

4 Exemplos

4.1 Trajetórias de Equilíbrio de Modelos Elásticos

Nos exemplos da Seção 4.2, observa-se que a resposta viscoelástica é sempre antecedida por uma resposta elástica instantânea definida no tempo $t=0$. A solução elástica inicial fornece as tensões e os deslocamentos correspondentes a um determinado nível de carga, que são alguns dos dados necessários para a obtenção da resposta viscoelástica.

Os Exs. 4.1.1 a 4.1.6 servem para validar a aplicação do modelo numérico implementado à solução do problema elástico geometricamente não-linear através do traçado de trajetórias de equilíbrio.

4.1.1 Coluna Engastada

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.1. Utiliza-se uma malha composta por 5 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

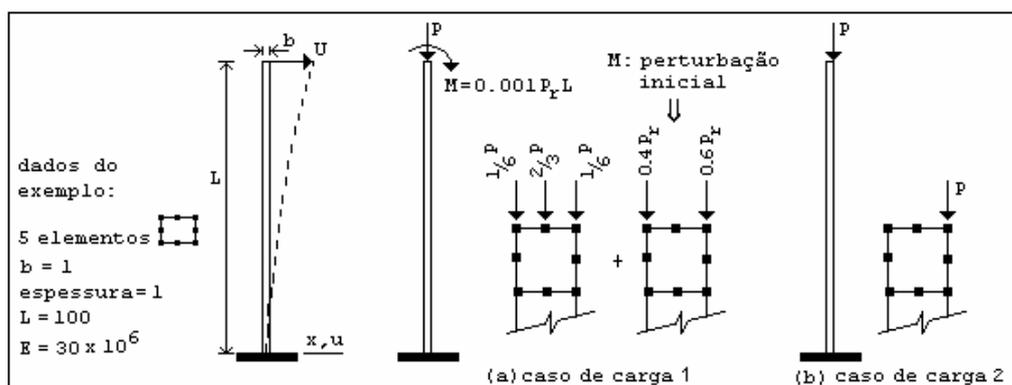


Figura 4.1. – Exemplo 4.1.1.: Coluna engastada.

Dois casos de carga são considerados. O momento M , na Fig. 4.1.a (Galvão, 2000), faz o papel de uma carga de perturbação que é aplicada apenas no

primeiro passo do processo incremental (P_R indica uma carga de referência fixa). O segundo caso de carga, mostrado na Fig. 4.1.b, é utilizado por Wood & Zienkiewicz (1977). As trajetórias de equilíbrio para os dois casos, obtidas com o programa computacional, são mostradas nas Figs. 4.2 e 4.3.

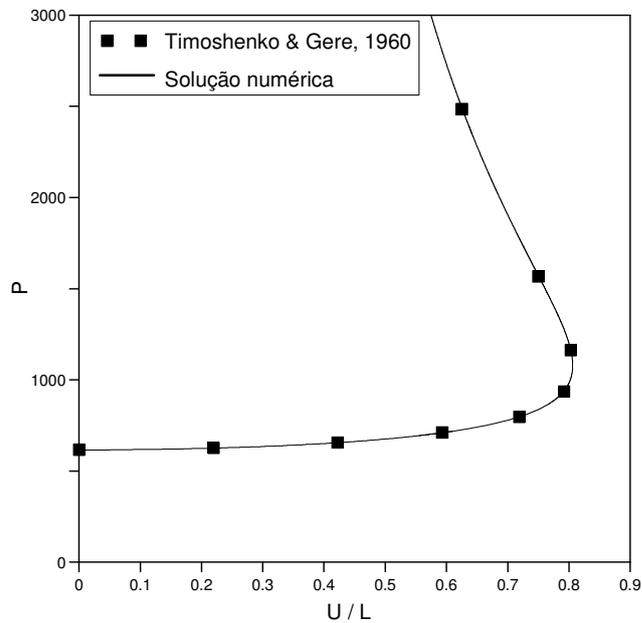


Figura 4.2. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ($P \times U$), para o caso de carga da Fig. 4.1.a.

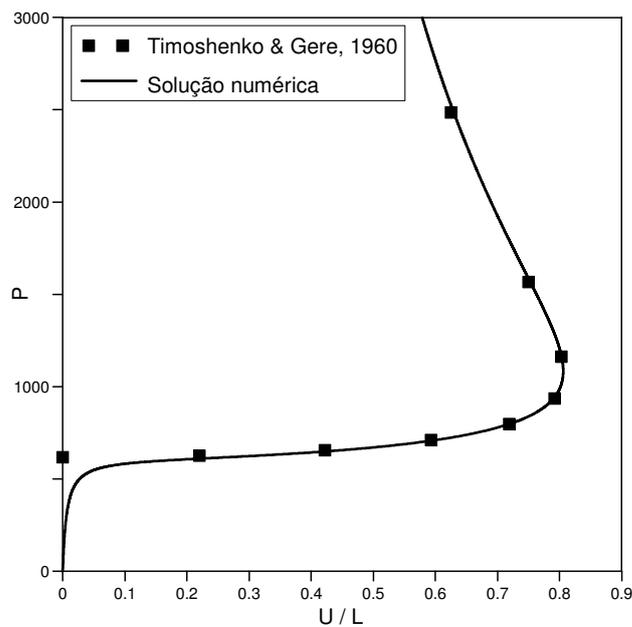


Figura 4.3. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ($P \times U$), para o caso de carga da Fig. 4.1.b.

4.1.2 Pórtico de Williams

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.4. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. A solução analítica pode ser encontrada no trabalho de Williams (1964).

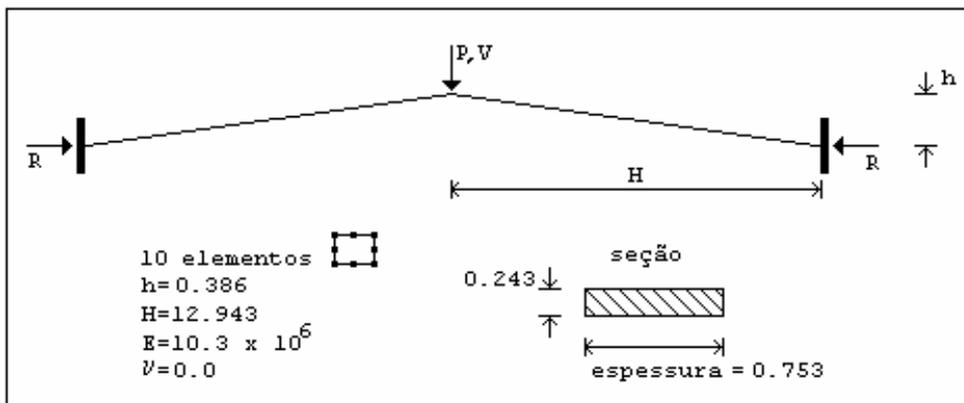


Figura 4.4. – Exemplo 4.1.2.: Pórtico de Williams.

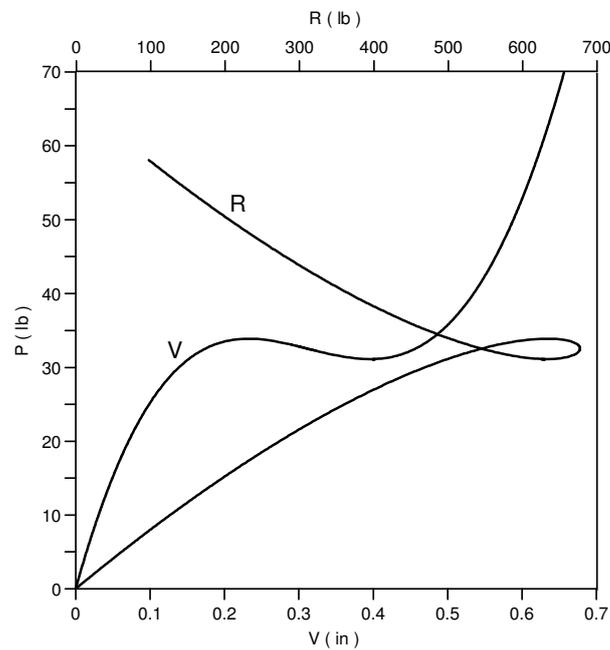


Figura 4.5. – Exemplo 4.1.2.: Curvas (P x V) e (P x R).

A Fig. 4.5 comprova a eficiência do modelo computacional em relação à ultrapassagem de pontos-limite. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

4.1.3 Arco Abatido

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.6. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

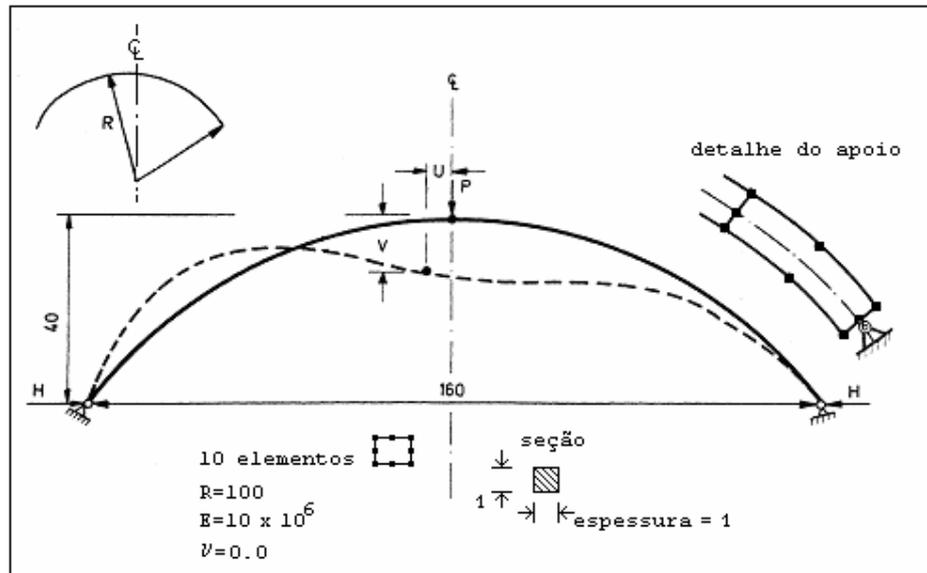


Figura 4.6. – Exemplo 4.1.3.: Arco abatido.

Neste problema, a menor carga crítica elástica está relacionada a um ponto de bifurcação associado à configuração deformada assimétrica representada pela linha tracejada mostrada na Fig. 4.6. O segundo ponto crítico sobre a trajetória de equilíbrio equivale a um ponto-limite associado à configuração deformada simétrica. Esses dois pontos críticos estão presentes nas trajetórias de equilíbrio mostradas na Fig. 4.7, que foram obtidas a partir do programa computacional. A Fig. 4.8 mostra as curvas carga vs reação de apoio.

A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977). Os valores numéricos da carga crítica e deslocamento crítico associados à bifurcação da trajetória coincidem, respectivamente, com os valores $13EI/R^2$ e $0.108R$, enquanto o valor numérico da carga crítica associada ao ponto-limite coincide com o valor $15.3EI/R^2$.

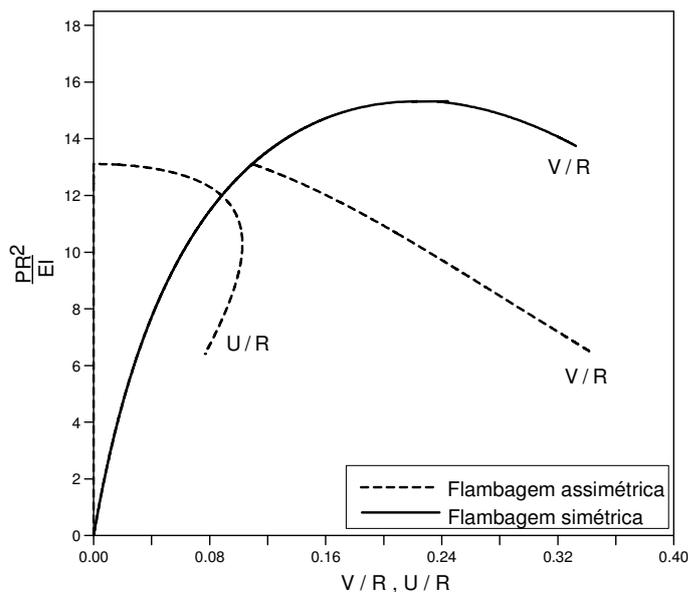


Figura 4.7. – Exemplo 4.1.3.: Trajetórias de equilíbrio.

