2
Definições Preliminares

Na introdução foi apresentado o conceito de superfície quadriculada bicolorida e balanceada. Os discos com buracos estão mergulhados em $\mathbb{R}^2$, mas não necessariamente estão no plano quadriculado.

Seja T_S o conjunto das coberturas de dominós de uma superfície quadriculada S. Um *caminho* $v_0v_1...v_n$ em S é uma sequência de vértices adjacentes. Um caminho $v_0v_1...v_n$ *gira à esquerda* (resp. *direita*) em v_i se v_{i-1}, v_i e v_{i+1} são vértices de um quadrado à esquerda (resp. direita) de ambas arestas $v_{i-1}v_i$ e v_iv_{i+1}; por outro lado, se v_i é um ponto interior em S, o caminho *segue reto* em v_i. Generalizando, a *curvatura* do caminho $...v_{i-1}v_iv_{i+1}...$ em v_i é 1, 0 ou -1 se v_i está no interior de S e o caminho gira à esquerda, segue reto ou gira à direita em v_i, respectivamente; se v_i é um vértice de borda, seja n o número de quadrados no ângulo $v_{i-1}v_iv_{i+1}$: a curvatura em v_i é $+(2-n)$, com o sinal dependendo da orientação do ângulo. Claramente, a definição de curvatura de vértices do interior pode ser considerada como um caso especial da definição mais complicada para vértice da borda. Um caminho é *simples* se seus vértices são distintos e *fechado* se $v_0 = v_n$, e nesse caso considere $v_m = v_m$ mod n.

Em um disco com buracos mergulhado no $\mathbb{R}^2$ escolheremos um buraco para ser o *buraco primário* e os outros serão chamados de *buracos secundários*. Sem perda de generalidade, considere como buraco primário o buraco 1.

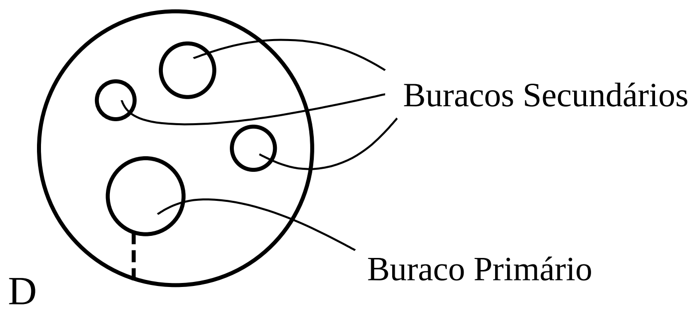

Figure 2.1: Buraco primário e Buracos secundários

Um *corte* é um caminho simples em um disco quadriculado com buracos unindo borda externa à uma das bordas internas e com exatamente um vértice em cada componente da borda. Considere um disco com buracos como a justaposição circular de discos com buracos quadriculados com *identificações* específicas. Cortes são desenhados e os discos com buracos entre cortes consecutivos são chamados *track segments*. Mais precisamente, um *track segment* Δ é um disco quadriculado com buracos cuja borda externa é dividida no sentido anti-horário em quatro arcos β_i, α_0, β_o e α_1 (para borda interna, colagem 0, borda externa e colagem 1. Colagens são orientadas de β_o para β_i: isto coincide com a orientação da borda para α_1 mas não para α_0. Um track segment periódico é aquele obtido de um disco com buracos balanceado D por um corte simples.

A *forma* de um caminho $v_0...v_n$ é a sequência das $n-1$ curvaturas do caminho em cada v_i, $i = 1, ..., n-1$. A *justaposição* dos track segments Δ e $\Delta^{'}$ é natural: α_1 e $\alpha_0^{'}$ devem ter a mesma forma e a identificação aresta-por-aresta, produzindo um track segment maior $\Delta\Delta^{'}$ com colagens α_0 e $\alpha_1^{'}$. O disco com buracos D é o *fechamento* $cl\ \Delta$ do track segment periódico Δ e é obtido identificando α_1 a α_0; o corte resultante é dito ser *corte induzido* por Δ.

