4
Matrizes e polinômios do fluxo

Segue neste capítulo a construção da matriz de Kasteleyn M_D, temos $\det M_D = \Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q)$, o polinômio q-fluxo de D, onde Δ é um track segment periódico com $(N-1)$ buracos e $D = cl\ \ \Delta$ é um disco com buracos. O polinômio q-fluxo $\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q)$ irá contar coberturas com respeito aos fluxos (em $p_1, p_2, ..., p_N$) e ao volume (na variável formal q).

Seja Δ um track segment periódico com $(N-1)$ buracos, $D = cl\ \ \Delta$ é um disco com buracos e $\xi^{'}$ um corte induzido em D e $\xi^{i}, i > 1$ os cortes secundários. O *grafo de adjacência* G_D de um disco quadriculado com buracos D é um grafo orientado cujos vértices são centros de quadrados de D e cujas arestas associam vértices de quadrados que compartilham um mesmo lado, sempre orientado de preto para branco. As setas dominós de uma cobertura são arestas em G_D. Uma aresta cruza ξ no sentido anti-horário (resp. horário) se ela parte da colagem α_0 (resp. α_1) e entra pelo α_1 (resp. α_0). Seja $C_1(D)$ o conjunto de somas formais (com coeficientes inteiros) de arestas de G_D. Seja $Z_1(D) \subseteq C_1(D)$ o subgrupo de somas formais tais que a cada vértice de G_D a soma dos coeficientes de arestas adjacentes é zero.

Existe uma base natural para $Z_1(D)$: a base dos buracos. Observe que D e G_D estão mergulhados no $\mathbb{R}^2$. As componentes conexas limitadas do complemento do grafo G_D são os *buracos do grafo* G_D: cada buraco define um elemento da base dos buracos, como segue. Os buracos do grafo limitados por quatro arestas são chamados de *buracos pequenos*. A base s_i correspondente a um buraco pequeno consiste daquelas quatro arestas orientadas no sentido anti-horário (aqui uma aresta branco-para-preto é identificada como menos a aresta com a orientação original preto-para-branco). Os buracos restantes do grafo são chamados de *buraco amplo*. Para obter cada ℓ_i associado ao buraco amplo correspondente, adicione as arestas contidas na borda do respectivo buraco amplo, orientando-as de modo que o buraco amplo esteja à esquerda de cada aresta.

Um *circuito* em um grafo é um subgrafo; assim, um circuito é uma curva simples fechada contida em G_D. Circuitos orientados geram $Z_1(D)$: cada s_i é um circuito orientado e cada ℓ é a soma de circuitos orientados disjuntos. A decomposição da base dos buracos de um circuito c no sentido anti-horário é muito geométrica. Da região do plano cercada por c, remova G_D para obter uma união disjunta de buracos $h_1, ..., h_F$: claramente temos $c = \sum h_i$.

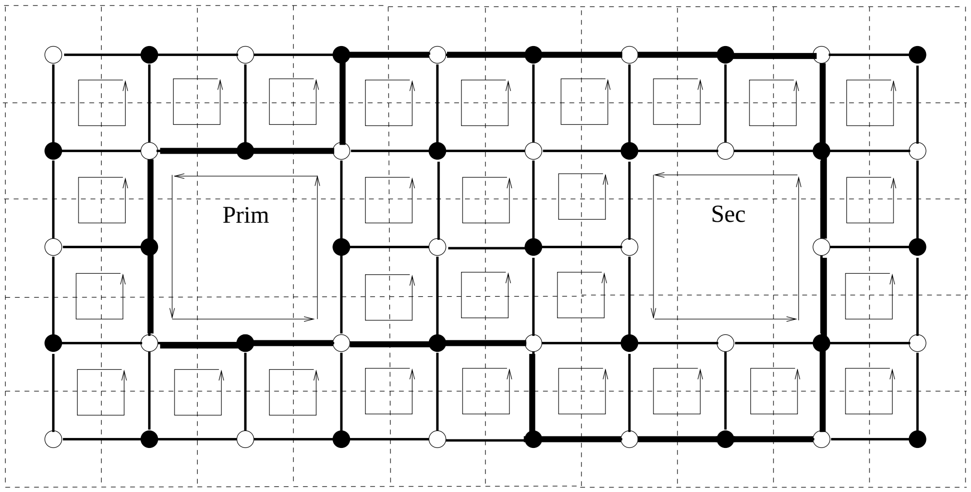

Figure 4.1: s_i, ℓ_i e c_i em G_D.