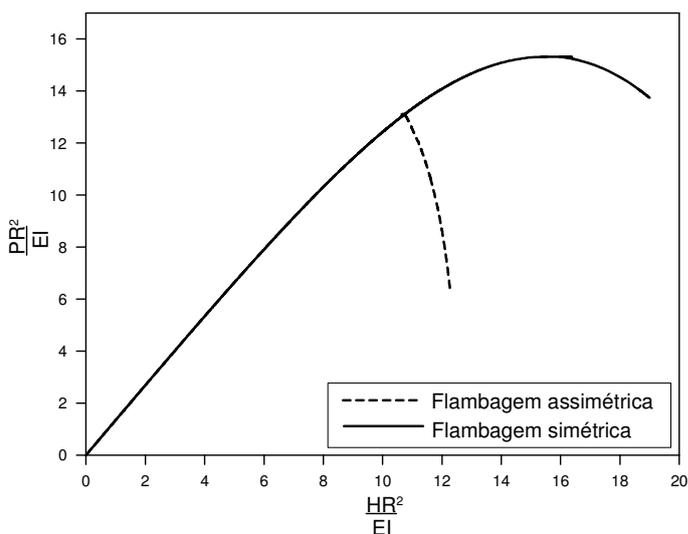


Figura 4.8. – Exemplo 4.1.3.: Curva carga vs reação de apoio ($P \times H$).

Diferentes processos para a obtenção das trajetórias de equilíbrio constam na literatura (Wood & Zienkiewicz, 1977): Lee et al. (1968) e Batoz et al. (1976) utilizam pequenas cargas de perturbação para a obtenção da configuração deformada assimétrica e Matsui & Matsuoka (1976) prescrevem, nas proximidades do ponto de bifurcação, deslocamentos proporcionais ao primeiro modo de flambagem. No próprio trabalho de Wood & Zienkiewicz (1977), o caminho assimétrico é obtido através da imposição de uma pequena perturbação

inicial ao raio do arco, ou seja, através da imposição de uma imperfeição geométrica inicial.

No presente trabalho, as curvas das Figs. 4.7 e 4.8 foram obtidas sem a necessidade da imposição de imperfeições iniciais na geometria ou na carga. Além disso, a técnica numérica empregada baseia-se em um esquema simples de controle de carga baseado apenas no acompanhamento dos valores dos pivôs da matriz de rigidez tangente ao longo do processo incremental (Cap. 3). A partir dessas considerações, pode-se supor que o “acionamento” da trajetória assimétrica (Fig. 4.7) decorre apenas das perturbações numéricas inerentes à solução incremental utilizada.

O controle de carga acima descrito é feito de forma automática pelo programa. Esse controle automático, porém, é válido somente para os casos onde é possível adotar $\Delta\lambda < 0$ (decréscimo de carga) quando há 1 pivô negativo ou $\Delta\lambda > 0$ (acréscimo de carga) quando todos os pivôs são positivos. Foi necessário, portanto, adicionar ao programa computacional linhas de comando específicas para o exemplo do arco abatido, cujas trajetórias de equilíbrio são obtidas conforme esquema mostrado na Fig. 4.9. Nos demais exemplos da Seção 4.1, o processo automático citado acima é suficiente.

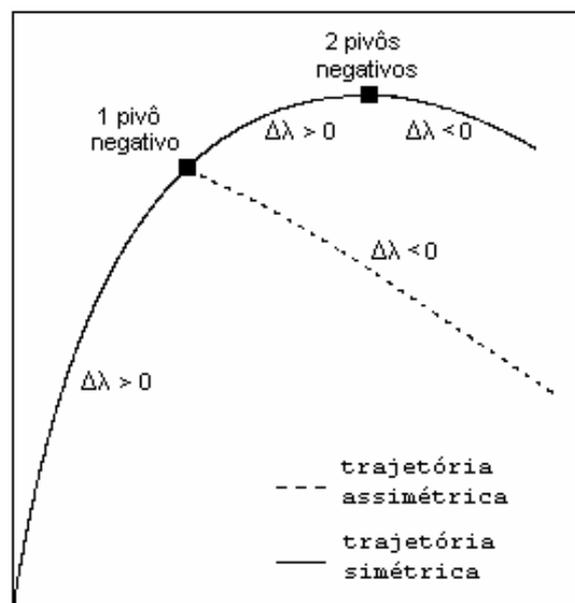


Figura 4.9. – Procedimento de controle de carga utilizado para o exemplo 4.1.3, baseado na imposição de sinais positivos e negativos ao fator de carga $\Delta\lambda$ ao longo das trajetórias de equilíbrio.

4.1.4 Arco Elevado

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.10. Utiliza-se uma malha composta por 16 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. A Fig. 4.5 mostra os resultados numéricos. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

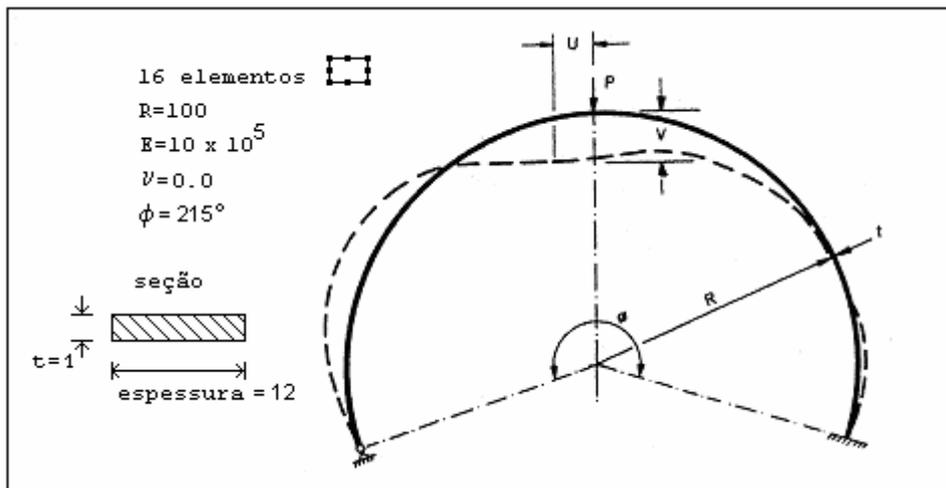


Figura 4.10. – Exemplo 4.1.4.: Modelo do arco elevado.

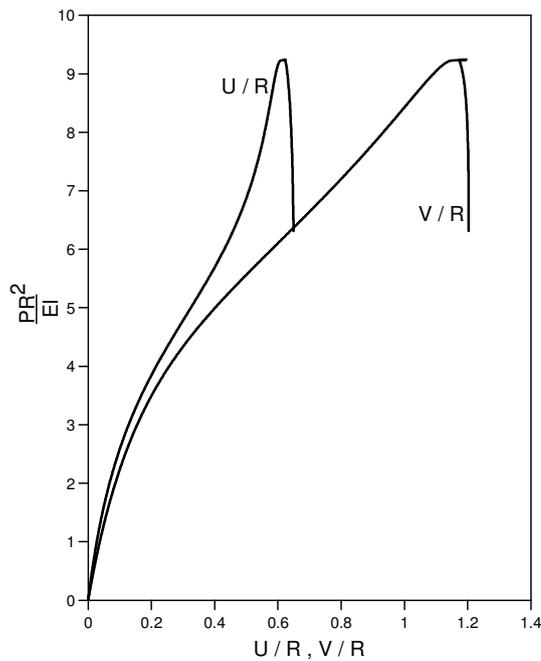


Figura 4.11. – Exemplo 4.1.4.: Trajetórias de equilíbrio do arco elevado.

4.1.5 Calota Esférica Axissimétrica

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.12. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

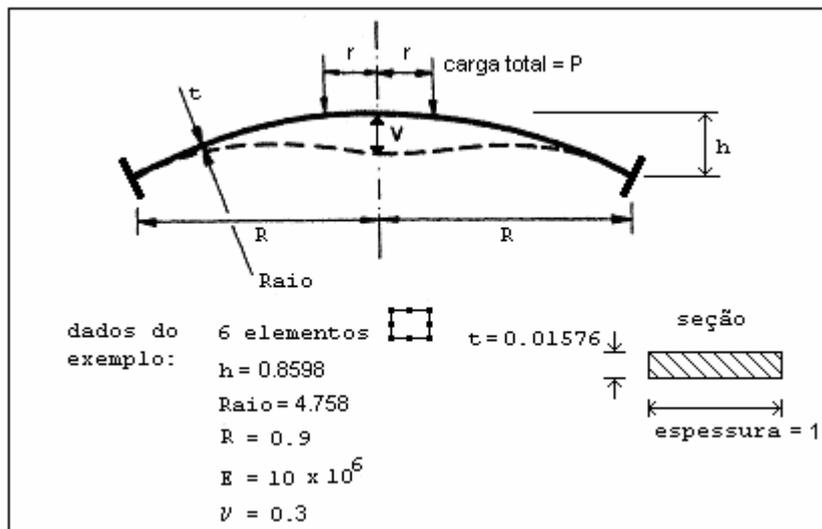


Figura 4.12. – Exemplo 4.1.5.: Calota esférica.

Este exemplo trata do comportamento de uma casca axissimétrica na forma de uma calota esférica submetida a um carga central pontual ($r/R = 0.0$), ou a um anel de cargas ($r/R = 0.25$; $r/R = 0.42$). A formulação axissimétrica permite que os 6 elementos finitos utilizados na discretização sejam distribuídos apenas ao longo da metade do perfil mostrado na Fig. 4.12, que corresponde ao trecho que vai do ponto central, onde ocorre o deslocamento V , até o ponto de apoio. A Fig. 4.13 mostra os resultados numéricos. As trajetórias de equilíbrio mostram que o crescimento do raio de aplicação da carga implica na ocorrência de flambagem por ponto-limite. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

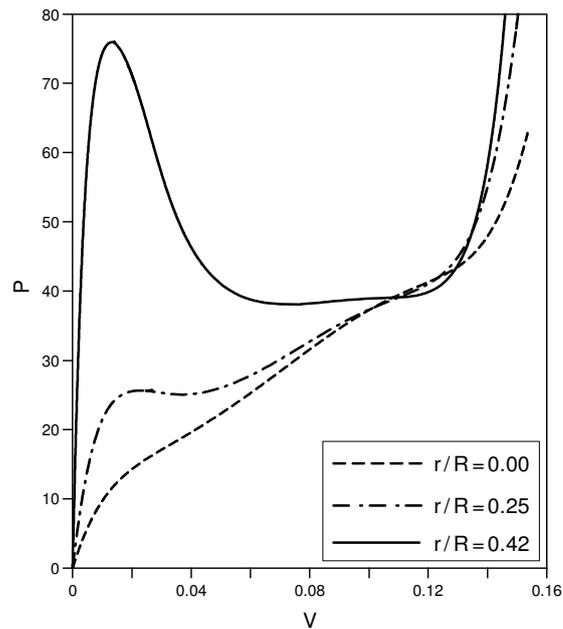


Figura 4.13. – Exemplo 4.1.5.: Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de r/R .

4.1.6 Cilindro Circular Axissimétrico

A flambagem de cilindros curtos ocorre com o surgimento de uma meia-senóide na direção axial (Fig. 4.15.a). Em cilindros muito longos e de pequeno diâmetro, a flambagem se desenvolve de forma similar a uma coluna (Fig 4.15.b). Em cilindros moderadamente longos, a flambagem se propaga ao longo da superfície (Fig. 4.15.c). Os cilindros moderadamente longos podem ser diferenciados dos cilindros muito curtos através do seguinte parâmetro geométrico:

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2}, \quad (4.1)$$

onde L é o comprimento longitudinal do cilindro, R é o raio do cilindro, h é a espessura da parede do cilindro e ν é o coeficiente de Poisson. Para valores de $Z < 2.85$, tem-se um cilindro muito curto. Neste exemplo, utilizam-se valores de L , R e h condizentes com a geometria de um cilindro moderadamente longo, com $Z > 2.85$.

