Referências Bibliográficas

ALLEN, H. G.; BULSON, P. S. **Background to Buckling**, London, McGraw-Hill, 2001.

ALVES, R. V. **"Instabilidade Não-Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais"**, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 1995.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**, Prentice Hall, 1995.

BATOZ, J. L.; CHATTOPADHYAY, A.; GURBACHAN, D. **"Finite Element Large Deflection Analysis of Shallow Shells."**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, No. 1, pp 39-58, 1976.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures**: **Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories**. New York: Oxford University Press, 1991.

BAZANT, Z. P. "**Stability of Elastic, Anelastic, and Disintegrating Structures, and Finite Strain Effects: an Overview"**, Comprehensive Structural Integrity, Vol. 2, pp. 47-80, Elsevier, 2003

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of Bars, Plates, and Shells**. New York: McGraw-Hill, 1975.

CHAJES, A. **"Stability and Collapse Analysis of Axially Compressed Cylindrical Shells."**, Shell Struct, Stab and Strength, pp. 1-17, 1985.

CHEN, W.; LIN, T. **"Dynamic Analysis of Viscoelastic Structures Using Incremental Finite Element Method"**, Eng. Struct., Vol. 4, No. 4, pp 271-276, 1982.

COOK, R. D; MALKUS, D. S. and PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3 ed., John Wiley & Sons, 1989.

CREUS, G. J., **Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures.** Lectures Notes in Engineering, 16, Springer-Verlag, 1986.

CREUS, G. J.; MARQUES, O. C. **“Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Materials Under Mechanical and Hygrothermal Loads”**, Computers & Structures, Vol. 53, No. 2, pp. 449-456, 1994.

CRISFIELD, A. M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1991.

FEAPPV: **A Finite Element Analysis Program, Personal Version**. Disponível em: <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv>.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**, North-Holland Publishing Company, 1976.

FLUGGE, W. **Viscoelasticity**, 2 ed. rev.,Springer, 1975.

FREUDENTHAL, A. M. **The inelastic behavior of engineering materials and structures**, John Wiley & Sons, New York, 1950.

GALVÃO, A. S. **“Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos Para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos”**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 2000.

HAMMERAND, D. C. **“Geometrically-Linear and Nonlinear Analysis of Linear Viscoelastic Composites Using the Finite Element Method”**, Virginia Polytechnic Institute, 1999.

HILTON, H. H. **“Creep collapse of viscoelastic columns with initial curvatures”**, J. Aero. Sci., 19:844-6, 1952.

HOFF, N. J. **“Axially Symmetric Creep Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression”**, J. Appl. Mech., Vol. 35, Series E, No. 3, pp. 530-538, 1968.

HONIKMAN, T. C., HOFF, N. J. **“Effect of Variations in the Creep Exponent on the Buckling of Circular Cylindrical Shells”,** International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, No. 12, pp. 1685-95, 1971.

HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; LEVIT, I. **"Nonlinear Dynamic Finite Element Analysis of Shells"**, in Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, ed. by Wunderlich, et al., Springer, Verlag, Berlin, pp. 151-168, 1981.

KEMPNER, J. **“Creep bending and buckling of non-linearly viscoelastic columns”**, N.A.C.A., Tehcnical Note 3137, 1954.

KEMPNER, J. & PHOLE, F. V. **“On the nonexistence of finite critical times for linear viscoelastic columns.”** .J. Aero. Sci. 20, 572-573, 1953.

LARSEN, P. K.; POPOV, E. P. **“Large Displacement Analysis of Viscoelastic Shell of Revolution”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, No. 2, pp. 237-253, 1974.

LEE, S. L.; MANUEL, F. S.; ROSSOW, E. C. **“Large Deflections and Stability of Elastic Frames.”**, J. Engng. Mech. Div. ASCE, Vol. 94, (EM2), pp.521-547, 1968.

LIBOVE, C. **“Creep buckling of columns”** J. Aero. Sci. 19(7), pp. 459-467, 1952.

LIN, T. H. **“Creep stress and deflections of columns”**, J. Appl. Mech., 215-218, 1956.

MATSUI, T.; MATSUOKA, O. **“A New Finite Element Scheme for Instability Analysis of Thin Shells”,** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, No. 1, pp. 145-170, 1976.

OBRECHT, H. **“Creep Buckling and Postbuckling of Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression”,** International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, No. 4, 1977, pp. 337-355, 1977.

ODQVIST, F.K.G. **Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture,** 2 ed, Oxford University Press, 1974.

OLIVEIRA, A. H. S.; SILVA, R. R. **“Avaliação de cargas criticas de estruturas planas e axissimetricas sujeitas a dano e fissuração”**, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 1990.

PLAVNIK, N.; BARGMANN, H., W. **“Snap-through-type Nonlinear Creep Buckling of a Shallow Sinusoidal Shell”**, Transactions, SMiRT 16, Washington DC, 2001.

RABOTNOV, Y. N. **Creep Problems in Structural Members**, North Holland Publishing Company – Amsterdam, 1969.

ROSENTHAL, D., & BAER, H. W. **"An elementary theory of creep buckling of columns"**, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 603-11, 1951.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. New York: McGraw-Hill, 1960.