Definição 4.1 *Na base dos buracos, o fluxo* $\phi : Z_1(D) \to \mathbb{Z}$*, volume* $\nu : Z_1(D) \to \mathbb{Z}$ *e sinal* $\sigma : Z_1(D) \to \{\pm 1\}$ *possuem os valores*

– $\phi(s_i) = 0$, $\phi_i(\ell_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$;

– $\nu(s_i) = 1$, $\nu(\ell) = 0$;

– $\sigma(s_i) = -1$, $\sigma(\ell) = (-1)^{k+1}$, *onde a borda do buraco amplo tem comprimento* $2k$.

Proposição 4.2 *Para qualquer circuito orientado c,*

(a) o fluxo $\phi(c) = -1, 1,$ *ou* 0 *dependendo se c percorre o buraco considerado no sentido horário, anti-horário ou nenhum desses dois casos;*

(b) o volume $\nu(c)$ *é o número de buracos pequenos cercados por c, com um sinal negativo se c tem sentido horário;*

(c) o sinal $\sigma(c)$ *é igual a* $(-1)^{p+b+k+1}$*, onde p e b são os números de vértices pretos e brancos no interior de c e* $2k$ *é o comprimento de c.*

Demonstração:

Seja c um circuito orientado arbitrário. Para o fluxo e o volume, a proposição segue diretamente da decomposição de $c = h_1, ..., h_F$ na base dos buracos. Para o sinal, sejam p, b e k como acima. Pela definição, $\sigma(c) = \prod \sigma(h_i)$ e

$$\sigma(c) = (-1)^{F+\sum_i k_i},$$

onde $2k_i$ é o comprimento da borda de h_i. Note que o número total de aresta no interior ou em c é $E = k+\sum_i k_i$. Além disso, o número de vértices de G_D no interior ou em c é $V = 2k+p+b$. Como a característica de Euler do disco com buracos limitado por c é 1, $F-E+V = 1$ e $F = E-V+1 = 1-k-p-b+\sum_i k_i$, assim

$$\sigma(c) = (-1)^{p+b+k1}.$$

□

Até agora, ϕ, σ e ν foram definidos em $Z_1(D)$. Mas, na introdução, foram definidos $\phi(t; t_0)$ e $\sigma(t; t_0)$ para uma cobertura t relativa a uma cobertura base t_0. Agora, esta antiga definição de ϕ e σ será relacionada com uma nova. Note que uma cobertura t não pertence a $Z_1(D)$ mas a diferença $t - t_0$ pertence.

Corolário 4.3 *Seja t uma cobertura arbitrária de um disco com buracos D com cobertura base t_0. Então $\phi(t; t_0) = \phi(t - t_0)$ e $\sigma(t; t_0) = \phi(t - t_0)$.*

Demonstração:

Isto segue da proposição tendo em mente que a diferença entre duas coberturas é uma soma de circuitos orientados disjuntos c_i que cercam as regiões das coberturas, tal que $p_i = b_i$ e $\sigma(c_i) = (-1)^{k_i+1}$. □

Seguindo este corolário, considere $\nu(t; t_0) = \nu(t - t_0)$, o *volume* de uma cobertura t relativa a uma cobertura base t_0. Observe que, $\phi(t; t_0) = \phi(t, \xi) - \phi(t_0, \xi)$ para um corte arbitrário ξ.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa com unidade sobre $\mathbb{C}$; neste trabalho, $\mathcal{A}$ é tipicamente um anel de polinômios de Laurent em uma ou mais variáveis: $\mathcal{A}_q = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ e $\mathcal{A}_{p_1,\ldots,p_N,q} = \mathbb{C}[p_1, p_1{}^{-1}, ..., p_N, p_N{}^{-1}, q, q^{-1}]$. Uma atribuição de elementos inversíveis de $\mathcal{A}$, i.e., elementos do grupo multiplicativo $\mathcal{A}^*$, às arestas de G_D é um $\mathcal{A}^*$-peso em D que torna G_D um grafo com pesos. Um peso ω é portanto uma função do conjunto de arestas em $\mathcal{A}^*$ e pode naturalmente ser identificado como um homomorfismo $\omega : C_1(D) \to \mathcal{A}^*$. Em particular, para uma cobertura t, $\omega(t)$ é o produto dos pesos das arestas em t. Um circuito orientado c é a soma de suas arestas que são orientadas preto-para-branco menos a soma das arestas que restaram: $\omega(c)$ é o produto dos pesos das arestas na primeira classe dividido pelo produto dos pesos das arestas restantes.