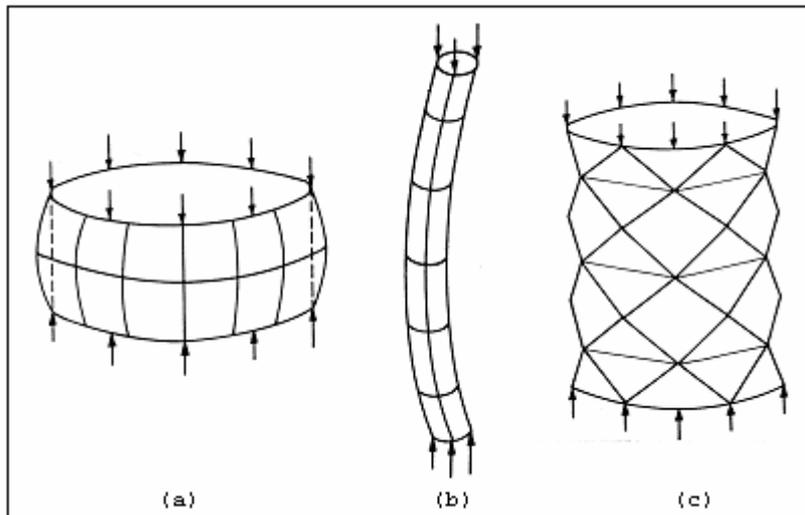


Figura 4.14. – Configurações pós-críticas de cilindros, associadas a diferentes geometrias (Chajes, 1985).

Um outro ponto a observar é a questão da validade da utilização do elemento axissimétrico para simular a flambagem do cilindro moderadamente longo. A solução numérica obtida, que será discutida mais adiante, mostra que é possível deduzir, com uma boa aproximação, o valor da carga crítica de um cilindro moderadamente longo submetido a carregamento axial através do elemento axissimétrico. Essa possibilidade evidencia a contribuição de um modo axissimétrico, similar à configuração “sanfonada” mostrada na Fig. 4.15, no desencadeamento do mecanismo de flambagem que antecede o comportamento pós-crítico do cilindro (Fig. 4.14.c).

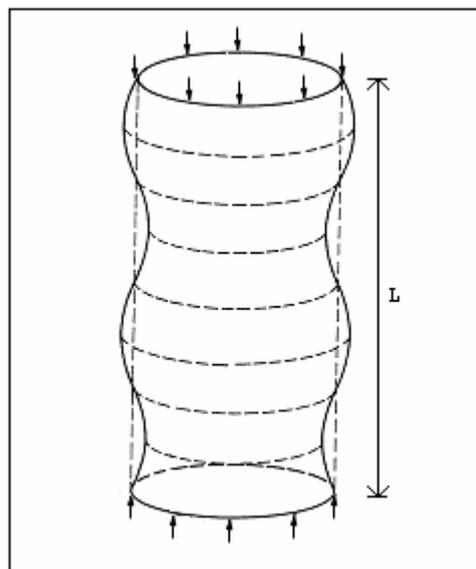


Figura 4.15. – Configuração crítica aproximada (Allen & Bulson, 2001).

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.16. Discretiza-se uma faixa de 1rd da parede do cilindro através de uma malha composta por 20 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. Em virtude da formulação axissimétrica, considera-se uma força N que atua sobre uma faixa de área delimitada pela espessura h e por uma faixa angular de 1rd.

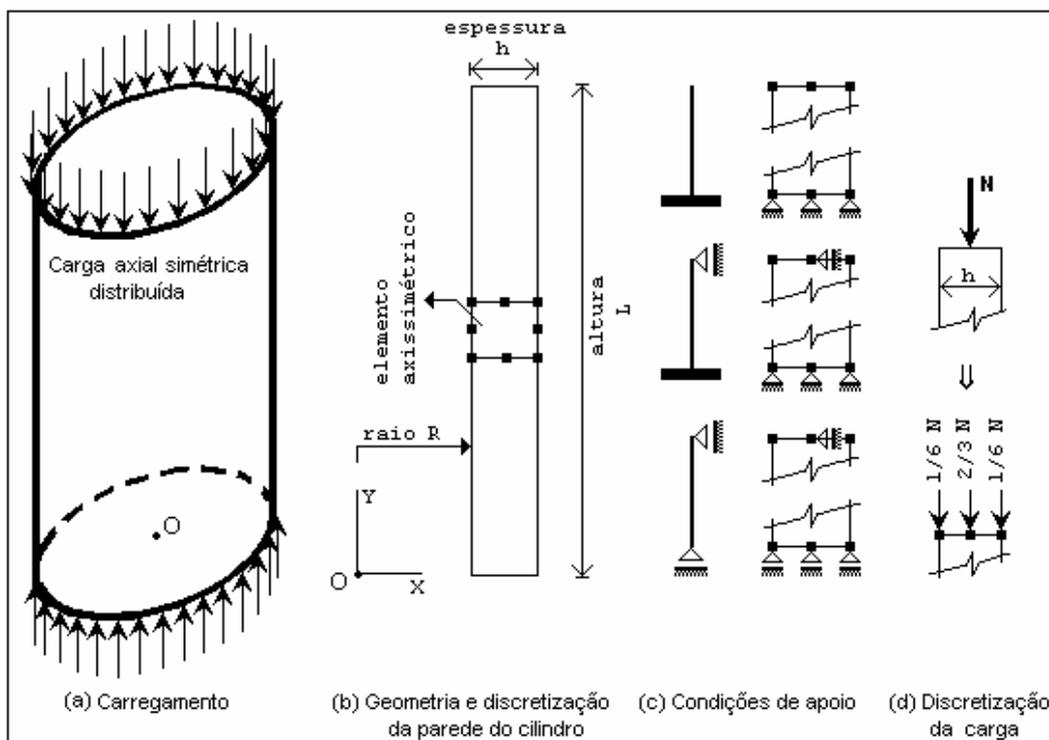


Figura 4.16. – Exemplo 4.1.6: Discretização do cilindro circular: geometria, condições de apoio e carregamento.

A tensão crítica do cilindro é dada por

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (4.2)$$

onde E representa o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson. R e h estão mostrados na Fig. 4.16. Considera-se que essa tensão atua uniformemente sobre uma área definida por

$$A = 2\pi R h. \quad (4.3)$$

As Eqs. (4.2) e (4.3) permitem que uma carga resultante crítica (Q_{cr}) seja definida como

$$Q_{cr} = \sigma_{cr} A. \quad (4.4)$$

Atuando sobre uma faixa de 1rd, a força resultante N_{cr} é, então, escrita como

$$N_{cr} = \frac{Q_{cr}}{2\pi} . \tag{4.5}$$

A Fig. 4.17 mostra as duas condições de apoio utilizadas no exemplo. Através da solução numérica, observa-se que a retirada do apoio superior (Fig. 4.17.b) reduz a carga crítica à metade daquela obtida a partir da solução analítica.

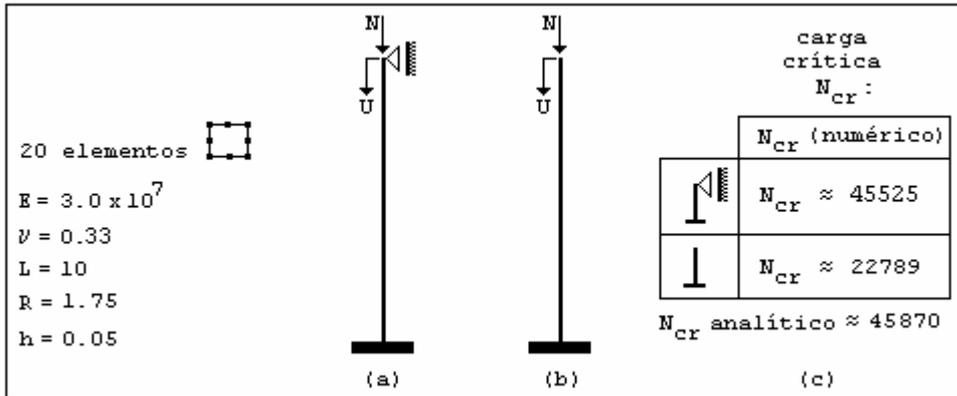


Figura 4.17. – Exemplo 4.1.6.: (a) e (b): Condições de apoio. (c) Valores de carga crítica analítica e numérica.

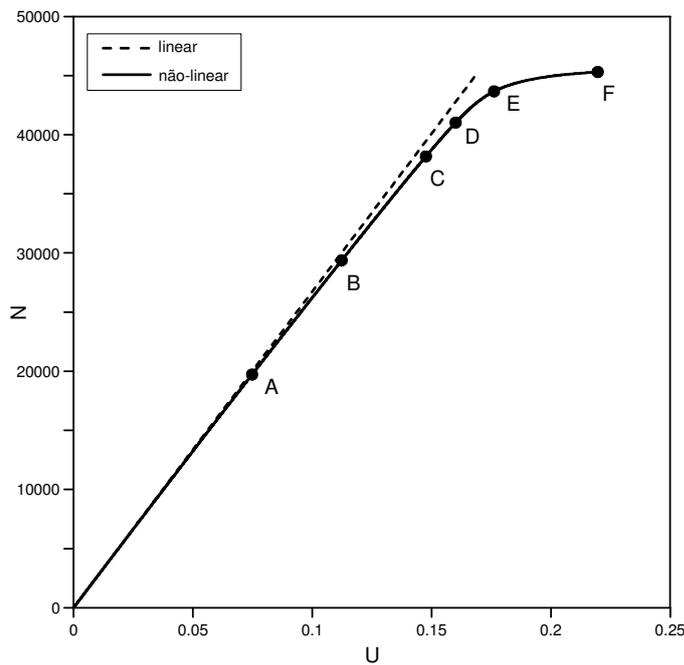


Figura 4.18. – Exemplo 4.1.6.: Curva N x U, associada à condição de apoio da Fig. 4.17.a.

As Figs. 4.18 e 4.19 referem-se ao cilindro com a condição de apoio da Fig. 4.17.a. Cada um dos pontos A-F sobre a curva da Fig. 4.18, que mostra a

trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento axial da extremidade superior do cilindro em função da carga N , está relacionado a uma configuração deformada da Fig. 4.19. Os pontos sobre as deformadas são pontos nodais.

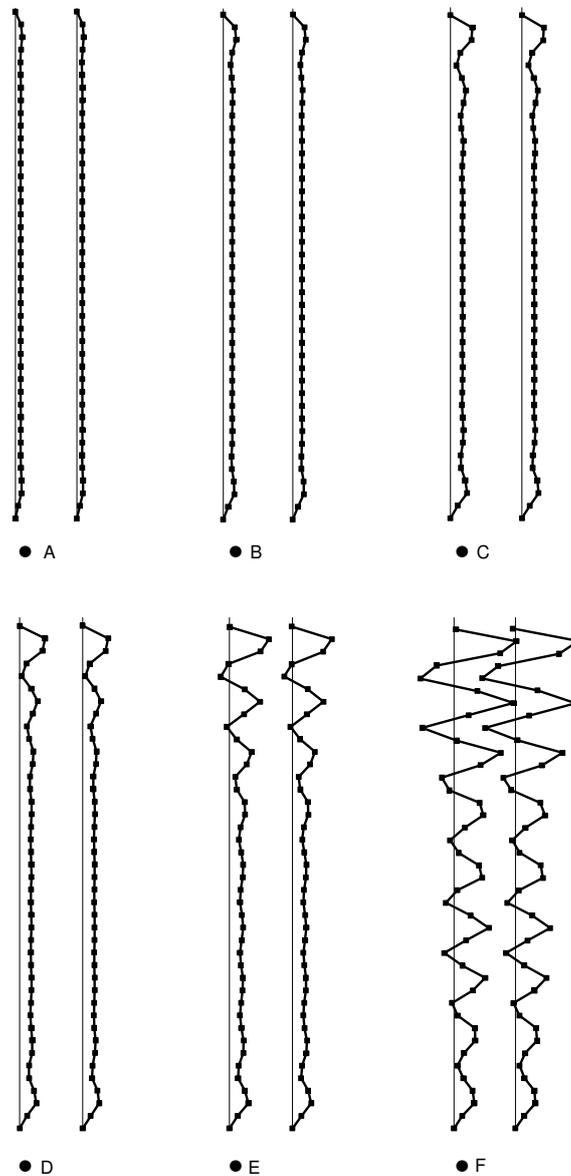


Figura 4.19. – Exemplo 4.1.6.: Configurações deformadas da parede do cilindro, associadas aos pontos A-F sobre a trajetória de equilíbrio da Fig. 4.18.

A Fig. 4.21 mostra as configurações deformadas da parede do cilindro com a condição de apoio da Fig. 4.17.b. É possível verificar, através da comparação entre as Figs. 4.19 e 4.20, como a deformação crítica é diferente para as duas condições de apoio.