WASZCZYSZYN, Z.; CICHON, C.; RADWANSKA, M. **Stability of Structures by Finite Element Method**, Studies in Applied Mechanics, 40, Elsevier, 1994.

WILLIAMS, F. W. **"An Approach to the Non-Linear Behaviour of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework With Finite Deflection."**, Quart. J. Mech. Appl. Maths., Vol. 17, No. 4, pp. 451-469, 1964.

WOOD, R. D.; SCHREFLER, B. **"Geometrically Non-linear Analysis - A Correlation of Finite Element Notations"**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, No. 4, pp. 635-642, 1978.

WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. **"Geometrically Non-linear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells"**, Computers & Structures, Vol. 7, No. 6, pp. 725-735, 1977.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WATSON, M.; KING, I. P. **"A Numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis"**, Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 807-827, 1968.

Anexo A
Definição da Matriz tangente e do Vetor de Forças Incrementais de um Elemento de Treliça

O elemento de treliça da Fig. A.1 possui as seguintes funções de interpolação:

$$h_1 = 1 - \frac{\xi}{L} \tag{A.1}$$

$$h_2 = \frac{\xi}{L} \tag{A.2}$$

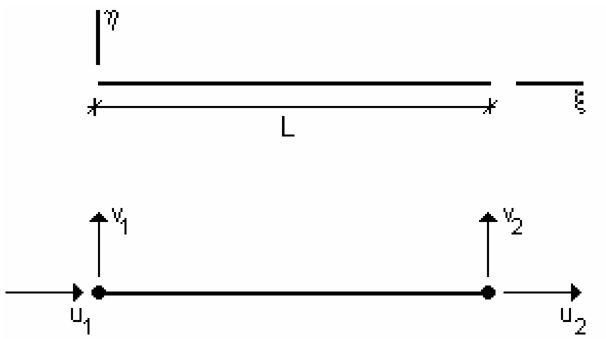


Figura A.1 – Elemento de treliça.

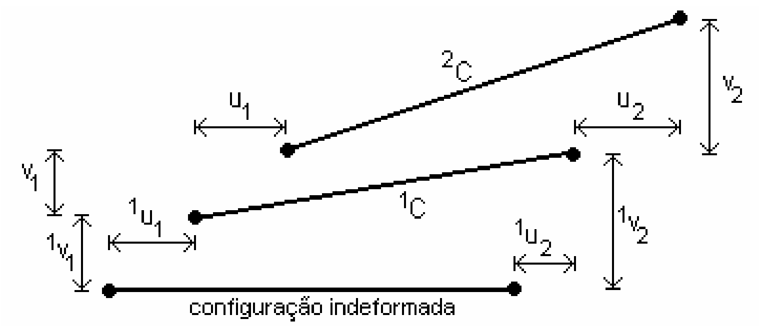


Figura A.2 – Deslocamentos de referência e deslocamentos incrementais.

Conforme mostrado na Fig. A.2, na configuração de referência representada ^1C, o vetor de deslocamentos totais conhecidos é dado por

$$^{1}d = \begin{bmatrix} ^{1}u_1 & ^{1}v_1 & ^{1}u_2 & ^{1}v_2 \end{bmatrix}^T , \tag{A.3}$$

e o vetor de deslocamentos incrementais, obtido a partir de ^{1}C, é dado por

$$d = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix}^T . \tag{A.4}$$

Ainda na configuração ^{1}C, a tensão atuante $^{1}\sigma$ dá origem a uma força axial ^{1}N definida como

$$^{1}N = \frac{^{1}\sigma}{A} , \tag{A.5}$$

onde A é a área da seção transversal do elemento.

A matriz B_0 é dada por

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} . \tag{A.6}$$

A matriz B_L depende do vetor ^{1}d, definido em (A.3), e das matrizes H_1 e G, cujas componentes são

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{A.7}$$

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} . \tag{A.8}$$

Dessa forma,

$$B_L = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -^{1}u_2 + ^{1}u_1 & -^{1}v_2 + ^{1}v_1 & ^{1}u_2 - ^{1}u_1 & ^{1}v_2 - ^{1}v_1 \end{bmatrix} . \tag{A.9}$$

A matriz ^{1}S, utilizada na montagem da matriz de rigidez geométrica, é dada por

$$
{}^{1}S = \begin{bmatrix} {}^{1}\sigma & 0 \\ 0 & {}^{1}\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{{}^{1}N}{A} & 0 \\ 0 & \dfrac{{}^{1}N}{A} \end{bmatrix}. \tag{A.10}
$$

