

Paula Monteiro Baptista

Coberturas de discos com buracos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Programa de Pós-graduação em Matemática Pura

Rio de Janeiro
Abril de 2006



Paula Monteiro Baptista

Coberturas de discos com buracos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Abril de 2006



Paula Monteiro Baptista

Coberturas de discos com buracos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Jorge Joaquín Delgado Gómez

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Samuel Jurkiewicz

COPPE — UFRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 07 de Abril de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Paula Monteiro Baptista

Graduou-se em Bacharelado e Licenciatura em Matemática (UFF, Universidade Federal Fluminense) em 2003.

Ficha Catalográfica

Baptista, Paula Monteiro

Coberturas de discos com buracos/ Paula Monteiro Baptista; orientador: Nicolau Corção Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

44 f: il. ; 29,7 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Coberturas por dominós. 3. Discos com buracos. 4. Funções Altura. 5. Matriz de Kasteleyn. I. Saldanha, Nicolau Corção. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Aos meus pais Paulo e Fátima
pelo amor, carinho e apoio dedicados,
e à minha linda irmã Melina.

Agradecimentos

Ao professor e grande mestre Nicolau Corção Saldanha pela dedicação, compreensão, paciência e principalmente, pela orientação em um assunto interessante.

Ao meu namorado Pedro Luiz, por tudo o que já vivemos, pelos planos futuros e pelo nosso amor.

À minha família, em particular, aos meus queridos avós Ernesto, Gracinda e Hermínia que sempre foram exemplos de determinação, e ao meu tio Carlos Alberto.

À CAPES e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos.

Aos meus eternos mestres, que me mostraram o que é ser um professor: Ana Isabel Spinola, Ana Maria Kaleff, Dinamérico Pombo Jr e Jorge Delgado.

Aos meus amigos de longa data: Celia Latini, Cristiane Salgueiro, Roberto Veiga e Samantha Luiz, vocês sempre estarão em meu coração.

Aos amigos da UFF: Alan Queiroz Omena, Alex Casati, Aline Madeira, André Brondani, Bruna Moustapha, Cassio Alves, Charlie, Cleber Fernandes, Cristina Levina, Érika Sillos, Henry Pereira, Leonardo Martins, Luciana Bon, Mirelle Motta, Paloma Berruezo, Renata do Valle, Renata Obadia, e Rômulo Rosa, a falta de tempo e caminhos diferentes na vida não foram capazes de apagar nossas amizades.

Aos amigos da PUC: André Urco, Aldo da Silva, Bernardo Pagnoncelli, Danielle Rezende, Débora Mondaini, Eduardo Monteiro, Jessica Kubrusly, Juliana Freire, Leandro Tavares, Luzia Tonon e Renato Alencar da Costa, pela ajuda em momentos difíceis e pela alegria em tantos momentos divertidos.

Aos professores do Departamento de Matematica da PUC-Rio pelo apoio.

Aos funcionários do Departamento de Matematica da PUC-Rio.

Resumo

Baptista, Paula Monteiro; Saldanha, Nicolau Corção. **Coberturas de discos com buracos**. Rio de Janeiro, 2006. 44p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Coberturas de um disco quadriculado com buracos D são contados de acordo com *volume* (na variável formal q) e *fluxo* (em p_1, p_2, \dots, p_N). Consideramos propriedades algébricas dos resultados gerados pela função $\Phi_D(p_1, p_2, \dots, p_N, q)$. Para $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \widehat{\overline{p}_i}, \dots, \overline{p}_N, \overline{q} > 0$ o polinômio $f(p_i) = \Phi_D(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, p_i, \dots, \overline{p}_N, \overline{q})$ tem todas as raízes reais (e negativas).

Palavras-chave

Coberturas por dominós; Discos com buracos; Funções Altura; Matriz de Kasteleyn.

Abstract

Baptista, Paula Monteiro; Saldanha, Nicolau Corção. **Tilings of disks with holes**. Rio de Janeiro, 2006. 44p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Tilings of a quadriculated disk with holes D are counted according to *volume* (in the formal variabel q) and *flux* (in p_1, p_2, \dots, p_N). We consider algebraic properties of the resulting generating function $\Phi_D(p_1, p_2, \dots, p_k, q)$. For $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \widehat{\overline{p}_i}, \dots, \overline{p}_n, \overline{q} > 0$ the polynomial $f(p_i) = \Phi_D(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, p_i, \dots, \overline{p}_n, \overline{q})$ has all roots real numbers (and negative).

Keywords

Tilings by dominoes; Disks with holes; Height Functions; Kasteleyn Matrix.

Sumário

1	Introdução	10
2	Definições Preliminares	13
3	Funções Altura	19
4	Matrizes e polinômios do fluxo	24
5	Matrizes de Kasteleyn para coberturas	30
6	Coberturas de track segment com $(N - 1)$ buracos	33
7	A q -contagem, $q > 0$	37
	Referências Bibliográficas	41

Lista de figuras

1.1	Exemplo 1 de Disco com Buracos	10
1.2	Exemplo 2 de Disco com Buracos	10
2.1	Buraco primário e Buracos secundários	13
2.2	Cortes induzido entre Δ_i e Δ_{i+1}	15
2.3	Fluxos	15
2.4	Escada	16
2.5	D como união de escadas e discos com buracos	17
2.6	Discos com buracos D_0 e D_1	17
3.1	Uma função altura.	19
3.2	A mesma função altura para cortes diferentes.	21
3.3	Cortes obtidos por translação	22
4.1	s_i, ℓ_i e c_i em G_D .	25
4.2	Peso de Kasteleyn	29
7.1	Flop	37