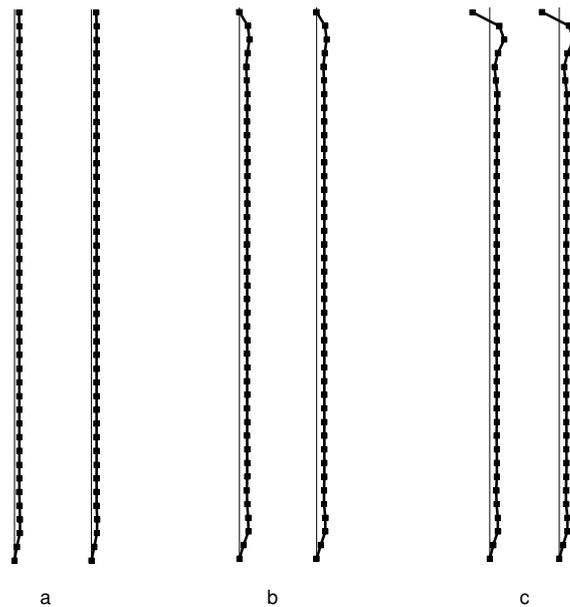


Figura 4.20. – Exemplo 4.1.6.: Deformações da parede do cilindro relacionadas à condição de apoio da Figura 4.17.b: (a) e (b) Configurações anteriores à flambagem; (c) Configuração crítica.

4.2 Modelos Viscoelásticos

Os Exs. 4.2.1., 4.2.2. e 4.2.3. servem para validar o programa implementado. Posteriormente, estuda-se a resposta viscoelástica dos diferentes modelos estruturais empregados na Seção 4.1.

4.2.1 Deformação por Fluência

Neste exemplo, estuda-se o deslocamento devido à fluência na extremidade de uma barra submetida a uma carga axial variável (variável em passos) ao longo do tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.21. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos Q6 (quadrilátero com 6 nós) com 4 pontos de integração. Um esquema computacional, desenvolvido com o Mathcad, fornece a solução analítica (Fig. 4.22). Na Fig. 4.23, essa solução analítica é utilizada para verificar a precisão da solução numérica obtida com o programa computacional.

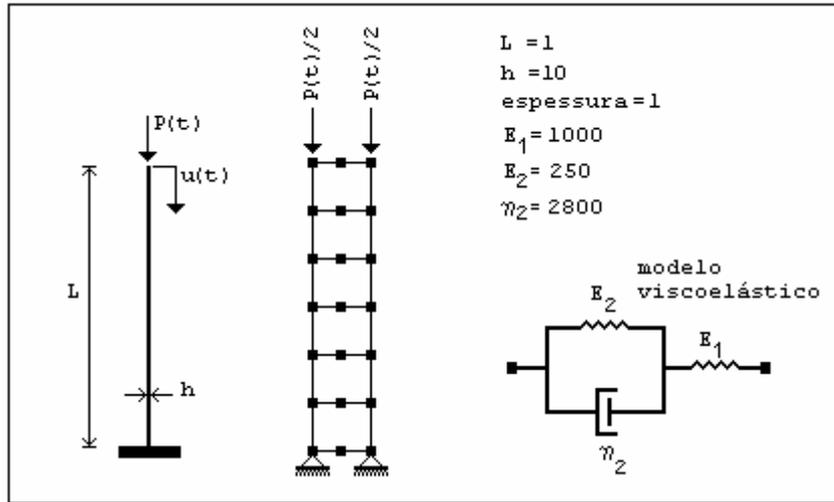


Figura 4.21. – Exemplo 4.2.1.: Barra viscoelástica.

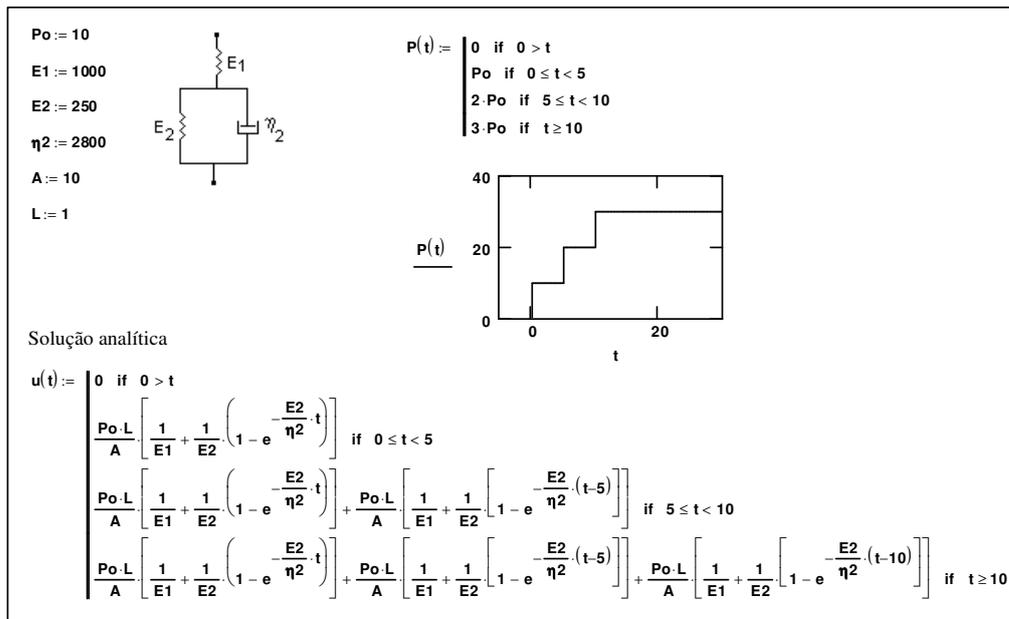


Figura 4.22. – Exemplo 4.2.1.: Solução analítica (Mathcad).

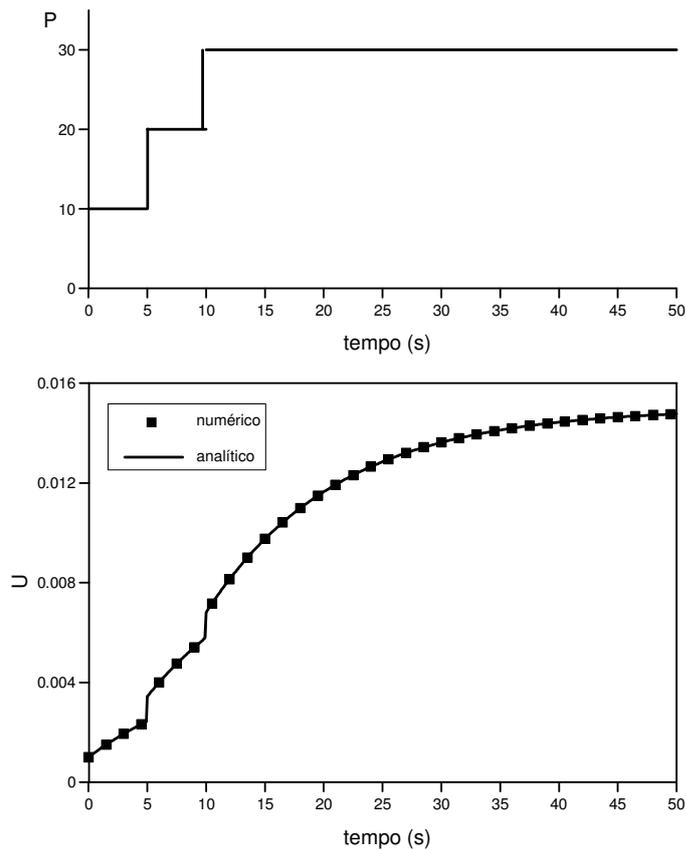


Figura 4.23. – Exemplo 4.2.1.: Comparação entre as soluções numérica e analítica.

4.2.2 Relaxação

Neste exemplo, estuda-se a relaxação da tensão axial em uma barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura mantida constante no tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.24. Utiliza-se uma malha composta por 4 elementos Q4 (quadrilátero com 4 nós) com 4 pontos de integração. A barra tem os deslocamentos laterais impedidos. T_0 é a temperatura aplicada e mantida constante a partir do tempo $t=0$, T_i é a temperatura relativa à barra indeformada e α é o coeficiente de dilatação térmica do material.

A solução analítica é fornecida por Zienkiewicz et al.(1968). Na Fig. 4.25, essa solução analítica é utilizada para verificar a precisão da solução numérica obtida com o programa computacional. O valor da tensão axial – uniforme ao longo da barra em qualquer instante de tempo – pode ser obtido através das reações de apoio R em cada instante, cuja resultante é dividida pela área da seção transversal (Fig. 4.24).

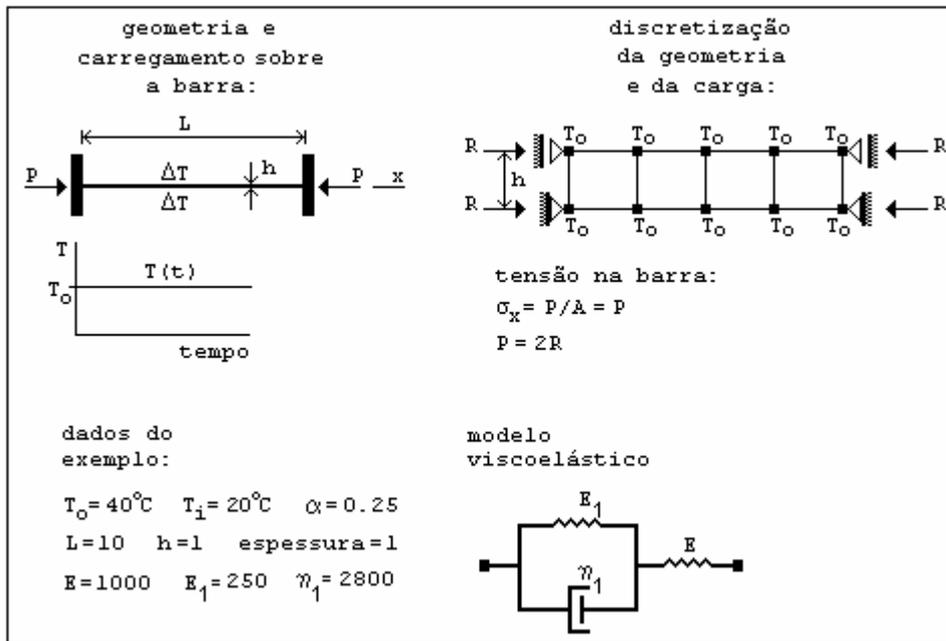


Figura 4.24. – Exemplo 4.2.2.: Barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura constante.

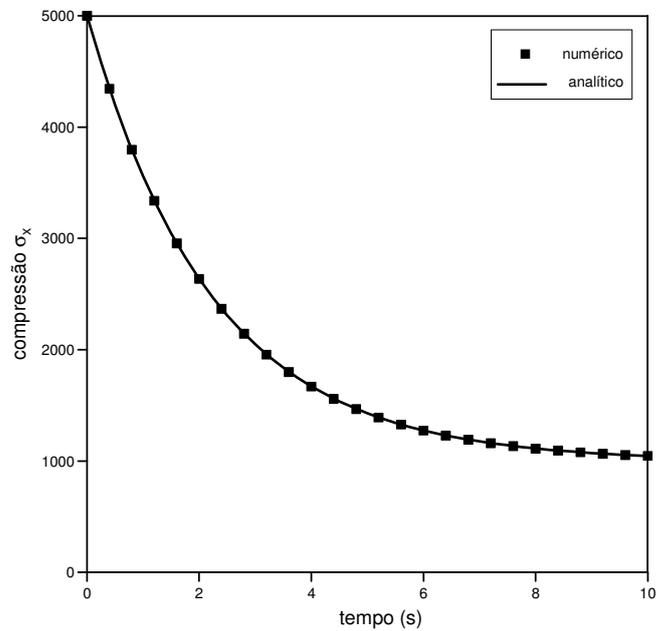


Figura 4.25. - Exemplo 4.2.2.: Relaxação da tensão em uma barra submetida a uma variação de temperatura constante.

4.2.3 Colunas Viscoelásticas

Neste exemplo, que também serve para validar o programa desenvolvido, estuda-se o deslocamento devido à fluência em uma coluna simplesmente apoiada submetida a uma carga axial constante ao longo do tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.26. Utiliza-se uma malha composta por 5 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. As coordenadas nodais já consideram a imperfeição geométrica inicial que existe antes da aplicação da carga. A solução analítica é descrita a seguir (Creus, 1986). Na Fig. 4.27, essa solução analítica é comparada com a solução numérica obtida com o programa computacional.

