5
Matrizes de Kasteleyn para coberturas

Considere a justaposição Δ^n de n cópias de um track segment Δ periódico com $(N-1)$ buracos. Neste capítulo obteremos algumas informações preliminares sobre as raízes de $\Phi_D(\cdot, q)$.

A partir daqui entenderemos que as variáveis $p_2, ..., p_N$ estão sendo substituídas por números reais positivos $\overline{p_2}, ..., \overline{p_N}$.

Proposição 5.1 *Seja Δ um track segment periódico com $(N-1)$ buracos, com um peso de Kasteleyn em $D = cl\ (\Delta)$ com tripla $(N^-, M, N^+) = (N^-_\Delta(q), M_\Delta(q), N^+_\Delta(q))$. Então existe um peso de Kasteleyn em $D^n = cl\ (\Delta^n)$ com tripla $(N^-_{\Delta^n}, M_{\Delta^n}, N^+_{\Delta^n})$, onde*

$$N^-_{\Delta^n} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & (-1)^{n+1}N^- \\ & 0 & 0 \\ & & \vdots \end{pmatrix}, N^+_{\Delta^n} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ & 0 & 0 \\ (-1)^{n+1}N^+ & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$M_{\Delta^n} = \begin{pmatrix} M & N^+ & 0 & \dots & 0 \\ N^- & M & N^+ & \dots & 0 \\ 0 & N^- & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M \end{pmatrix},$$

Assim, $M_{D^n}(p_1, \overline{p_2}, ..., \overline{p_N}, q) = {p_1}^{-1} N^-_{\Delta^n}(q) + M_{\Delta^n}(q) + p_1 N^+_{\Delta^n}(q)$.

Demonstração:

Aqui os vértices em $\Delta^n = \Delta_0 ... \Delta_{n-1}$ são nomeados na seguinte ordem: primeiro aqueles que pertencem a Δ_0 (com a mesma ordem aplicada na tripla de Kasteleyn para D), depois aqueles em Δ_1 (de novo com mesma ordem) e assim por diante. O peso de Kasteleyn em Δ^n designa para cada aresta contida em algum Δ_k o mesmo peso que em Δ. Para cada aresta que trespassa um corte $\xi'_{k+\frac{1}{2}}$ no sentido horário (resp. anti-horário), $0 \leq k < n-1$, designamos como peso a entrada correspondente em N^-_Δ (resp. N^+_Δ); note que estes pesos pertencem a $\mathcal{A}_q^*$. Finalmente, para uma aresta em D^n trespassando $\xi'_{-\frac{1}{2}} = \xi'_{n-\frac{1}{2}}$ no sentido horário (resp. anti-horário), designamos como peso $(-1)^{n+1}{p_1}^{-1}$ (resp. $(-1)^{n+1}p_1$) multiplicado pela entrada correspondente em N_Δ^- (resp. N_Δ^+). Daí, claramente obtemos as matrizes enunciadas; agora provaremos que esta construção obtem um peso de Kasteleyn em G_{D^n}.

Condições (a)-(c) na Definição 4.4 são claramente satisfeitas. Checaremos (d) para a base dos buracos. Isto é fácil para buracos pequenos e para os buracos secundários. Sejam ℓ o buraco amplo primário em G_D e seu n-recobrimento ℓ_n o buraco amplo em G_{D^n}. Para o peso de Kasteleyn em D, $\omega(\ell) = \sigma(\ell){p_1}^{\phi_1(\ell)}q^{\nu(\ell)} = (-1)^{k+1}p_1$, onde a borda do buraco amplo tem comprimento $2k$ (ver Definição 4.1). Temos que $\sigma(\ell_n) = (-1)^{nk+1}$, $\phi(\ell_n) = 1$ e $\nu(\ell_n) = 0$ e devemos checar que $\omega(\ell_n) = (-1)^{nk+1}p_1$, que é o caso por construção. $\square$

Para um polinômio de Laurent $P(X) = a(X-\lambda_1)...(X-\lambda_m)X^b$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$, a n-ésima potência radical é

$$\begin{aligned} P^{[n]}(X) &= a^n(X-(-1)^{n+1}\lambda_1^n)...(X-(-1)^{n+1}\lambda_m^n)X^b \\ &= \prod\nolimits_{\text{j=0,1,...,n-1}} P(\zeta^{2j+1}Y) \end{aligned}$$

onde $\zeta = -\exp(\pi i/n)$ e $Y^n = X$.

Observe que no produto acima, os termos contendo Y^k, $k \not\equiv 0 (\mod n)$, se cancelam. Sejam

$$\Gamma_k(x_1, ..., x_m) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m} x_{i_1}...x_{i_k}$$

as funções simétricas usuais. Se $P(X) = (a_mX^m + ... + a_0)X^b = a_m(X-\lambda_1)...(X-\lambda_m)X^b$, então claramente $P^{[n]}(X) = (a_m^{[n]}X^m + ... + a_0^{[n]})X^b$, onde

$$\begin{aligned} a_k^{[n]} &= (-1)^{m-k}a_m^n\Gamma_{m-k}((-1)^{n+1}\lambda_1^n, ..., (-1)^{n+1}\lambda_m^n) \\ &= a_m^n\Gamma_{m-k}((-\lambda_1)^n, ..., (-\lambda_m)^n) \end{aligned}$$

A n-ésima *potência radical* de um polinômio $P(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)...(t-\lambda_m)$ é dado por $P^{[n]}(t) = (t-{\lambda_1}^n)(t-{\lambda_2}^n)...(t-{\lambda_m}^n)$.

Proposição 5.2 *Seja Δ um track segment periódico com $(N-1)$ buracos, $D = cl\ \Delta$, $\overline{p_2}, ..., \overline{p_N}, \overline{q}$ números complexos fixos, $P_1(p_1) = \Phi_D(p_1, \overline{p_2}, ..., \overline{p_N}, \overline{q})$ e $P_n(p_1) = \Phi_{D^n}(p_1, \overline{p_2}, ..., \overline{p_N}, \overline{q})$. Então P_n é a n-ésima potência radical de P_1.*

Demonstração:

Seja $\zeta = -\exp(\pi i/n)$ e $r^n = p_i$. Seja $\tilde{M}$ a matriz diagonal em blocos com blocos $(\zeta^{2k+1}r)^{-1}N_\Delta^-(q) + M_\Delta(q) + (\zeta^{2k+1}r)N_\Delta^+(q)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ onde o determinante é claramente $P_1^{[n]}$. Cheque que $\tilde{M} = X^{-1} M_{A^n}(p_1, \overline{p_2}, ..., \overline{p_N}, \overline{q})X$ onde X é o produto da matriz diagonal $diag(I, \zeta r I, ..., \zeta^{n-1} r^{n-1} I)$ e a transformada discreta matriz em blocos de Fourier, onde $(j, k) -$ bloco é $\zeta^{2jk} I$, $j, k = 0, ..., n-1$. Segue do teorema 3.2que o coeficiente líder de P_n é a n-ésima potência do coeficiente líder P_1. $\square$