

# 1

## Introdução

Uma *superfície quadriculada* é uma justaposição de quadrados um ao lado do outro formando uma superfície (usualmente com bordo) tal que vértices de quadrados que estão no interior da superfície pertencem precisamente a quatro quadrados e vértices na borda pertencem a um número finito de quadrados. Um exemplo simples de uma superfície quadriculada é o *plano quadriculado*,  $\mathbb{R}^2$  dividido em quadrados unitários com vértices em  $\mathbb{Z}^2$ . Uma superfície quadriculada compacta tem um número finito de quadrados e normalmente será *bicolorida* e *balanceada*, isto é, pintamos os quadrados de preto e branco tal que quadrados com um lado comum tem cores opostas, e o número de quadrados pretos é igual ao número de quadrados brancos.

Seja  $D$  um disco quadriculado com buracos balanceado,  $D$  pode ser mergulhado em  $\mathbb{R}^2$ . Assumimos que  $D$  é um subconjunto do plano, permitindo uso livre de uma orientação em  $D$  e em suas bordas externa e internas.

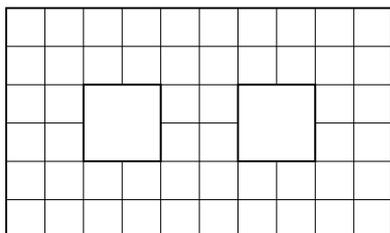


Figure 1.1: Exemplo 1 de Disco com Buracos

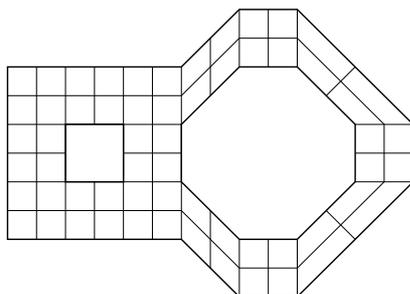


Figure 1.2: Exemplo 2 de Disco com Buracos

Seja  $T_D$  o conjunto de coberturas por dominós de  $D$ . Para uma cobertura  $t \in T_D$ , desenhamos dentro de cada dominó uma *seta dominó* que vai do centro do quadrado preto para o centro do quadrado branco. Dadas as coberturas  $t_0, t_1 \in T_D$ , justaponha as setas dominós de  $t_1$  com as setas dominós contrárias (i.e., sentido branco para preto) de  $t_0$ : isto produz um número finito de curvas orientadas simples fechadas. O *fluxo*  $\phi(t_1; t_0)$  de  $t_1$  relativo a  $t_0$  conta cada curva com pesos  $-1, 0$  ou  $1$  dado pela sinuosidade de cada curva no disco com buracos  $D$ .

Uma cobertura  $t$  induz uma bijeção  $\beta_t$  dos quadrados pretos para os quadrados brancos. Fixando uma cobertura base  $t_0 \in T_D$  arbitrária, defina o *sinal*  $\sigma(t; t_0)$  de uma cobertura  $t$  relativa a  $t_0$  como o sinal da permutação  $\beta_t \circ \beta_{t_0}^{-1}$  sobre o conjunto dos quadrados brancos.

O polinômio  $q$ -fluxo de  $D$  dado por

$$\Phi_D(p_1, \dots, p_N, q) = \sum_{t \in T_D} p_1^{\phi_1(t; t_0)} \dots p_N^{\phi_N(t; t_0)} q^{\nu(t; t_0)}$$

conta coberturas de  $D$  com respeito aos fluxos (em  $p_1, \dots, p_N$ ) e ao volume  $\nu$  (na variável formal  $q$ ). A idéia básica da  $q$ -contagem é simples: ao invés de contarmos os elementos de um conjunto diretamente (como em Combinatória Clássica) introduzimos no problema um índice e usamos este índice como o expoente da variável  $q$ . Assim, ao invés de tentarmos encontrar inteiros, tentamos agora encontrar polinômios ou séries formais em  $q$ .

O ingrediente principal nas demonstrações é o fato de o polinômio  $q$ -fluxo  $\Phi_D(p_1, \dots, p_N, q)$  ter duas interpretações algébricas distintas. A primeira delas é familiar:  $\Phi_D(p_1, \dots, p_N, q)$  é o determinante da matriz de Kasteleyn  $M_D$ . E a segunda interpretação requer a construção de uma outra matriz: para cada fluxo  $f$ , o coeficiente de  $p_i^f$  em  $\Phi_D(p_1, \dots, p_N, q)$  é o traço da *matriz conexão*, a construção da matriz conexão está no capítulo 6.

As matrizes de Kasteleyn e conexão comportam-se bem com respeito ao  $n$ -recobrimento  $D^n$  de um disco com buracos  $D$ . Uma característica importante da matriz conexão é o simples fato que, pela definição, ela tem entradas não-negativas quando  $q > 0$ . Isto permite o estudo dos seus autovalores (e portanto, seu traço) fazendo uso do teorema de Perron para matrizes não-negativas.

No capítulo 2, introduzimos as notações usadas neste trabalho, como por exemplo disco com buracos livre de paredes, e uma versão discreta do teorema de Gauss-Bonnet.

No capítulo 3, definimos *funções altura* para discos com buracos e descrevemos funções altura para faixas quadriculadas com buracos infinitas e periódicas.

No capítulo 4, definimos a *tripla de Kasteleyn* associada ao *peso de Kasteleyn* em  $D$ . O polinômio  $q$ -fluxo  $\Phi_D(p_1, \dots, p_N, q)$  é o determinante de uma matriz obtida a partir da tripla de Kasteleyn. No capítulo 5, mostramos como a tripla de Kasteleyn e o polinômio  $q$ -fluxo se comportam com respeito ao  $n$ -recobrimento do disco com buracos  $D$ .

Capítulo 6 descreve a matriz conexão. Capítulo 7 é dedicado a positividade das entradas de certas matrizes, que é necessário para o uso do teorema de Perron. Finalmente, segue a prova da generalização do teorema 7.7 encontrado em [3] para discos com buracos.