Inicialmente, considera-se uma deflexão inicial (Fig. 4.26) definida por

$$y = 0.2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (4.6)$$

A carga crítica elástica da coluna é dada por

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (4.7)$$

A carga crítica viscoelástica é dada por

$$P_{ve} = \frac{\pi^2 E_\infty I}{L^2}, \text{ onde } E_\infty = \frac{EE_1}{E + E_1}. \quad (4.8)$$

Após a aplicação da carga P_o no instante de tempo $t = 0$, a deflexão do ponto central da coluna, inicialmente dada por b_c (Fig. 4.26), passa a ser definida pela expressão

$$V(t) = \frac{P_o b_c (P_{ve} - P_e)}{(P_e - P_o)(P_{ve} - P_o)} \exp\left(\frac{P_{ve} - P_o}{P_o - P_e} \frac{E + E_1}{\eta_1} t\right) + \frac{P_{ve} b_c}{(P_{ve} - P_o)}, \quad (4.9)$$

A Eq. (4.9) fornece, para diferentes valores de P_o , as soluções analíticas utilizadas na Fig. 4.27. Com este exemplo, verifica-se a validade do programa computacional para problemas que envolvem, simultaneamente, viscoelasticidade e não-linearidade geométrica.

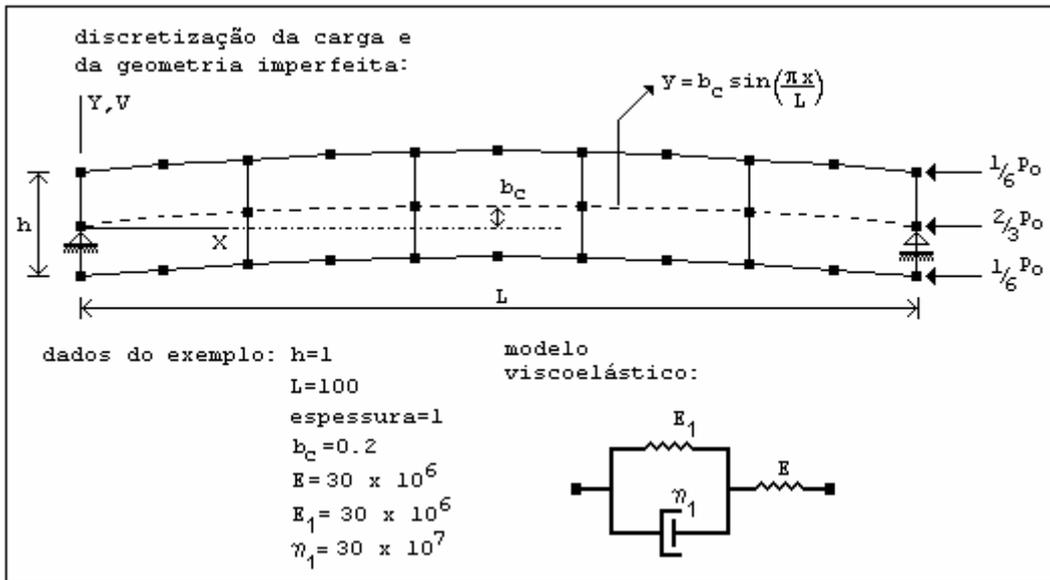


Figura 4.26. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica simplesmente apoiada, submetida a uma deflexão inicial e a uma carga axial constante P_0 .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

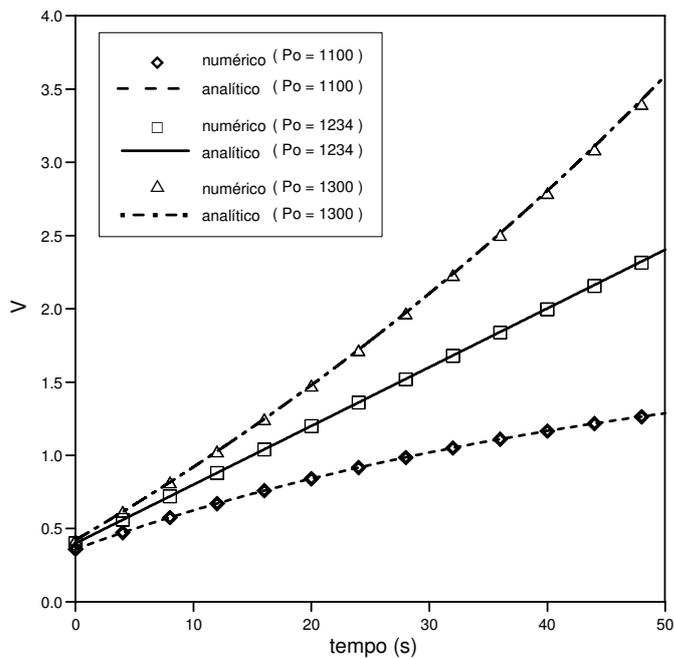


Figura 4.27. – Exemplos 4.2.3.: Comparação entre os resultados numérico e analítico.

Como exemplos adicionais, utilizam-se os modelos mostrados na Fig. 4.28. Os resultados numéricos mostrados nas Figs. 4.29 e 4.30 mostram que a ordem de grandeza das deflexões originadas na coluna no instante em que a carga P_0 é aplicada não interfere no valor da carga crítica viscoelástica, cujo valor é obtido a partir das expressões

$$P_{ve} = \frac{\pi^2 E_{\infty} I}{4L^2}, \text{ onde } E_{\infty} = \frac{E E_1}{E + E_1} \quad (4.10)$$

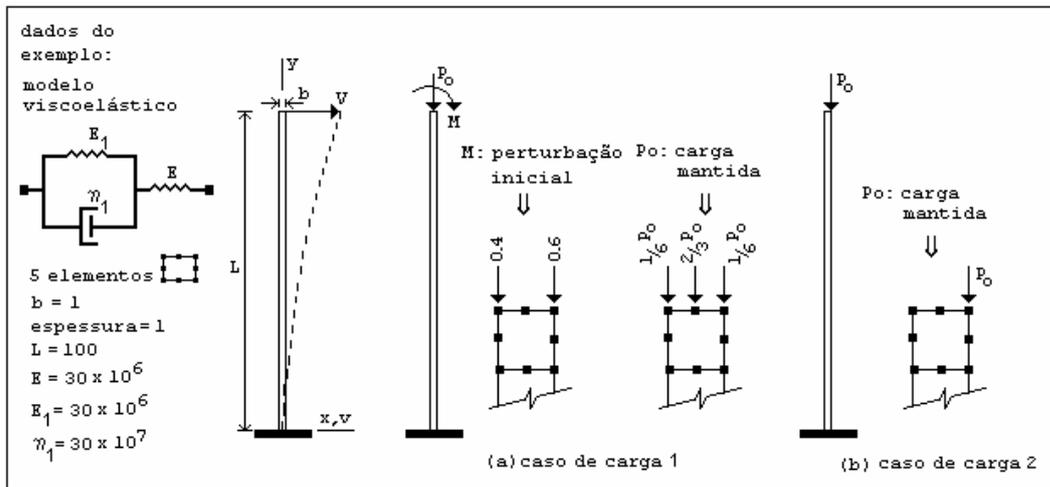


Figura 4.28. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica engastada e submetida a carregamentos iniciais distintos.

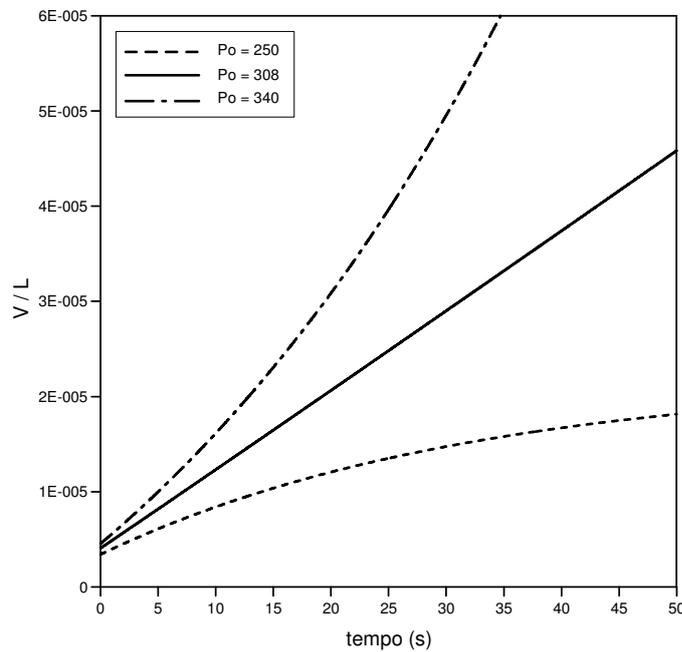


Figura 4.29. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica (V x t) para o caso de carga da Fig. 4.28.a.

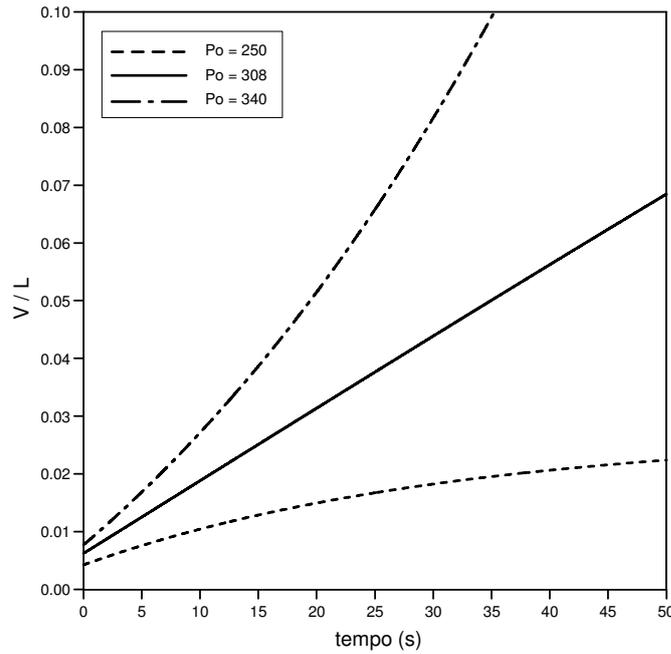


Figura 4.30. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica ($V \times t$) para o caso de carga da Fig. 4.28.b.

4.2.4 Pórtico Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.31. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de P_0 , que corresponde a uma carga aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante.

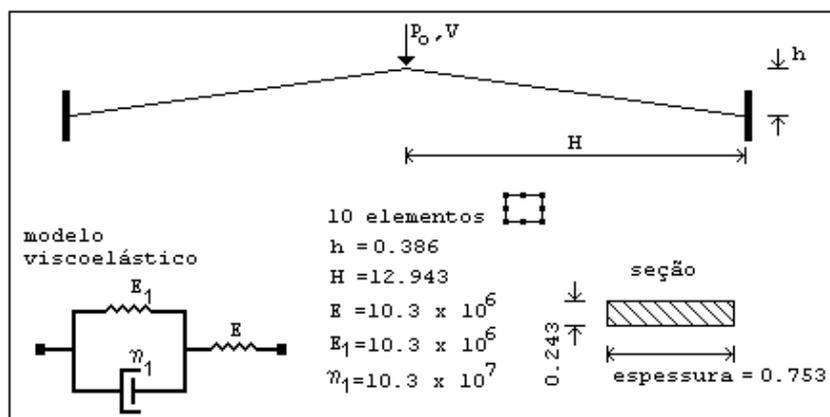


Figura 4.31. – Exemplo 4.2.4.: Pórtico viscoelástico.

O valor de β , neste e nos demais exemplos a seguir, é dado pela expressão

$$\beta = \frac{P_o}{P_e}, \text{ com } 0 < \beta < 1 \tag{4.11}$$

onde P_o é a carga aplicada no instante $t=0$, que se mantém constante, e P_e é a carga crítica elástica, definida no exemplo 4.1.2.