As componentes da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças incrementais são obtidas através das seguintes integrais:

$$
K0 = EA\int_0^L \left(B_1{}^T\ B_1\right) d\xi\,, \tag{A.11}
$$

$$
K1 = EA\int_0^L \left(B_1{}^T\ C\ B_2\ +\ B_2{}^T C\ B_1\right) d\xi\ , \tag{A.12}
$$

$$
K2 = EA\int_0^L \left(B_2{}^T C\ B_2\right) d\xi\,, \tag{A.13}
$$

$$
K_\sigma = A\int_0^L G^T\ {}^{1}S\ G d\xi\ = A\int_0^L G^T\ \frac{{}^{1}N}{A}\ G\, d\xi = {}^{1}N\int_0^L G^T\ G\, d\xi\,, \tag{A.14}
$$

$$
{}^{1}F\,\mathrm{int} = A\int_0^L (B_1 + B_2)^T\ \frac{{}^{1}N}{A} d\xi = \ {}^{1}N\int_0^L (B_1 + B_2)^T\ d\xi\,, \tag{A.15}
$$

$$
F^{ve} = EA\,\varepsilon^{ve}\int_0^L (B_1 + B_2)^T d\xi\,, \tag{A.17}
$$

onde E representa o módulo elástico e A representa a área da seção transversal, admitidos como constantes ao longo do elemento.

Os conjuntos definidos são agora utilizados no Anexo B, onde o esquema computacional abordado no Cap. 3 é ilustrado.

Anexo B
Algoritmo Computacional Baseado no Elemento de Treliça

A seguir, com o auxílio do programa Mathcad, o esquema computacional abordado no Cap. 3 é ilustrado através do elemento de treliça definido no Anexo A. As variáveis utilizadas são:

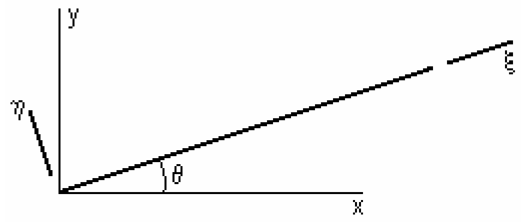
- T: matriz de rotação (Fig. B.1.)
- d_1: vetor de deslocamentos totais na configuração ^1C no sistema local,

$$d\_1 = [u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2].$$

- D_1: vetor de deslocamentos totais na configuração ^1C no sistema global.
- d: vetor de deslocamentos incrementais no sistema local.
- D: vetor de deslocamentos incrementais no sistema global.
- σ_1: tensão atuante ao longo da barra na configuração ^1C.
- N_1: força axial atuante ao longo da barra na configuração ^1C,

$$^1N \equiv N\_1 = \frac{\sigma\_1}{A}.$$

- Fint_1: vetor de forças internas na configuração ^1C no sistema local.
- FGint_1: vetor de forças internas na configuração ^1C no sistema global.
- εa: incremento na deformação.
- Δσ: incremento de tensão.
- εc1: deformação por fluência total na configuração ^1C.
- εve: incremento na deformação por fluência.
- ΔF = F_2 – FGint_1: vetor de forças incrementais para o problema elástico, no sistema global.
- ΔF = F_2 – FGint_1 + FG_ve: vetor de forças incrementais para o problema viscoelástico, no sistema global.
- KGT: matriz de rigidez tangente no sistema global.



$$T=\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad c=\cos(\theta)\ s=\sin(\theta)$$

Figura B.1. – Matriz de rotação do elemento de treliça.

Os modelos das barras elástica e viscoelástica encontram-se nas Figs. B.2 e B.3, respectivamente. Os dados de entrada e o algoritmo utilizados na determinação do caminho de equilíbrio da barra elástica da Fig. B.2 estão mostrados nas Figs. B.4 e B.6, respectivamente. Os dados de entrada para a barra viscoelástica da Fig. B.3 estão mostrados na Fig. B.5. O algoritmo de solução está dividido em duas partes: a primeira (Fig. B.7) serve para determinar a configuração de equilíbrio inicial proveniente da carga P_o aplicada no instante t = 0; a segunda (Fig B.8) utiliza essa solução inicial para solucionar o problema viscoelástico.

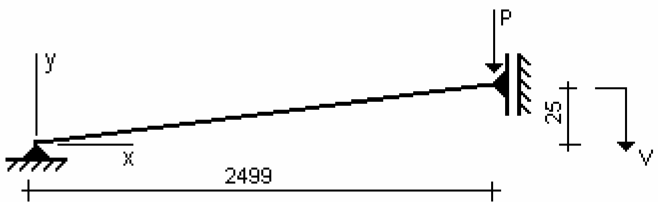


Figura B.2. – Exemplo da barra elástica.

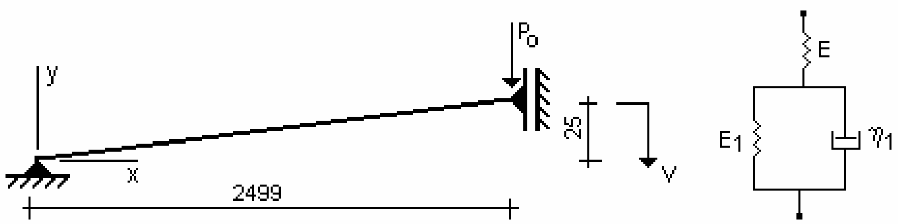


Figura B.3. – Exemplo da barra viscoelástica.