Definição 4.4 *Sejam Δ um track segment periódico com $(N-1)$ buracos, $D = cl\ \Delta$ um disco com buracos, ξ' um corte induzido no buraco 1 (primário)* *e* ξ^i *,* $i > 1$ *os cortes secundários. Um* $\mathcal{A}^*{}_{p_1,\ldots,p_N,q}$*-peso* ω *em* D *é um peso de Kasteleyn se:*

(a) os pesos das arestas interiores a Δ *pertencem a* $\mathcal{A}^*{}_{p_2,\ldots,p_N,q}$*;*

(b) os pesos das arestas que cruzam ξ' *no sentido anti-horário pertencem a* $p_i\mathcal{A}^*{}_q$*;*

(c) os pesos das arestas que cruzam ξ' *no sentido horário pertencem a* $p_i{}^{-1}\mathcal{A}^*{}_q$*;*

(d) para qualquer circuito orientado c, $\omega(c) = \sigma(c)p_1{}^{\phi_1(c)}...p_N{}^{\phi_N(c)}q^{\nu(c)}$*.*

Proposição 4.5 *Qualquer track segment* Δ *periódico com* $(N-1)$ *buracos admite pesos de Kasteleyn. Além disso, dado uma cobertura base* t_0 *de* $D = cl\ \Delta$*, para qualquer cobertura* t *de* D *temos que* $\omega(t) = \omega(t_0)\sigma(t-t_0)p_i{}^{\phi(t-t_0)}q^{\nu(t-t_0)}$*.*

Demonstração:

Selecione uma árvore maximal dentro de G_Δ e designe pesos arbitrários em $\mathcal{A}^*{}_q$ às arestas desta árvore; em particular, podemos designar 1 a todas as arestas desta árvore.

Dada uma aresta e em G_D que não está na árvore, existe um único circuito orientado positivamente c_e onde as arestas são também e ou arestas na árvore. A relação $\omega(c_e) = \sigma(c_e)p_1{}^{\phi_1(c_e)}...p_N{}^{\phi_N(c_e)}q^{\nu(c_e)}$, que ω deve satisfazer pela condição (d) acima, agora impõe o valor do peso de e. Isto define um peso ω em G_D.

Se e está em Δ, então c_e está também em Δ e portanto $\phi_1(c_e) = 0$: o peso dado a e pertence a $\mathcal{A}^*{}_{p_2,\ldots,p_N,q}$, verificando a condição (a). Se e cruza ξ' no sentido anti-horário (resp. horário), temos $\phi_1(c_e) = 1$ (resp. -1), verificando a condição (b) (resp. condição (c)).

Seja

$$W : Z_1(D) \to \mathcal{A}^*$$

$$W(c) = \omega(c)\sigma(c)p_1{}^{-\phi_1(c)}...p_N{}^{-\phi_N(c)}q^{-\nu(c)}$$

Esta função é um homomorfismo de grupos e igual a 1 em todos os circuitos c_e orientados positivamente, que geram $Z_1(D)$. Assim, W é constante igual a 1, provando que a condição (d) é satisfeita para circuitos orientados arbitrários.

Deduzindo assim o valor de $\omega(t)$ para uma cobertura t: dado uma cobertura base t_0 fixa, escreva

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \omega(t_0)\omega(t-t_0) \\
&= \omega(t_0)\sigma(t-t_0)p_1{}^{\phi_1(t-t_0)}...p_N{}^{\phi_N(t-t_0)}q^{\nu(t-t_0)} \\
&= \omega(t_0)\sigma(t;t_0)p_1{}^{\phi_1(t;t_0)}...p_N{}^{\phi_N(t;t_0)}q^{\nu(t;t_0)}
\end{aligned}$$

Claramente, todos os pesos de Kasteleyn são obtidos por esta construção. □

Considere um track segmente periódico Δ com $(N-1)$ buracos, tendo n quadrados pretos e n quadrados brancos, $D = cl\ \ \Delta$ um disco com buracos, ξ' o corte induzido e um peso de Kasteleyn ω em G_D. Agora construíremos a matriz de Kasteleyn M_D $n \times n$ com coeficientes em $\mathcal{A}_{p_1,...,p_N,q}$. Comece nomeando os quadrados pretos e brancos de Δ (i.e., vértices de G_D); mais formalmente, seja η_p (resp. η_b) uma bijeção de $\{1, 2, ..., n\}$ ao conjunto de quadrados pretos (resp. brancos). Um par $\eta = (\eta_p, \eta_b)$ determina um sinal específico para uma cobertura t: $\sigma(t, \eta)$ é o sinal da permutação

