda_k| = \dots = |\lambda_{k'}| > |\lambda_{k'+1}|$, com $k' \geq k$.

Devemos provar que $k = k'$ e que λ_k é real negativo.

Pelo Corolário 6.3 e Teorema 7.6 temos que a sequência de funções k -simétricas de potências de λ_j satisfaz $\Gamma_k((-\lambda_1)^n, \dots, (-\lambda_m)^n) = (1 + o(1))B_k^n$.

Pela notação do Corolário 6.3, a constante positiva B_k é o maior autovalor de $C_{\Delta, f_{max-k}}$ (para os valores de p_2, \dots, p_N, q fixados) dividido por a .

A expressão $\Gamma_k((-\lambda_1)^n, \dots, (-\lambda_m)^n)$ é a soma de $k' - k + 1$ termos da forma $((-1)^k \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1} \lambda_l)^n, l = k, \dots, k'$ e outros termos que crescem exponencialmente em menor proporção.

Assim

$$\begin{aligned} \Gamma_k((-\lambda_1)^n, \dots, (-\lambda_m)^n) &= ((-1)^{kn} \lambda_1^n \lambda_2^n \dots \lambda_{k-1}^n (\lambda_k^n + \dots + \lambda_{k'}^n)(1 + o(1))) \\ &= (1 + o(1))B_k^n \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

daí $b_k^n + \dots + b_{k'}^n = (1 + o(1)) (n \rightarrow \infty)$ onde $b_l = \frac{-\lambda_l}{|\lambda_l|}$.

Assim $b_k, \dots, b_{k'}$ pertencem ao círculo unitário e podemos pegar arbitrariamente um n grande tal que

$2(k' - k + 1)|b_l^n - 1| < 1 \forall l$, e portanto, $|(k' - k + 1) - (b_k^n + \dots + b_{k'}^n)| < \frac{1}{2}$
uma contradição a menos que $k = k'$.

Finalmente, $b_k = 1$ e λ_k é o número real negativo. \square