<u>coordenadas nodais</u> :

$x := (0 \quad 2499)^T \qquad y := (0 \quad 25)^T$

<u>matriz de rotação</u> :

$$L := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad c := \frac{(x_2 - x_1)}{L} \qquad s := \frac{(y_2 - y_1)}{L} \qquad T := \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

<u>material</u>

$E := 5 \cdot 10^7 \qquad A := 1.0$

<u>carga de referência</u>

$P := -0.01$

<u>configuração indeformada</u>

deslocamento:	$D\_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$	
tensão:	$\sigma\_1 = 0.0$	$N\_1 = \frac{\sigma\_1}{A}$
fator de carga:	$\lambda = 0.0$	

<u>controle do processo de solução</u>

variação do parâmetro de carga:	$\Delta\lambda := 1.0$
fator de rigidez:	$fk := 1.0$
número de incrementos:	$ninc := 5000$

Figura B.4. – Dados utilizados para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.

<u>coordenadas nodais</u>

$x := (0 \quad 2499)^T \qquad y := (0 \quad 25)^T$

<u>matriz de rotação</u>

$$L := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad c := \frac{(x_2 - x_1)}{L} \qquad s := \frac{(y_2 - y_1)}{L} \qquad T := \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

<u>material</u>

$E := 5 \cdot 10^7$	módulo elástico
$E1 := 5 \cdot 10^7 \quad \eta 1 := 5 \cdot 10^8$	propriedades viscoelásticas
$A := 1.0$	área da seção transversal

<u>carga de referência</u>

$P := -0.01$

<u>configuração indeformada</u>

deslocamento:	$D\_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$	
tensão:	$\sigma\_1 = 0.0$	$N\_1 = \frac{\sigma\_1}{A}$
fator de carga:	$\lambda = 0.0$	

<u>controle do processo de solução</u>

- caminho de equilíbrio:

variação do parâmetro de carga:	$\Delta\lambda := 1.0$
fator de rigidez:	$fk := 1.0$
número de incrementos de carga:	ninc

- deslocamento x tempo::

número deincrementos de tempo:	nts
intervalo de tempo:	$\Delta t := 0.01$

Figura B.5. – Dados utilizados para a solução da barra viscoelástica.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{caminho} := \left|
\begin{array}{l}
D\_1 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\
\lambda \leftarrow 0.0 \\
\sigma\_1 \leftarrow 0.0 \\
N\_1 \leftarrow \dfrac{\sigma\_1}{A} \\
\text{for } \; ic \in 1 .. ninc \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
d\_1 \leftarrow T \cdot D\_1 \\
u1 \leftarrow d\_1_1 \\
v1 \leftarrow d\_1_2 \\
u2 \leftarrow d\_1_3 \\
v2 \leftarrow d\_1_4 \\
KG0 \leftarrow \dfrac{E \cdot A}{L} \cdot T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T \\
KG1 \leftarrow \dfrac{E \cdot A}{L^2} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (v2 - v1) & 0 & (-v2 + v1) & 0 \\ 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) & 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) \\ (-v2 + v1) & 0 & (v2 - v1) & 0 \end{bmatrix} \cdot T \\
KG2 \leftarrow \dfrac{E \cdot A}{L^3} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} (-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & (-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-v2 + v1)^2 \\ -(-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & (-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) & -(-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) & (-v2 + v1)^2 \end{bmatrix} \cdot T \\
KG\sigma \leftarrow \dfrac{N\_1}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
KGT \leftarrow KG0_{4,4} + KG1_{4,4} + KG2_{4,4} + KG\sigma_{4,4} \\
Fint\_1 \leftarrow N\_1 \cdot \left[-1 + \dfrac{(-u2 + u1)}{L} \quad \dfrac{-v2 + v1}{L} \quad 1 + \dfrac{(u2 - u1)}{L} \quad \dfrac{(v2 - v1)}{L} \right]^T \\
FGint\_1 \leftarrow T^T \cdot Fint\_1 \\
fk \leftarrow 1.0 \quad \text{if } \; \dfrac{KGT}{1.0} > 0 \\
fk \leftarrow -1.0 \quad \text{if } \; \dfrac{KGT}{1.0} < 0 \\
\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda \cdot fk \\
F\_2 \leftarrow \lambda \cdot P \\
\Delta F \leftarrow F\_2 - FGint\_1_4 \\
V \leftarrow \dfrac{\Delta F}{KGT} \\
D \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix}^T \\
d \leftarrow T \cdot D \\
B1 \leftarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{L} & 0 & \dfrac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \\
B2 \leftarrow \begin{pmatrix} \dfrac{-u2 + u1}{L^2} & \dfrac{-v2 + v1}{L^2} & \dfrac{u2 - u1}{L^2} & \dfrac{v2 - v1}{L^2} \end{pmatrix} \\
\varepsilon a \leftarrow (B1 + B2) \cdot d \\
\Delta\sigma \leftarrow E \cdot \varepsilon a_1 \\
\sigma\_1 \leftarrow \sigma\_1 + \Delta\sigma \\
N\_1 \leftarrow \dfrac{\sigma\_1}{A} \\
D\_1 \leftarrow D\_1 + D \\
carga\_deslocamento_{ic,1} \leftarrow \lambda \\
carga\_deslocamento_{ic,2} \leftarrow D\_1_4
\end{array}
\right. \\
carga\_deslocamento
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Figura B.6. – Esquema computacional utilizado para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.