$\eta_b^{-1} \circ t \circ \eta_p : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$

Na fórmula acima, t é interpretado como uma bijeção dos quadrados pretos para os quadrados brancos de D. Assim, uma cobertura t admite sinal uma vez que uma cobertura base t_0 ou η é dado: temos que $\sigma(t, t_0) = \frac{\sigma(t,\eta)}{\sigma(t_0;\eta)}$

Seja $(M_D)_{ij}$ o peso da aresta interligando $\eta_p(j)$ e $\eta_b(i)$, ou zero se nenhuma aresta existe. Pelas condições (a)-(c) na definição de peso de Kasteleyn, devemos escrever a matriz de Kasteleyn $M_D = {p_i}^{-1}N_\Delta^- + M_\Delta + p_i N_\Delta^+$ unicamente para três matrizes com entradas em $\mathcal{A}_{p_1,...,p_N,q}$: $(N_\Delta^-, M_\Delta, N_\Delta^+)$, é a *tripla de Kasteleyn* associada ao peso de Kasteleyn. Entradas não-nulas em N_Δ^- (resp. N_Δ^+) correspondem a arestas cruzando ξ' no sentido horário (resp. anti-horário); entradas não-nulas em M corresponde a arestas em Δ.

Seja $\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q) = \det M_D$ o polinômio do fluxo de D ou Δ. Esta notação assume implicitamente dois fatos: a dependência inofensiva na escolha do corte e o peso de Kasteleyn. Mais precisamente, se $D = cl\ \ \Delta = cl\ \ \Delta'$ e os pesos de Kasteleyn são indicados para Δ e Δ' então $\det({p_i}^{-1}N_{\Delta'}^- + M_{\Delta'} + p_i N_{\Delta'}^+)$ pode ser obtido a partir de $\det({p_i}^{-1}N_\Delta^- + M_\Delta + p_i N_\Delta^+)$ através de multiplicação por um fator da forma $\pm {p_i}^* q^*$. Isto segue da proposição abaixo, que fornece uma interpretação combinatória para $\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q)$.

Proposição 4.6 *Sejam Δ um track segment periódico com $(N-1)$ buracos, $D = cl\ \ \Delta$ um disco com buracos, fixe um peso de Kasteleyn ω em G_D, um par de bijeções η, uma cobertura base $t_0 \in T_D$ e seja M_D a matriz de Kasteleyn correspondente. Seja $\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q) = detM_D$ o polinômio do q-fluxo de D. Assim, temos que*

$$\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q) = \sigma(t_0; \eta)\omega(t_0) \sum_{t \in T_D} p_1^{\phi_1(t;t_0)} ... p_N^{\phi_N(t;t_0)} q^{\nu(t;t_0)}.$$

Demonstração:

Coberturas de D correspondem a monômios não-nulos na expansão do $detM_D$. Daí, para uma cobertura base t_0 fixa,

$$detM_D = \sum_t \sigma(t;\eta)\omega(t) = \sigma(t_0;\eta)\omega(t_0)\sum_t p_1{}^{\phi_1(t-t_0)}...p_N{}^{\phi_N(t-t_0)}q^{\nu(t-t_0)}$$

a fórmula desejada para $\Phi_D(p_1, p_2, ..., p_N, q)$. $\square$

Na Figura 4.2 temos um exemplo de um disco com um buraco. As linhas grossas indicam uma cobertura t_0. O determinante da matriz de Kasteleyn correspondente é

$$\det M_D = pq^{13} + q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 6q + 5 + 2q^{-1} + q^{-2}$$

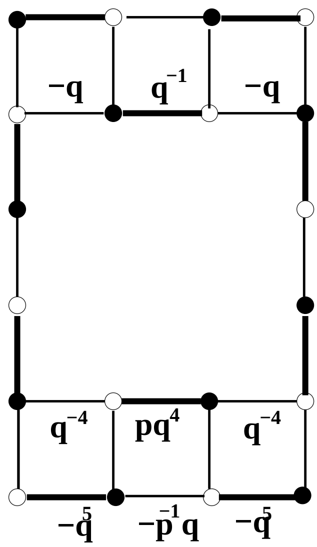

Figure 4.2: Peso de Kasteleyn