6
Coberturas de track segment com $(N-1)$ buracos

Uma cobertura t de um track segment Δ com $(N-1)$ buracos é uma decomposição de Δ como a união disjunta de quadrados com uma *aresta preferencial* contida em α_0 ou α_1 e dominós. A aresta preferencial indica a posição da metade do dominó perdida.

O fluxo $\phi(t, \alpha_0)$ de uma cobertura t do track segment Δ com $(N-1)$ buracos relativo a α_0 conta arestas preferenciais em α_0 com sinal: arestas preferenciais que são lados de quadrados brancos (resp. pretos) contam positivamente (resp. negativamente). Similarmente, $\phi(t, \alpha_1)$ conta arestas preferenciais em α_1 mas agora pretos (resp. brancos) contam positivamente (resp. negativamente). A diferença $\phi(t, \alpha_1) - \phi(t, \alpha_0)$ é o número de quadrados pretos em Δ menos o número de quadrados brancos em Δ e portanto não depende da cobertura t: note a semelhança com o Lema 1.

Para associar uma função θ à uma cobertura t de um track segment Δ com $(N-1)$ buracos basta escolher um vértice base v_b em β_o e definir $\theta(v_b) = 0$, como foi feito antes. Estenda θ aos vértices restantes de Δ por instruções locais: é proibido percorrer arestas preferenciais ou arestas que são cobertas por dominós; tem cortes $\xi^i, i > 1$ secundários e não é permitido trespassar os cortes secundários, e isto define um shift aditivo nos cortes secundários. O resto é similar: θ aumenta 1 através de uma aresta permitida se existe um quadrado branco à sua esquerda (ou um preto à sua direita); o θ diminui 1 se existe um quadrado preto à sua esquerda (ou um branco à sua direita); e ocorre um shift aditivo próximo aos buracos secundários. Duas funções altura para uma mesma cobertura com diferentes vértices base diferem por uma constante inteira aditiva.

Para um vértice base fixo, as retrições da função altura para β_o não dependem da cobertura t. Escolha um vértice referente v_r em β_i: como no Lema 2, $\theta(v_r) = 4\phi(t, \alpha_0) + c$ para alguma constante c. Portanto, o valor da função altura θ em β_i depende apenas do fluxo de t.

Uma caracterização análoga à Proposição 3.1 para Δ com $(N-1)$ buracos é imediata. Seja θ uma função com valores inteiros definida no conjunto de vértices de Δ. Então θ é uma função altura de alguma cobertura t se e somente se valem as seguintes condições:

(a) $\theta(v_b) = 0$;

(b) se uma aresta orientada que associa o vértice v_0 ao vértice v_1 está em β_i ou β_o e um quadrado branco (resp. preto) está à sua esquerda então $\theta(v_1) - \theta(v_0) = 1$ (resp. -1);

(c) se uma aresta orientada que associa o vértice v_0 ao vértice v_1 está no interior de Δ ou em uma colagem e um quadrado branco (resp. preto) está à sua esquerda então $\theta(v_1) - \theta(v_0) = 1$ ou -3 (resp. -1 ou 3);

(d) se uma aresta trespassa um corte secundário ξ^i , $i > 1$, então ocorre um shift aditivo igual a $4\,|(n_b) - (n_p)|$, onde (n_b) e (n_p) são os números de quadrados brancos e pretos nos buracos secundários.

O volume $\nu(t)$ de uma cobertura t de um track segment Δ com $(N-1)$ buracos é uma soma de pesos dos valores de $\theta(v)$ através dos vértices de Δ. Vértices em β_o e β_i tem peso 0 e vértices do interior tem peso 1. Um vértice v no interior de uma colagem tem peso $n/4$ se ele pertence a n quadrados. O volume de um track segment é então um quarto-inteiro.

Coberturas t e $t^{'}$ de Δ e $\Delta^{'}$ podem ser justapostas para produzir uma cobertura de $\Delta\Delta^{'}$ se e somente se α_1 e ${\alpha_0}^{'}$ tem a mesma forma e os conjuntos de arestas preferenciais de α_1 e ${\alpha_0}^{'}$ coincidem. O subconjunto de arestas preferenciais de uma cobertura t em α_0 (resp. α_1) é um 0-*índice* (resp. 1-*índice*) de t: então, t e $t^{'}$ podem ser justapostos se o 1-índice de t coincide com o índice-0 de $t^{'}$. Generalizando, um 0-índice (resp. 1-índice) é um subconjunto do conjunto de η_0 arestas de α_0 (resp. o conjunto de η_1 arestas de α_1). Nem todos os índices aparecem como o índice de uma cobertura de Δ: por exemplo, o índice de uma cobertura não pode ter duas arestas preferenciais que são lados de um mesmo quadrado. Note que uma cobertura de $\Delta\Delta^{'}$ pode ser obtida apenas de um modo: como a justaposição $tt^{'}$ das coberturas de t de Δ e $t^{'}$ de $\Delta^{'}$. Uma cobertura t de Δ pode ser fechada para produzir uma cobertura $cl\ \ t$ de $cl\ \ \Delta$ se seus dois índices são iguais. Ambos os índices de uma cobertura t de Δ determinam a restrição da função altura θ à colagem correspondente, e portanto o fluxo de t relativo à colagem. Finalmente, uma cobertura t de Δ e uma cobertura $t^{'}$ de $\Delta^{'}$ podem ser justapostas apenas se $\phi(t, \alpha_1) = \phi(t^{'}, {\alpha_0}^{'})$ (porém esta não é uma condição suficiente).