$$\mathrm{caminho} :=$$

$$D\_1 \leftarrow (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$$

$$\lambda \leftarrow 0.0$$

$$\sigma\_1 \leftarrow 0.0$$

$$N\_1 \leftarrow \frac{\sigma\_1}{A}$$

$$\text{for } ic \in 1 .. ninc$$

$$d\_1 \leftarrow T \cdot D\_1$$

$$u1 \leftarrow d\_1_1$$

$$v1 \leftarrow d\_1_2$$

$$u2 \leftarrow d\_1_3$$

$$v2 \leftarrow d\_1_4$$

$$KG0 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L} \cdot T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T$$

$$KG1 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L^2} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (v2 - v1) & 0 & (-v2 + v1) & 0 \\ 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) & 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) \\ (-v2 + v1) & 0 & (v2 - v1) & 0 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$KG2 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L^3} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} (-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & (-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-v2 + v1)^2 \\ -(-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & (-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) & -(-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) & (-v2 + v1)^2 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$KG\sigma \leftarrow \frac{N\_1}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$KGT \leftarrow KG0_{4,4} + KG1_{4,4} + KG2_{4,4} + KG\sigma_{4,4}$$

$$Fint\_1 \leftarrow N\_1 \cdot \left[-1 + \frac{(-u2 + u1)}{L} \quad \frac{-v2 + v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2 - u1)}{L} \quad \frac{(v2 - v1)}{L} \right]^T$$

$$FGint\_1 \leftarrow T^T \cdot Fint\_1$$

$$fk \leftarrow 1.0 \ \text{ if } \ \frac{KGT}{1.0} > 0$$

$$fk \leftarrow -1.0 \ \text{ if } \ \frac{KGT}{1.0} < 0$$

$$\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda \cdot fk$$

$$F\_2 \leftarrow \lambda \cdot P$$

$$\Delta F \leftarrow F\_2 - FGint\_1_4$$

$$V \leftarrow \frac{\Delta F}{KGT}$$

$$D \leftarrow (0\ \ 0\ \ 0\ \ V)^T$$

$$d \leftarrow T \cdot D$$

$$B1 \leftarrow \left(-\frac{1}{L} \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \right)$$

$$B2 \leftarrow \left(\frac{-u2 + u1}{L^2} \quad \frac{-v2 + v1}{L^2} \quad \frac{u2 - u1}{L^2} \quad \frac{v2 - v1}{L^2} \right)$$

$$\varepsilon a \leftarrow (B1 + B2) \cdot d$$

$$\Delta\sigma \leftarrow E \cdot \varepsilon a_1$$

$$\sigma\_1 \leftarrow \sigma\_1 + \Delta\sigma$$

$$N\_1 \leftarrow \frac{\sigma\_1}{A}$$

$$D\_1 \leftarrow D\_1 + D$$

$$carga\_deslocamento_{ic,1} \leftarrow \lambda$$

$$carga\_deslocamento_{ic,2} \leftarrow D\_1_4$$

$$carga\_deslocamento_{ic,3} \leftarrow \sigma\_1$$

$$carga\_deslocamento$$

Figura B.7. – Esquema computacional utilizado para determinar a solução elástica inicial que antecede a resposta viscoelástica.

$$\text{desloc\_tempo} := $$

$$Po \leftarrow P \cdot caminho_{ninc,1}$$

$$D\_1 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & caminho_{ninc,2} \end{pmatrix}^T$$

$$\sigma\_1 \leftarrow caminho_{ninc,3}$$

$$N\_1 \leftarrow \frac{\sigma\_1}{A}$$

$$\varepsilon c1 \leftarrow 0.0$$

$$t \leftarrow 0.0$$

$$\text{for } it \in 1..nts$$

$$t \leftarrow t + \Delta t$$

$$d\_1 \leftarrow T \cdot D\_1$$

$$u1 \leftarrow d\_1_1$$

$$v1 \leftarrow d\_1_2$$

$$u2 \leftarrow d\_1_3$$

$$v2 \leftarrow d\_1_4$$

$$KG0 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L} \cdot T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T$$

$$KG1 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L^2} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} 2\cdot(u2-u1) & (v2-v1) & 2\cdot(-u2+u1) & (-v2+v1) \\ (v2-v1) & 0 & (-v2+v1) & 0 \\ 2\cdot(-u2+u1) & (-v2+v1) & 2\cdot(u2-u1) & (v2-v1) \\ (-v2+v1) & 0 & (v2-v1) & 0 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$KG2 \leftarrow \frac{E \cdot A}{L^3} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} (-u2+u1)^2 & (-u2+u1)\cdot(-v2+v1) & -(-u2+u1)^2 & (-u2+u1)\cdot(v2-v1) \\ (-u2+u1)\cdot(-v2+v1) & (-v2+v1)^2 & (u2-u1)\cdot(-v2+v1) & -(-v2+v1)^2 \\ -(-u2+u1)^2 & (u2-u1)\cdot(-v2+v1) & (-u2+u1)^2 & (u2-u1)\cdot(v2-v1) \\ (-u2+u1)\cdot(v2-v1) & -(-v2+v1)^2 & (u2-u1)\cdot(v2-v1) & (-v2+v1)^2 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$KG\sigma \leftarrow \frac{N\_1}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$KGT \leftarrow KG0_{4,4} + KG1_{4,4} + KG2_{4,4} + KG\sigma_{4,4}$$