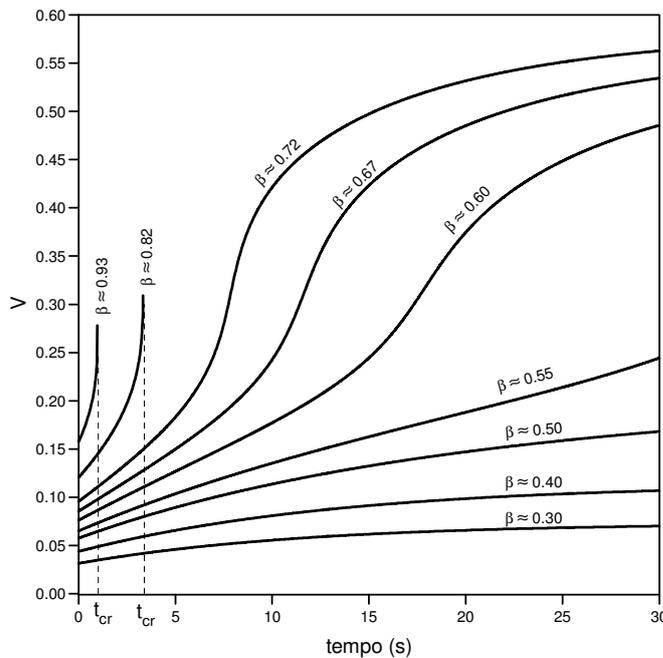


Figura 4.32. – Exemplo 4.2.4.: Curvas (V x t) para diferentes valores de β .

Dentre os valores de β testados neste exemplo, a Fig. 4.33 mostra que não existe tempo crítico para $\beta \leq 0.72$. Neste trabalho, considera-se que o tempo crítico corresponde ao instante no qual o sinal de um dos pivôs da matriz tangente decomposta se torna negativo. Uma outra observação diz respeito ao mecanismo de flambagem viscoelástica do pórtico nos casos onde existe um tempo crítico. A Fig. 4.33, associada ao caso $\beta \leq 0.82$, mostra um “salto para cima” observado no instante correspondente ao tempo crítico, sem qualquer modificação no sentido e na magnitude da carga P_o . Observa-se que este salto ocorre no sentido contrário daquele relacionado ao caso elástico. As configurações deformadas da Fig. 4.33 foram plotadas a partir de deslocamentos nodais obtidos a partir da solução computacional.

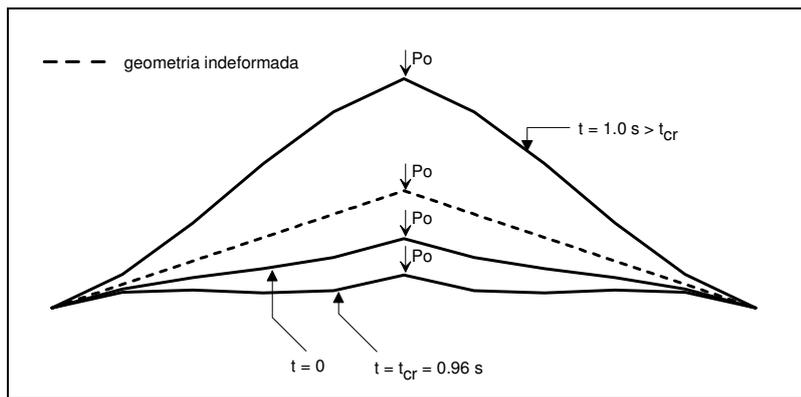


Figura 4.33. – Exemplo 4.2.4.: Mecanismo de flambagem do pórtico viscoelástico para situações onde ocorre tempo crítico.

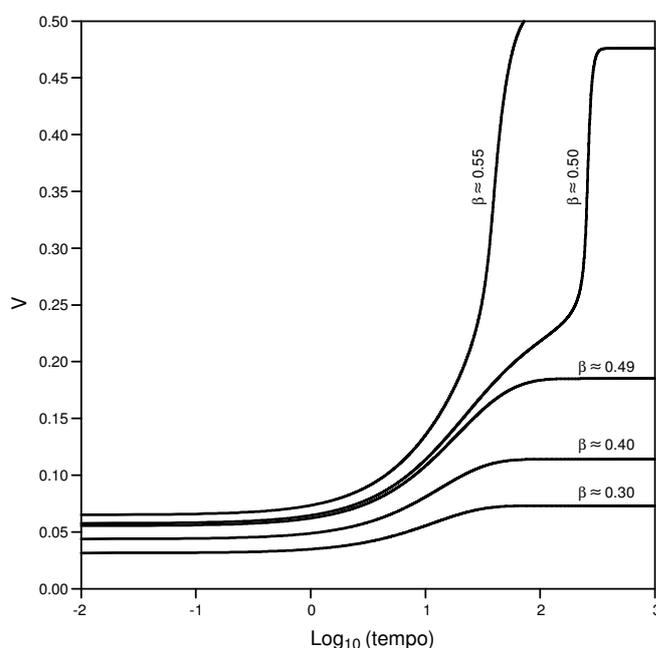


Figura 4.34. – Exemplo 4.2.4.: Curvas $(V \times \text{Log}_{10}(t))$.

A solução numérica não detecta tempos críticos para valores de $\beta \leq 0.72$. Entretanto, uma comparação entre as curvas $(V \times \text{Log}(t))$ da Figura (4.35) mostra uma nítida mudança de padrão nas curvas referentes a $\beta \leq 0.49$, em relação às referentes a $\beta \geq 0.5$. Essa mudança de padrão pode, por si só, refletir uma condição de instabilidade, iniciada quando $\beta = 0.5$ e evidenciada à medida que β cresce em relação a esse valor. De qualquer forma, pode-se assegurar que a estabilidade da resposta é garantida apenas para $\beta < 0.5$.

4.2.5 Arco Abatido Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.35. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de P_0 , que corresponde a uma carga aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante. A carga Q é utilizada para impor uma pequena imperfeição assimétrica inicial. U e V são as componentes de deslocamento no topo.

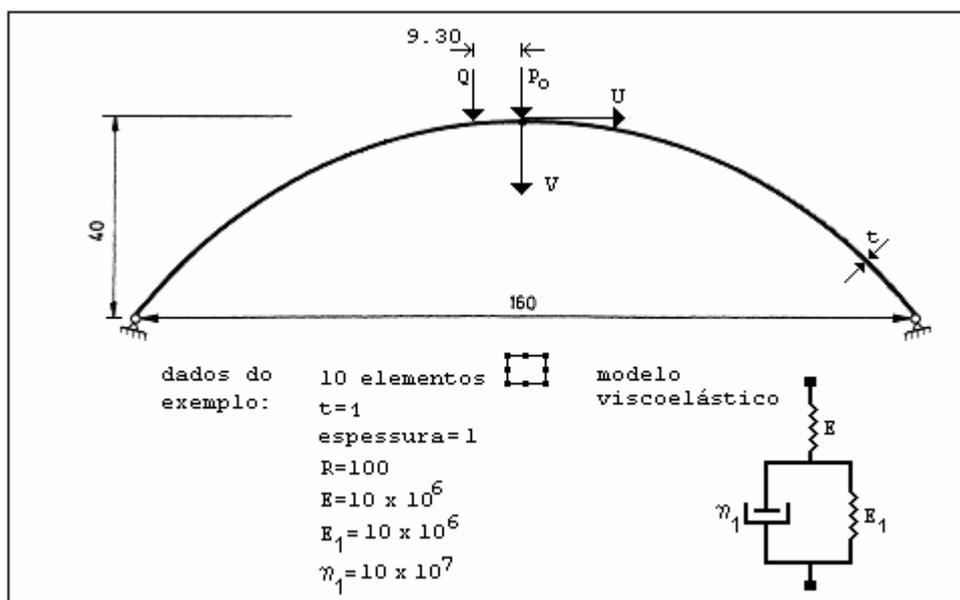


Figura 4.35. – Exemplo 4.2.5.: Arco abatido viscoelástico.

Dos modelos elásticos estudados na Seção 4.1, o arco do exemplo 4.1.3. é o único que exibe duas cargas críticas observáveis ao longo da trajetória de equilíbrio. A primeira carga crítica equivale a um ponto de bifurcação e a segunda equivale a um ponto-limite (Fig. 4.7). Neste exemplo, o valor P_e (Eq 4.11) equivale à primeira carga crítica do arco elástico, ou seja, à carga de bifurcação definida a partir do Ex. 4.1.3.

A Fig. 4.36 mostra a evolução da componente de deslocamento U ao longo do tempo. Conforme mostrado, existe uma similaridade entre as curvas da Fig. 4.36 e as curvas da Fig. 4.28, ou seja, é possível visualizar e definir a natureza instável (ou estável) da resposta viscoelástica relacionada à componente U desde o

instante de aplicação da carga. O gráfico semi-log da Fig. 4.37 serve para confirmar as regiões de instabilidade e estabilidade definidas na Fig. 4.36.

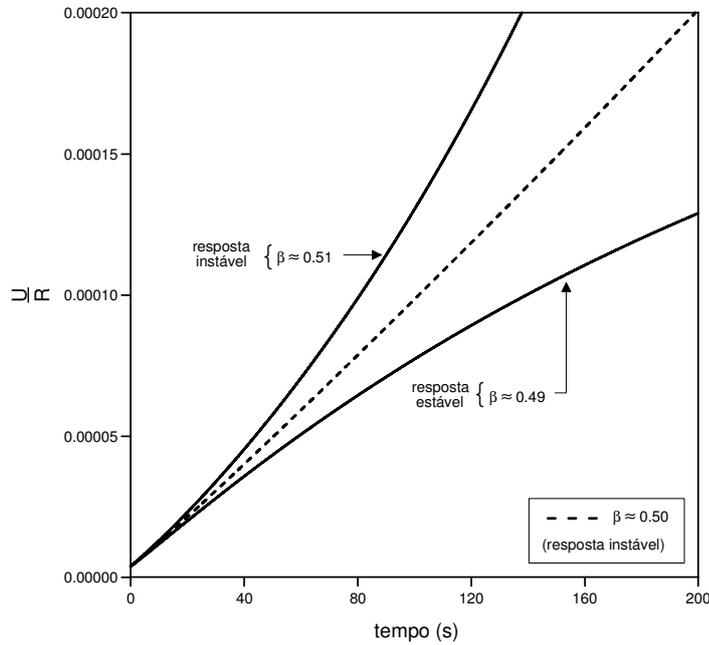


Figura 4.36. – Exemplo 4.2.5.: Curvas (U x t).

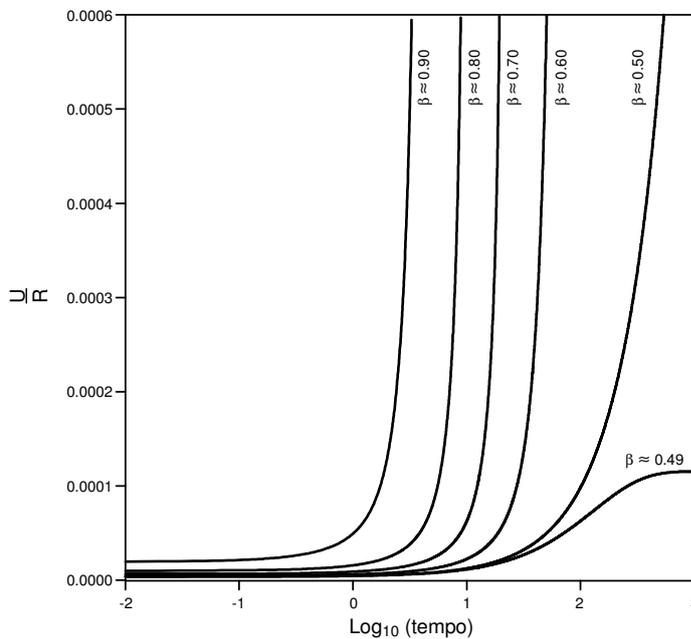


Figura 4.37. – Exemplo 4.2.5.: Curvas (U x Log₁₀(t)).

O padrão da resposta relacionada à componente U, no entanto, não é observado para a componente de deslocamento V (Fig. 4.38), ou seja, as curvas da

Fig. 4.38 não fornecem indícios de perda de estabilidade (ou de garantia de estabilidade) nos instantes iniciais, pelo menos para valores de β em torno de $\beta=0.5$. Para esse grau de liberdade, a flambagem viscoelástica, para $\beta=0.5$, é visualizada somente após um intervalo de tempo relativamente grande, conforme mostra o gráfico semi-log da Fig. 4.39.