A justaposição Δ^n de n cópias de um track segment periódico Δ segundo um fechamento produz o *n-recobrimento* $D^n = cl\ (\Delta^n)$. Similarmente, o recobrimento D^∞ é denotada por $\Delta^{\mathbb{Z}}$, uma *faixa* quadriculada com buracos infinita e periódica. A projeção canônica $\pi : D^\infty \to D$ e a *translação por um período* $\tau : D^\infty \to D^\infty$ são definidas como usualmente. Note que τ leva vértices vizinhos para vértices vizinhos, satisfaz $\pi \circ \tau = \pi$ e, para algum $p \in D^\infty$ e alguma curva γ de p para $\tau(p)$, $\pi \circ \gamma$ percorre D uma vez no sentido anti-horário. A projeção π induz uma notação das componentes infinitas da borda de D^∞ como internas e externa tão bem quanto as orientações em ambas componentes da borda; continue considerando essas orientações como sentido anti-horário e horário. A notação $\Delta^{\mathbb{Z}}$ sugere que esta faixa seja vista como a justaposição bilateral infinita de track segments iguais

$$D^\infty = \Delta^{\mathbb{Z}} = ...\Delta_{-2}\Delta_{-1}\Delta_0\Delta_1\Delta_2...$$

O corte relacionado ao buraco primário, que no nosso caso é o buraco 1, será denotado por $\xi^{'}$ e chamado de corte primário. Já os cortes relacionados aos buracos secundários serão denotados por ξ^i , $1 < i \leq N$ e chamados de cortes secundários. E para ambos os casos será o corte denotado por ξ. O corte induzido entre Δ_i e Δ_{i+1} é denotado por $\xi^{'}_{i+\frac{1}{2}}$. Note que τ leva Δ_i para Δ_{i+1} e $\xi^{'}_{i+\frac{1}{2}}$ para $\xi^{'}_{i+\frac{3}{2}}$.

Considere que um dominó cruza um corte ξ no sentido anti-horário (resp.

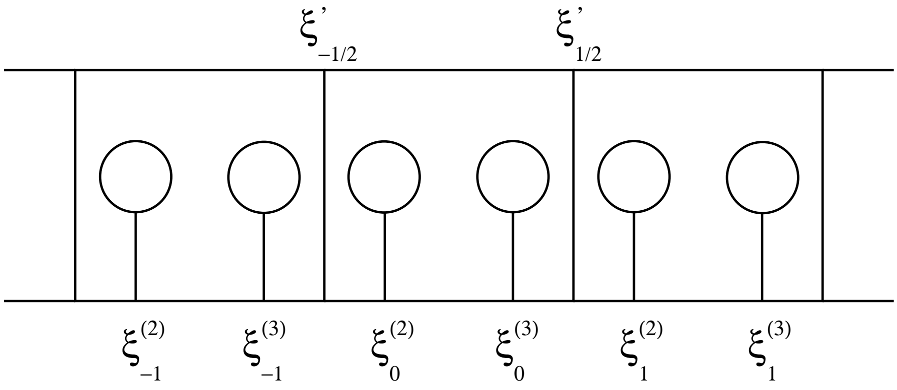

Figure 2.2: Cortes induzido entre Δ_i e Δ_{i+1}

horário) se a seta dominó sai da colagem α_0 (resp. α_1) e entra no α_1 (resp. α_0).

Definição 2.1 *Seja D um disco quadriculado com buracos, ξ um corte induzido e $t \in T_{D^\infty}$ uma cobertura de D^∞. Considere as setas dominós dentro de cada dominó em t, orientada do quadrado preto para o branco. O fluxo $\phi(t,\xi)$ de t relativo a ξ é o número de setas cruzando ξ em sentido anti-horário menos o número de setas cruzando ξ em sentido horário.*

Lema 1 *Seja Δ um track segment periódico com buracos, $D = cl\ \Delta$, $t \in T_{D^\infty}$ e considere D^∞ com cortes induzidos $\xi_{n+\frac{1}{2}}$. O valor de $\phi(t;\xi_{n+\frac{1}{2}})$ é o mesmo para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Os números de quadrados pretos e brancos em Δ_0 são iguais. E, os números de quadrados pretos e brancos na união X de todos os dominós em t com pelo menos um quadrado em Δ_0 são também iguais. Mas $x = \phi(t;\xi_{\frac{1}{2}}) - \phi(t;\xi_{-\frac{1}{2}})$ é o número de quadrados brancos em $X - \Delta_0$ menos o número de quadrados pretos em $X - \Delta_0$ e portanto $x = 0$. $\square$