$$\text{break if } \frac{KGT}{1.0} < 0$$

$$Fint\_1 \leftarrow N\_1 \cdot \left[-1 + \frac{(-u2+u1)}{L} \quad \frac{-v2+v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2-u1)}{L} \quad \frac{(v2-v1)}{L} \right]^T$$

$$FGint\_1 \leftarrow T^T \cdot Fint\_1$$

$$\varepsilon ve \leftarrow \frac{1}{\eta 1} \cdot \sigma\_1 - \frac{E1}{\eta 1} \cdot \varepsilon c1$$

$$F\_ve \leftarrow E \cdot A \cdot \varepsilon ve \cdot \left[-1 + \frac{(-u2+u1)}{L} \quad \frac{-v2+v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2-u1)}{L} \quad \frac{(v2-v1)}{L} \right]^T$$

$$FG\_ve \leftarrow T^T \cdot F\_ve$$

$$F\_2 \leftarrow Po$$

$$\Delta F \leftarrow F\_2 - FGint\_1_4 + FG\_ve_4$$

$$V \leftarrow \frac{\Delta F}{KGT}$$

$$D \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \end{pmatrix}^T$$

$$d \leftarrow T \cdot D$$

$$B1 \leftarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B2 \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{-u2+u1}{L^2} & \frac{-v2+v1}{L^2} & \frac{u2-u1}{L^2} & \frac{v2-v1}{L^2} \end{pmatrix}$$

Figura B.8. – Esquema computacional utilizado na a solução do problema viscoelástico.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon a \leftarrow (B1 + B2)\cdot d\\
&\varepsilon ve \leftarrow \frac{1}{\eta 1}\cdot \sigma\_1 - \frac{E1}{\eta 1}\cdot \varepsilon c1\\
&\Delta\sigma \leftarrow E\cdot\left(\varepsilon a_1 - \varepsilon ve\right)\\
&\sigma\_1 \leftarrow \sigma\_1 + \Delta\sigma\\
&N\_1 \leftarrow \frac{\sigma\_1}{A}\\
&\varepsilon c1 \leftarrow \varepsilon c1 + \varepsilon ve\\
&D\_1 \leftarrow D\_1 + D\\
&deslocamento\_tempo_{it,1} \leftarrow t\\
&deslocamento\_tempo_{it,2} \leftarrow D\_1_4\\
&deslocamento\_tempo
\end{aligned}
$$

Figura B.8 – (Continuação)

Os resultados para a barra elástica estão mostrados nas Figs. B.9 a B.12. Dois valores distintos de carga de referência são utilizados: nas Figs. B.9 e B.10, utiliza-se $P = 0.10$, e nas Figs. B.11 e B.12, utiliza-se $P = 0.12$. Esse procedimento serve para comparar os resultados obtidos com e sem a inclusão do vetor de forças internas na equação incremental à medida que o incremento de carga aumenta. As trajetórias das Figs. B.9 e B.11 são obtidas com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais, ou seja, $\Delta F = \lambda P - FG\,int\_1$, e as trajetórias das Figs. B.10 e B.12 são obtidas com o vetor de forças incrementais escrito como $\Delta F = \Delta\lambda P$, ou seja, sem a inclusão do vetor de forças internas. A partir desses gráficos é possível observar que a inclusão do vetor de forças internas na equação incremental de equilíbrio produz uma melhora nos resultados numéricos. Essa observação pode ser encontrada no trabalho de Chen & Lin (1982).

Os resultados para a barra viscoelástica estão mostrados nas Figs. B.13 a B.15. Cada curva (deflexão x tempo) equivale a um valor de carga inicial P_o. Com uma carga crítica elástica estimada em $P_E = 9.65$, foram utilizados os valores $P_o = 0.48\,P_E$ (Fig. B.13), $P_o = 0.50\,P_E$ (Fig. B.14) e $P_o = 0.54\,P_E$ (Fig. B.15).