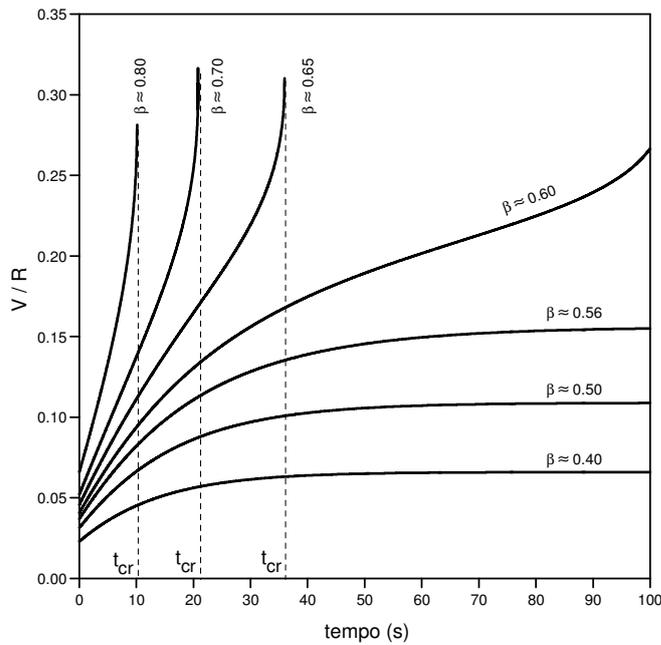


Figura 4.38. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ($V \times t$).

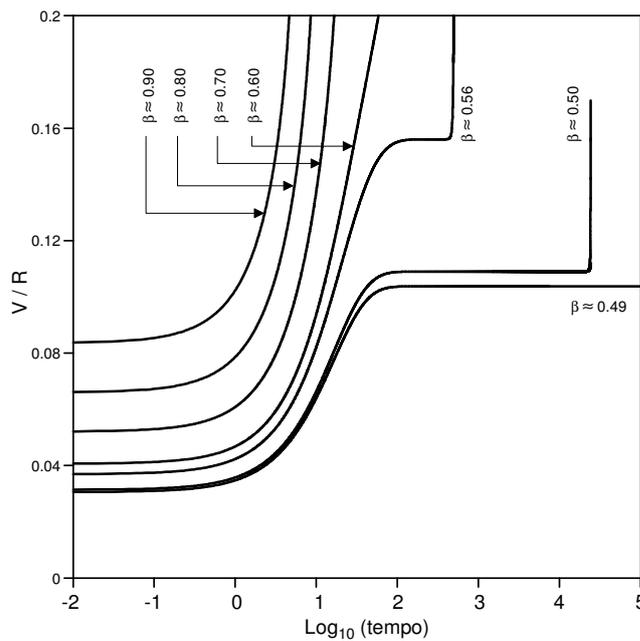


Figura 4.39. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ($V \times \text{Log}_{10}(t)$).

Uma comparação entre as curvas ($V \times \text{Log}_{10}(t)$) da Fig. 4.39 e as curvas ($U \times \text{Log}_{10}(t)$) da Fig. 4.37, referentes aos valores $\beta = 0.5$ ou $\beta = 0.56$, evidencia a diferença entre as respostas segundo as componentes U e V. Esse fato indica a necessidade de observar o mecanismo de flambagem viscoelástica através de diferentes graus de liberdade, pois o comportamento de certos graus de liberdade pode ser mais crítico que o comportamento de outros. Essa necessidade é também observada no exemplo 4.2.8.

A Fig. 4.40 mostra, para diferentes valores de β , que a imperfeição inicial obtida através da carga Q não leva a diferenças significativas no valor do tempo crítico.

	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$
Q = 0	20.79	10.12	5.08
Q \neq 0	20.77	10.11	4.69

Figura 4.40. – Exemplo 4.2.5.: Valores de tempo crítico (em segundos), considerando Q \neq 0, Q = 0 e diferentes valores de β .

A deformação do arco é mostrada nas Figs. 4.41 e 4.42 para os valores $\beta = 0.8$ e $\beta = 0.9$, respectivamente. A linha tracejada representa a configuração indeformada. Para $\beta = 0.8$, observa-se que para Q = 0 ocorre um “salto” similar aquele mostrado na Fig. 4.33, enquanto Q \neq 0 leva a uma configuração crítica de flambagem aproximadamente assimétrica e sem qualquer “salto”.

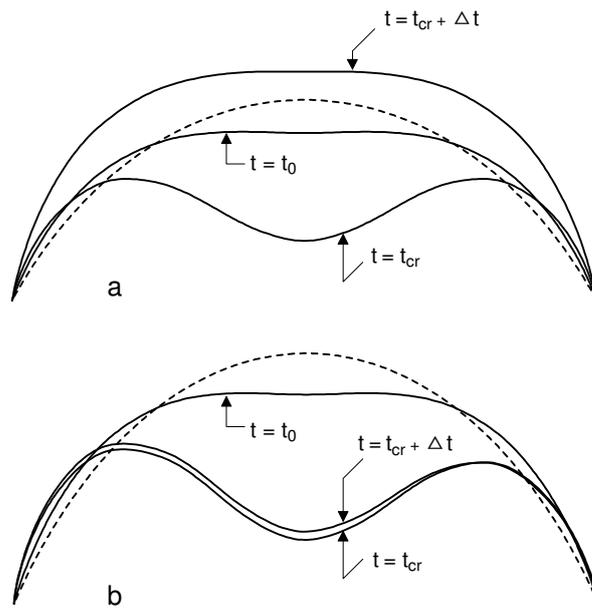


Figura 4.41. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para $\beta = 0.8$:
 (a) $Q = 0$; (b) $Q \neq 0$.

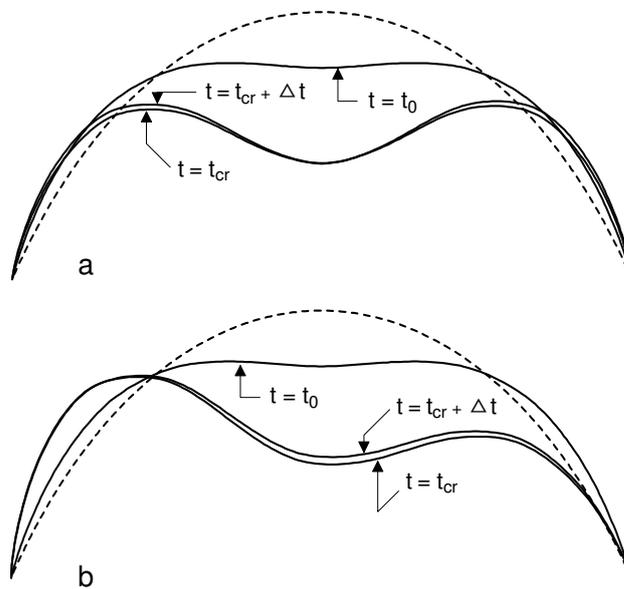
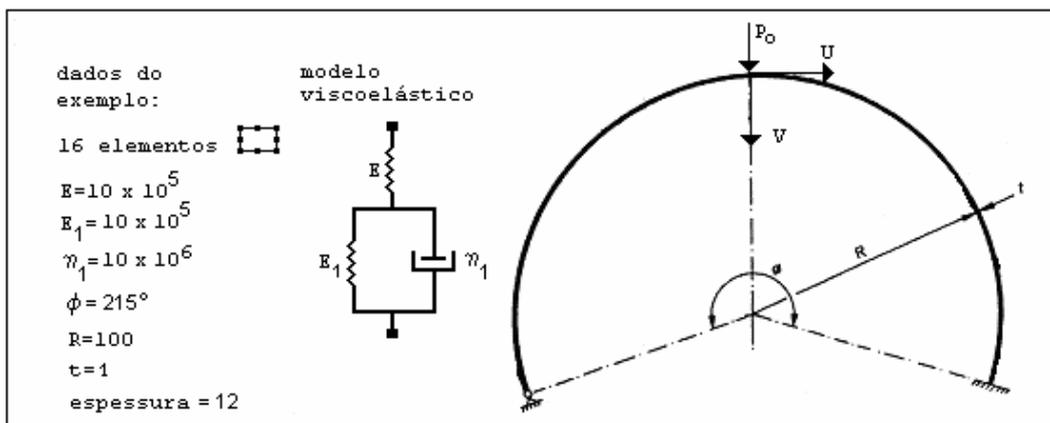


Figura 4.42. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para $\beta = 0.9$:
 (a) $Q = 0$; (b) $Q \neq 0$.

4.2.6 Arco Elevado Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.43. Utiliza-se uma malha composta por 16 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de P_0 , que corresponde a uma carga aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante. U e V são as componentes de deslocamento no topo.

As Figs. 4.45 a 4.48 mostram uma particularidade deste exemplo: a existência de deslocamentos críticos U e V , independentes do valor de β , ou seja, independentes do valor da carga P_0 . Os gráficos semi-log das Figs. 4.46 e 4.48 servem também para possibilitar a visualização da faixa de valores de β que garante a estabilidade da resposta.



Os valores críticos U_{cr} e V_{cr} são, aproximadamente, os mesmos da análise elástica do exemplo 4.1.4., conforme mostra a tabela da Fig 4.44. Um resultado semelhante é apresentado por Rabotnov (1969), para um outro modelo estrutural. De acordo com os dados da Fig. 4.44, os valores críticos aproximados são: $U_{cr} / R \approx 0.6$ e $V_{cr} / R \approx 1.2$, onde $R = 100$. Deve-se observar que dentre os valores de β testados neste exemplo, apenas aqueles listados na Fig. 4.44 levam à ocorrência de um tempo crítico. É possível, porém, a partir das Figs 4.46 e 4.48, verificar a influência do deslocamento crítico sobre curvas que estão relacionadas a valores de $\beta \geq 0.5$ não associados à ocorrência de um tempo crítico.

Análise viscoelástica	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	Análise elástica	
U_{cr} / R	0.60256	0.60852	0.60914	U_{cr} / R	0.62629
V_{cr} / R	1.24242	1.21000	1.17161	V_{cr} / R	1.17870

Figura 4.44. – Deslocamentos críticos para os arcos elástico e viscoelástico.

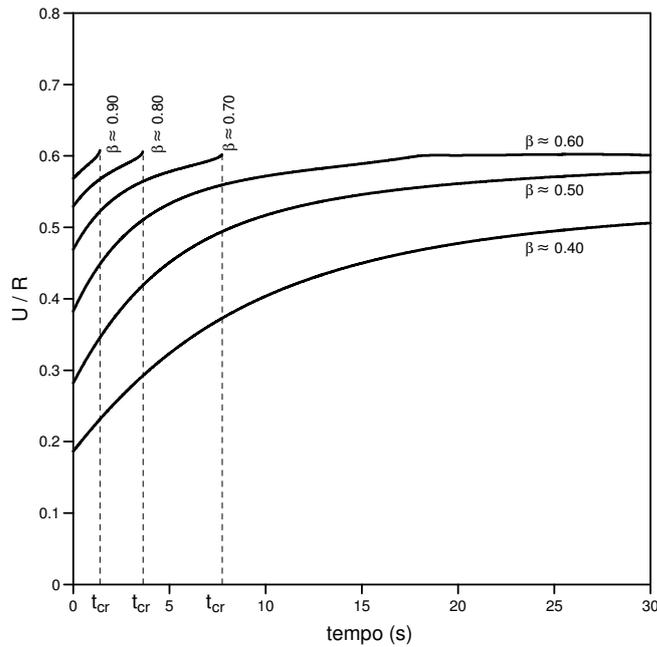


Figura 4.45. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ($U \times t$).

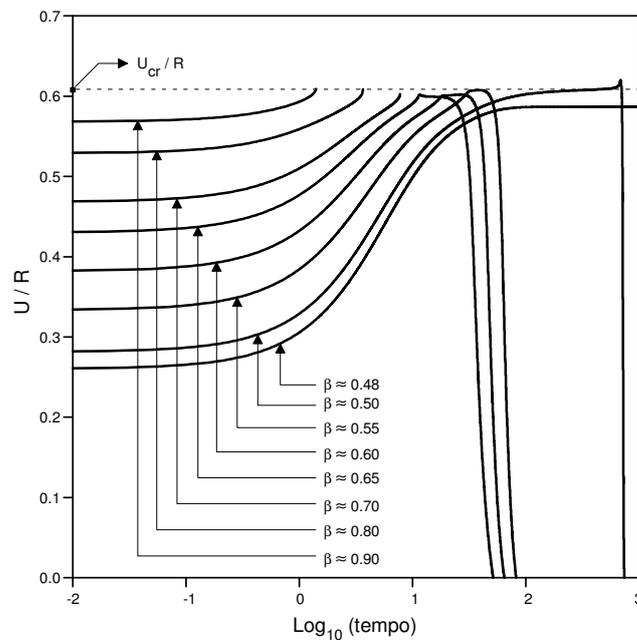


Figura 4.46. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ($U \times \text{Log}_{10}(t)$).