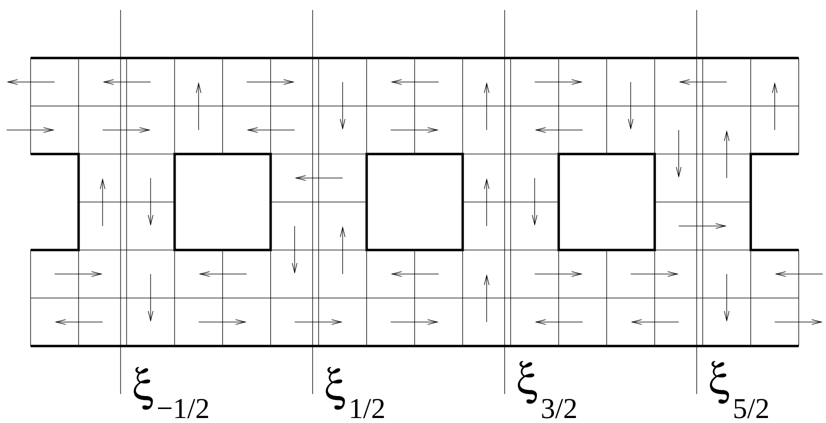

Figure 2.3: Fluxos

Existe um conceito natural de *translação de uma cobertura* t_{D^∞} de D^∞ : $\tau(t_{D^\infty})$ é formado pelas imagens segundo τ dos dominós de t_{D^∞}. Uma cobertura t_{D^∞} é *periódica* se $\tau(t_{D^\infty}) = t_{D^\infty}$. Uma cobertura t_D de D induz uma cobertura $\pi^{-1}(t_D)$ de D^∞: claramente, uma cobertura de D^∞ é induzida por uma cobertura de D se e somente se ela é periódica.

Um caminho é um *zig-zag* se ele gira à esquerda e à direita alternadamente. Certos discos quadriculados com buracos D admitem um zig-zag ζ simples fechado: tendo em mente que D está mergulhado no plano, ζ divide o plano em uma região interna e uma região externa e divide, por sua vez, D como a união disjunta de componentes conexas. Usualmente estas componentes consistem de dois discos com buracos. Se, contudo, o zig-zag toca a borda de D, o número de componentes deve aumentar mas elas sempre serão discos com buracos; o zig-zag também pode coincidir com uma das duas componentes da borda de D. Seja D um disco com $N > 1$ buracos, um deles primário. Uma *parede* é um zig-zag fechado que dá uma volta ao redor do buraco primário tal que o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados pretos do lado de dentro (resp. fora) do zig-zag fechado.

Proposição 2.2 *Seja D um disco quadriculado com buracos com uma parede ζ. Nenhum dominó em nenhuma cobertura de D trespassa ζ, isto é, nenhuma cobertura atravessa uma parede.*

Demonstração: Seja X o conjunto de quadrados de D na componente de fora de $\mathbb{R}^2 - \zeta$ e $Y \supseteq X$ é a união de todos os dominós com pelo menos um quadrado em X. Ambos X e Y são balanceados, mas todos os quadrados em $Y - X$ são de mesma cor. Portanto $Y - X$ é vazio. $\square$

Um disco com buracos D sem paredes é dito *livre de paredes*.

Uma *escada* em uma cobertura é uma sequência de dominós paralelos lado a lado, tal que dois dominós vizinhos sempre tocam-se ao longo de uma aresta do lado maior, cada dominó na escada tem duas vizinhanças e estas duas vizinhanças tocam o dominó em quadrados diferentes. Então, escadas são periódicas ou bi-infinita (em uma faixa). Escadas periódicas em uma cobertura estão sempre contidas entre duas paredes.

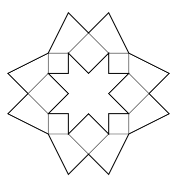

Figure 2.4: Escada

Um disco com buracos D pode ser decomposto como uma união de escadas e discos com buracos, tal que qualquer cobertura de D restringe-se a uma cobertura de cada escada e disco com buracos.