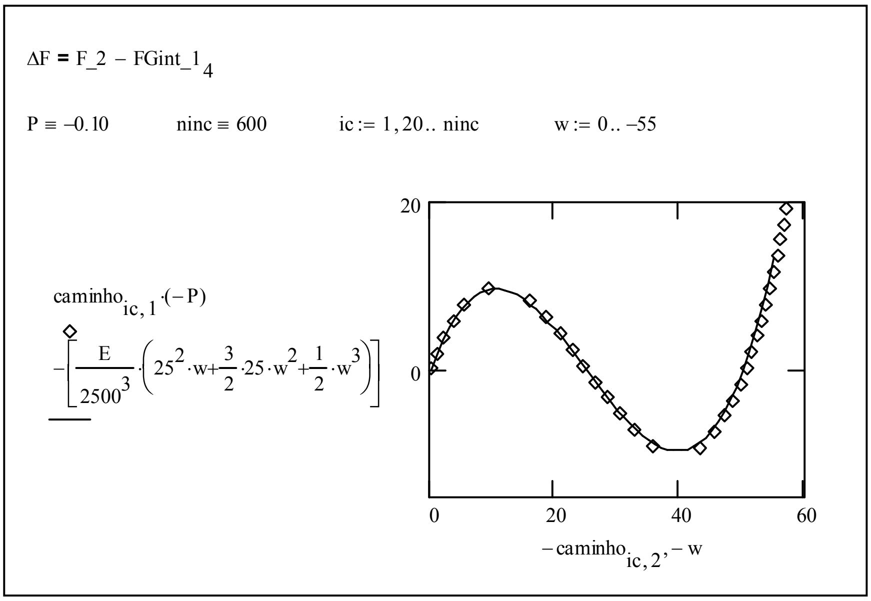


Figura B.9. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.10$ obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

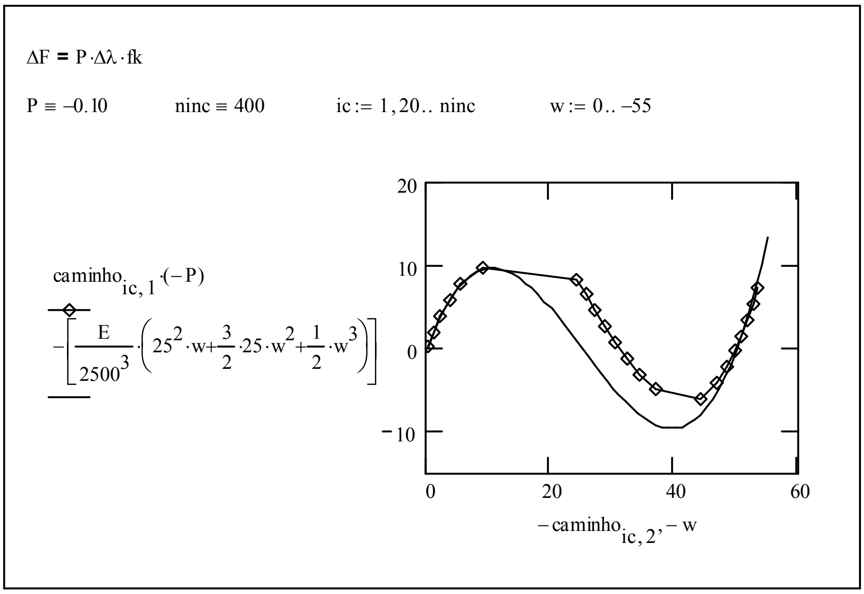


Figura B.10. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.10$ obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

$\Delta F = F\_2 - FGint\_1_4$

$P \equiv -0.12$ $\quad$ $ninc \equiv 400$ $\quad$ $ic := 1, 20 .. ninc$ $\quad$ $w := 0 .. -55$

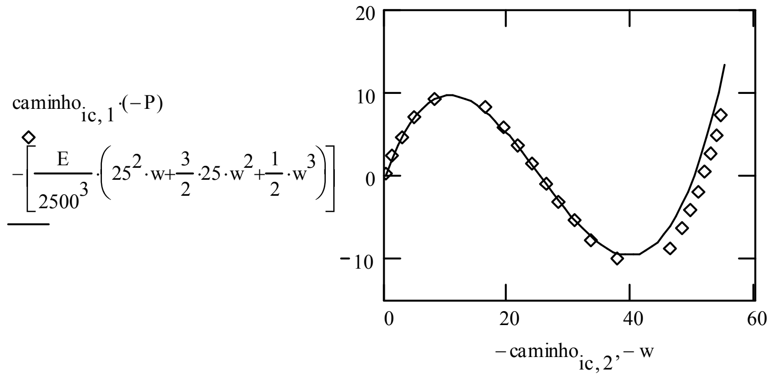


Figura B.11. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.12$ obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

$\Delta F = P \cdot \Delta\lambda \cdot fk$

$P \equiv -0.12$ $\quad$ $ninc \equiv 400$ $\quad$ $ic := 1, 20 .. ninc$ $\quad$ $w := 0 .. -55$

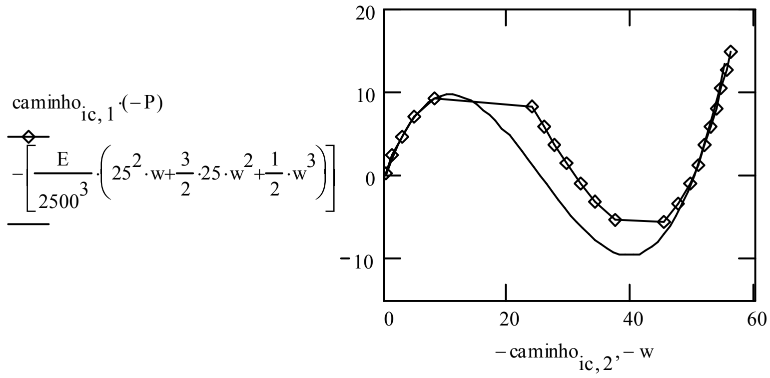


Figura B.12. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.12$ obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