Para a próxima definição, é conveniente ordenar os índices. Ordene os 0-índice (resp. 1-índice) de forma que os fluxos associados estejam não-decrescendo: entre índices com o mesmo fluxo, use a ordem induzida pela bijeção natural com $\{0, ..., 2^{n_0} - 1\}$ (resp. $\{0, ..., 2^{n_1} - 1\}$). Isto indica elementos de $\{1, ..., 2^{n_0}\}$ e $\{1, ..., 2^{n_1}\}$ para o conjunto de índices que estão não-decrescendo em fluxo.

Definição 6.1 *Seja Δ um track segment periódico com $(N - 1)$ buracos, com colagens α_0 e α_1 de comprimentos n_0 e n_1. A matriz conexão C_Δ $2^{n_0} \times 2^{n_1}$ tem suas entradas em $\mathbb{C}[q^{1/4}, q^{-1/4}]$. A entrada (i_0, i_1) é a soma de $q^{\nu(t)}$ de todas as coberturas t de Δ com índices i_0 e i_1.*

Em particular, a entrada (i_0, i_1) é 0 se os índices i_0 e i_1 induzem diferentes valores de $\phi(\cdot, \alpha_1)$ e $\phi(\cdot, {\alpha_0}')$. A matriz C_Δ divide-se em blocos retangulares $C_{\Delta,f}$, dispostos diagonalmente, indicados pelo valor constante do fluxo f no bloco.

Para uma interpretação mais concreta para as entradas da matriz conexão, segue como cortar um track segment Δ, dado um par de índices (i_0, i_1), para obter um disco quadriculado com buracos D_{i_0,i_1}. Quadrados de Δ que não são adjacentes às colagens serão deixados intocados em D_{i_0,i_1}. Considerando agora cada quadrado adjacente à colagem: se nenhum lado desse quadrado pertencer a um dos dois índices, o quadrado também pertence a D_{i_0,i_1}; se exatamente um lado pertence a um índice, o quadrado não é incluído em D_{i_0,i_1}; finalmente, se dois ou mais lados pertencem aos índices, D_{i_0,i_1} não está definido. Claramente, quando D_{i_0,i_1} é definido, coberturas de D_{i_0,i_1} estão em bijeção natural com coberturas de Δ com índices i_0 e i_1; e, quando D_{i_0,i_1}é indefinido, não existem coberturas de Δ com índices i_0 e i_1. A volta não é verdadeira: D_{i_0,i_1} é definido mesmo quando os fluxos correspondentes são diferentes mas não será equilibrado e portanto não irá admitir coberturas. Resumindo, a entrada (i_0, i_1) de C_Δ é, a menos por um produto de uma potência inteira de $q^{1/4}$, a q-contagem das coberturas de D_{i_0,i_1} e 0 se D_{i_0,i_1} é indefinido.

Formalmente, a matriz C_Δ depende da escolha do vértice base. Escolhas diferentes, entretanto, simplesmente multiplicam a matriz conexão por uma potência de $q^{1/4}$.

Matrizes conexão comportam-se bem quanto a fechamento e justaposição.

Proposição 6.2 *Seja Δ um track segment periódico (com vértice base e vértice referente recomendados) com $(N-1)$ buracos. Então $\Phi_D(p_1, ..., p_N, q) = {p_1}^* q^* \sum_f {p_1}^f tr C_{\Delta,f}$, onde $p_2, ..., p_N$ são números complexos fixos, Φ_D é um polinômio q-fluxo do disco com buracos cl Δ e ${p_1}^*$ e q^* denotam potências inteiras arbitrárias de $p_1^{1/4}$ e $q^{1/4}$.*

Sejam Δ' e Δ'' track segments (com vértice base e vértice referente recomendados) com $(N-1)$ buracos tal que as colagens ${\alpha_1}'$ e ${\alpha_0}''$ têm a mesma *forma. Então* $C_{\Delta'\Delta''} = q^* C_{\Delta'} C_{\Delta''}$*, onde o track segment* $\Delta'\Delta''$ *recebe vértices base e referente arbitrários e* q^* *denota uma potência inteira arbitrária de* $q^{1/4}$*.*

Demonstração:

Para uma escolha apropriada de vértices base e referentes v_b e v_r, uma cobertura $cl\ \ t$ de $cl\ \ \Delta$ induz uma cobertura t de Δ com $\nu(t, v_b) = \nu(cl\ \ t, v_b)$, $\phi(t; v_b, v_r) = \phi(cl\ \ t; v_b, v_r)$ e 0- e 1-índice de t iguais. Inversamente, uma cobertura t de Δ com 0- e 1-índice iguais induzem uma cobertura $cl\ \ t$ de $cl\ \ \Delta$. Para a segunda afirmação, pode-se assumir que os vértices base e referente pertencem à colagens comuns ${\alpha_1}' = {\alpha_0}''$ visto que isto pode modificar o resultado final apenas por um produto de uma potência inteira de $q^{1/4}$. Note que com esta escolha de vértices base e referente, o conjunto de valores dos fluxos f é o mesmo para ambos track segments. O volume de uma cobertura $t't''$ de $\Delta'\Delta''$ claramente satisfaz $\nu(t't'') = \nu(t') + \nu(t'')$. O resultado agora segue da definição de produto de matrizes. □

Corolário 6.3 *Sejam* Δ *um track segment periódico com* $(N-1)$ *buracos (com vértice base e vértice referente recomendados);* $p_2, ..., p_N, q$ *números complexos fixos e* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *as raízes não nulas de*

$$\begin{aligned} \Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q) &= a{p_1}^{f_{min}}({p_1}^m + a_{m-1}{p_1}^{m-1} + ... + a_0) \\ &= a{p_1}^{f_{min}}(p_1 - \lambda_1)...(p_1 - \lambda_m) \end{aligned}$$

Então

$$trC^n_{\Delta,f} = a^n \Gamma_{f_{max}-f}((-\lambda_1)^n, ..., (-\lambda_m)^n).$$