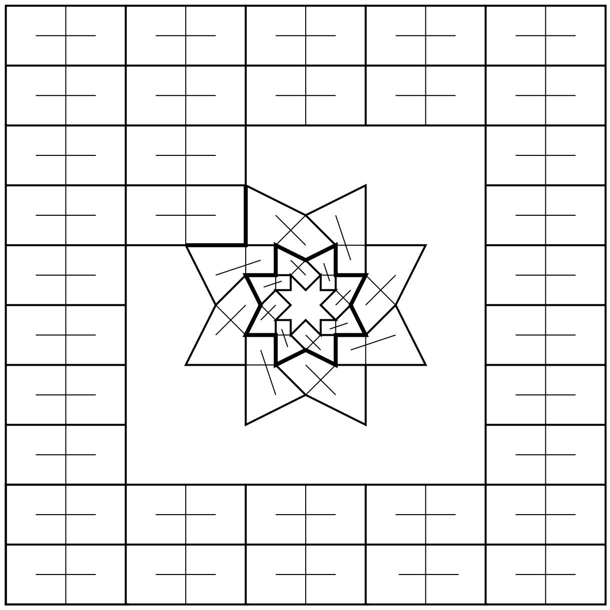

Figure 2.5: D como união de escadas e discos com buracos

Corolário 2.3 *Seja D um disco quadriculado com buracos admitindo $n+1$ paredes primárias paralelas, $n \geq 0$. Então*

$$\Phi_D(p_1, ..., p_N, q) = P_{D_0} \cdot P_{D_1}$$

onde

$$\begin{aligned} P_{D_0}(p_1, ..., p_N, q) &= \Phi_{D_0}(p_1, p_2, ..., p_M, q) \\ P_{D_1}(p_1, ..., p_N, q) &= \Phi_{D_1}(p_1 q^{\diamondsuit}, p_{M+1}, ..., p_N, q) \end{aligned}$$

e $\diamondsuit$ é um inteiro cujo valor exato aqui não é importante.

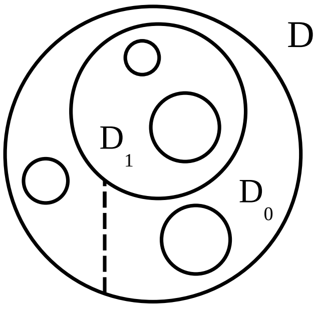

Figure 2.6: Discos com buracos D_0 e D_1

Isto reduz o problema ao estudo de discos com buracos sem paredes. A partir daqui, considere discos com buracos livre de paredes mas esta hipótese só será crucial no último capítulo.

A curvatura total de um caminho fechado é a soma das curvaturas em seus vértices. Vértices internos de um zig-zag alterna entre as curvaturas 1 e -1 e zig-zags fechados tem curvatuta total 0.

Seja $v \in \partial S$ um vértice da borda de uma superfície quadriculada orientada S: a *curvatura da borda* em v é $2 - n_v$ se existem n_v quadrados adjacentes a v. A *curvatura total da borda* de uma superfície quadriculada compacta é a soma das curvaturas de cada vértice da borda. A próxima proposição é a versão quadriculada do Teorema Gauss-Bonnet, note que o usual 2π é substituído por 4.

Proposição 2.4 *A curvatura total da borda de uma superfície quadriculada compacta orientada S é $4\chi(S)$.*

A característica de Euler de S é $\chi(S) = F - E + V$, o número de faces (quadrados) menos o número de arestas (lados dos quadrados) mais o número de vértices (internos e da borda).

Demonstração: Seja V_i o número de vértices internos. Contando vértices face por face e aresta por aresta temos

$$V = V_i + \sum_{v \in \partial S} 1; \qquad 4F = 4V_i + \sum_{v \in \partial S} n_v; \qquad 2E = 4V_i + \sum_{v \in \partial S} (n_v + 1)$$

Essas três identidades implicam

$$4(F - E + V) = \sum_{v \in \partial S} (2 - n_v)$$

o resultado esperado. □