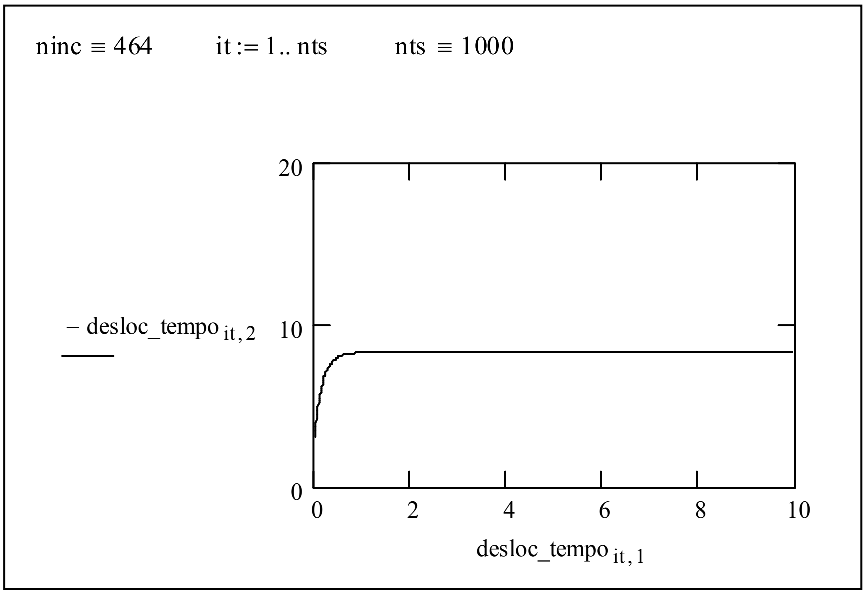


Figura B.13 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para P_o = 0.48 P_E.

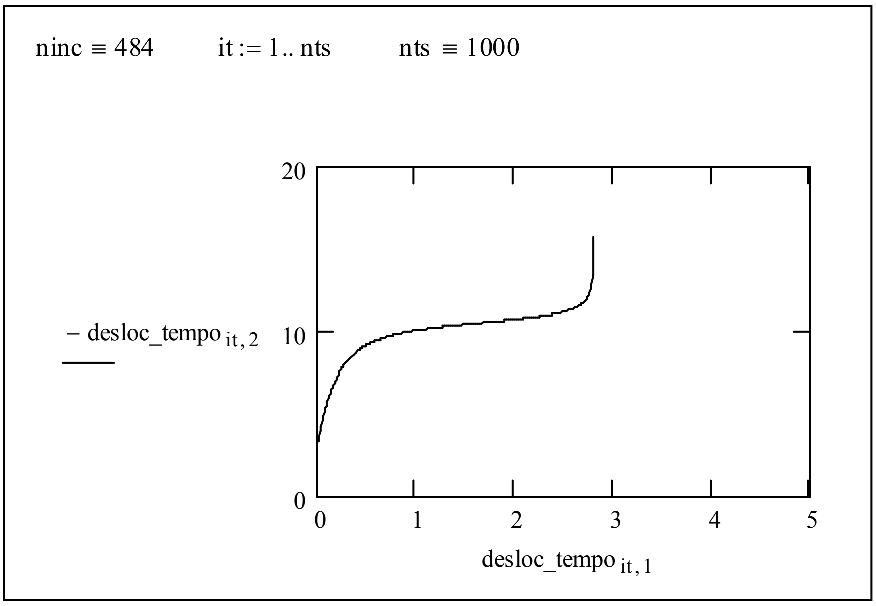


Figura B.14 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para P_o = 0.50 P_E.

$ninc \equiv 520 \qquad it := 1..nts \qquad nts \equiv 1000$

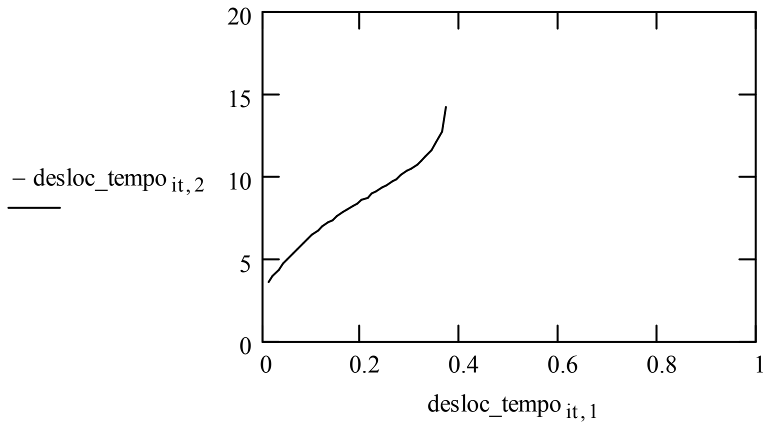


Figura B.15 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para $P_o = 0.54\ P_E$.