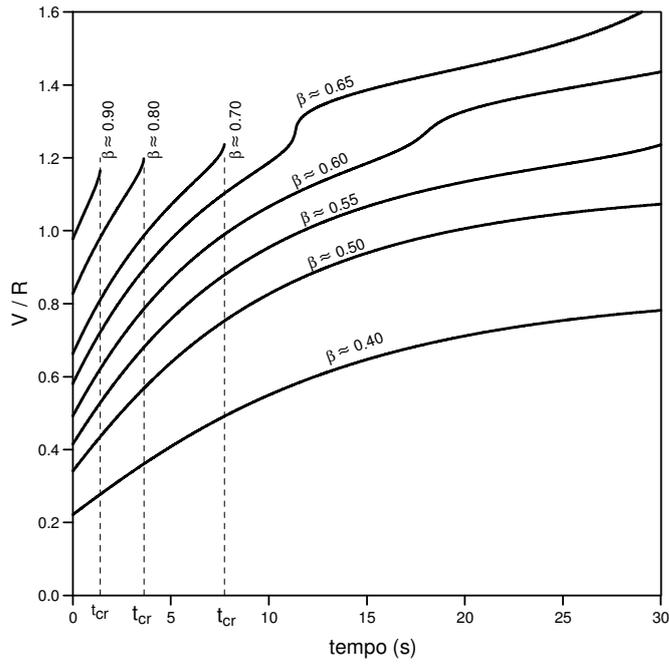


Figura 4.47. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ($V \times t$).

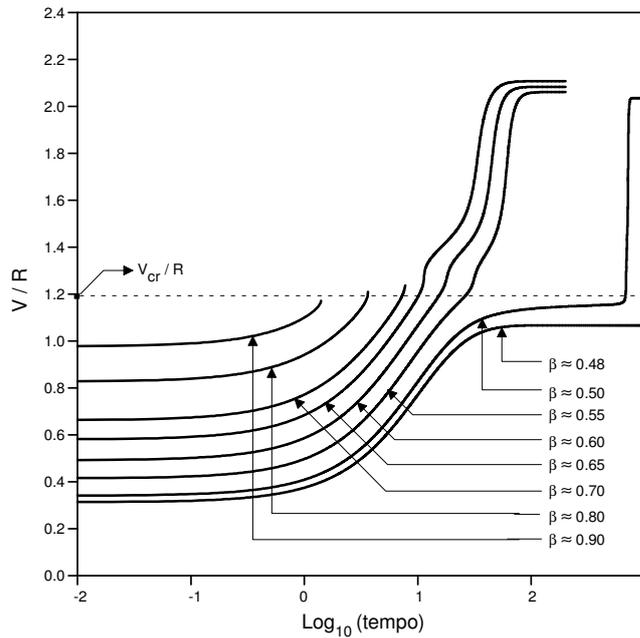


Figura 4.48. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ($V \times \text{Log}_{10}(t)$).

4.2.7 Calota Esférica Viscoelástica

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.49. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos axissimétricos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de P_0 , que corresponde a um anel de carga aplicado no instante $t=0$ e mantido constante. v é a componente de deslocamento no topo.

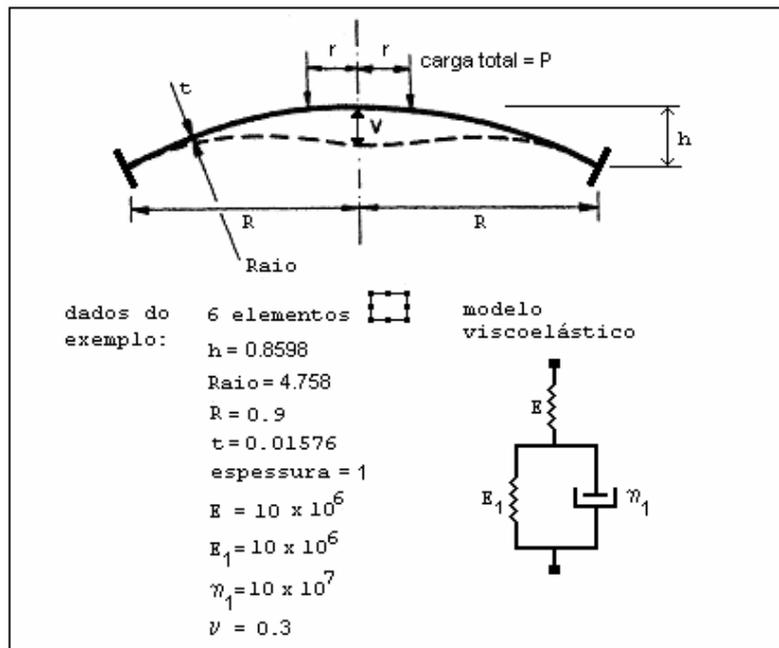


Figura 4.49. – Exemplo 4.2.7.: Calota axissimétrica viscoelástica.

As Figs. 4.50 e 4.51 mostram a resposta viscoelástica obtida para $r/R = 0.42$. Dentre os valores de r/R empregados no Ex. 4.1.5, verifica-se que a flambagem viscoelástica ocorre apenas para $r/R = 0.42$.

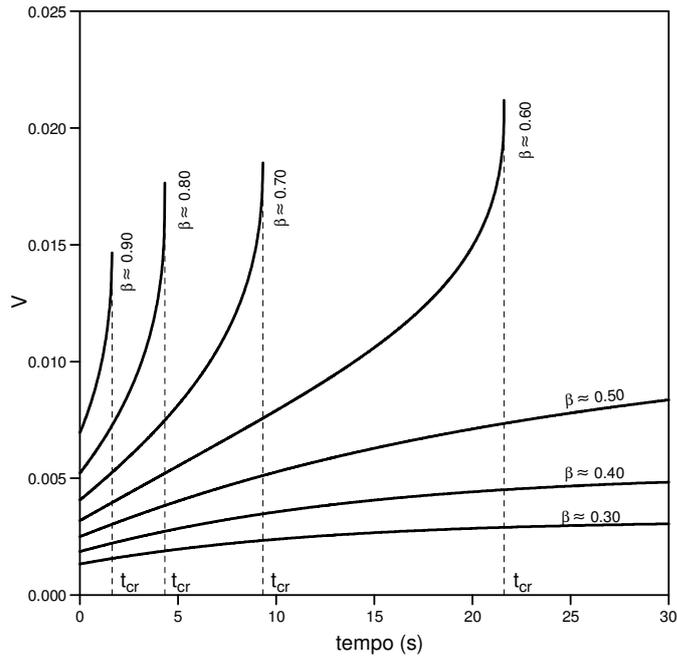


Figura 4.50. – Exemplo 4.2.7.: Curvas (V x t).

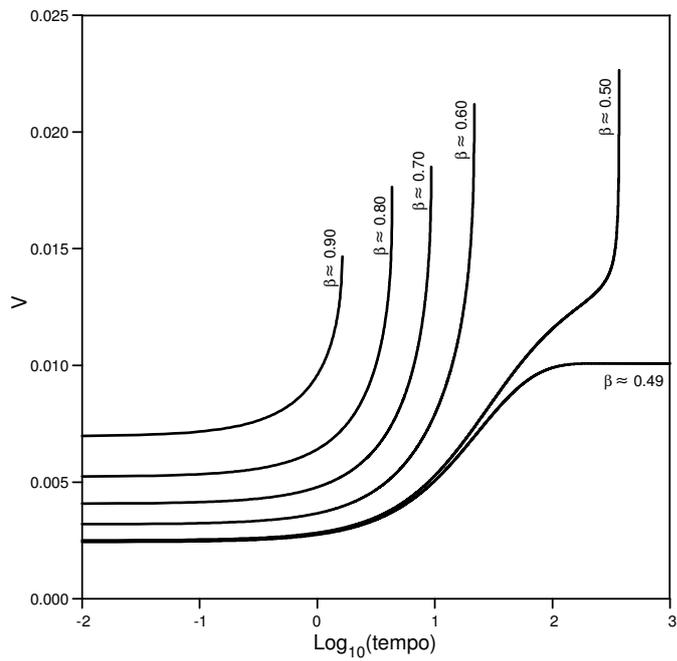


Figura 4.51. – Exemplo 4.2.7.: Curvas (V x $\text{Log}_{10}(t)$).

4.2.8 Cilindro Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.52. Utiliza-se uma malha composta por 20 elementos axissimétricos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de N_0 , que corresponde a uma carga aplicada no instante $t=0$ e mantida constante. Três graus de liberdade são estudados: U , H_1 e H_2 . A carga crítica elástica numérica N_e está definida na Fig. 4.52.

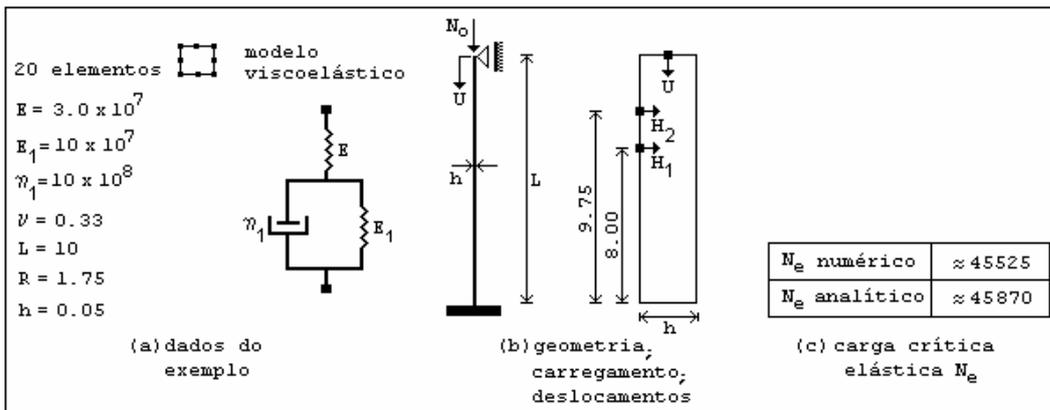


Figura 4.52. – Exemplo 4.2.8.: Cilindro viscoelástico.

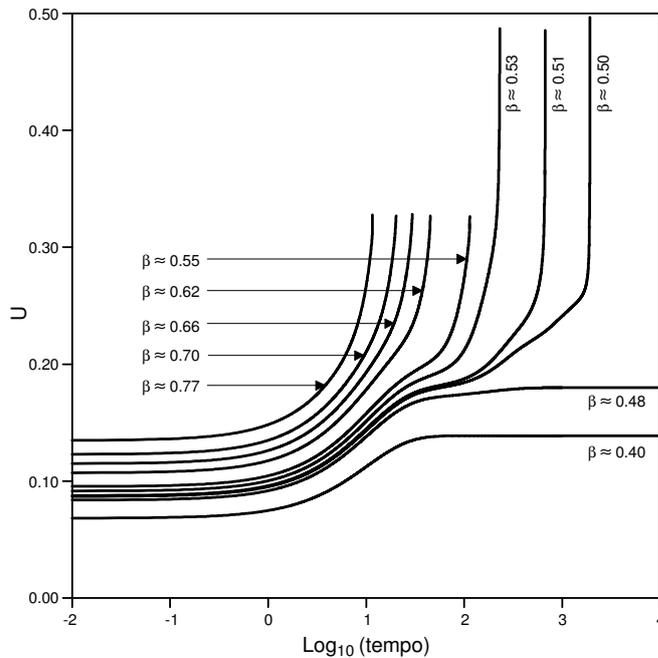


Figura 4.53. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ($U \times \text{Log}_{10}(t)$).

A Fig. 4.53 mostra curvas relacionadas à componente de deslocamento axial U . Os gráficos sugerem que existem deslocamentos axiais críticos diferenciados para duas faixas de valores de β : $0.50 < \beta < 0.53$ e $0.55 < \beta < 0.77$.

A resposta viscoelástica segundo a componente de deslocamento horizontal H_2 não apresenta um padrão definido, como pode ser visto na Fig. 4.54.

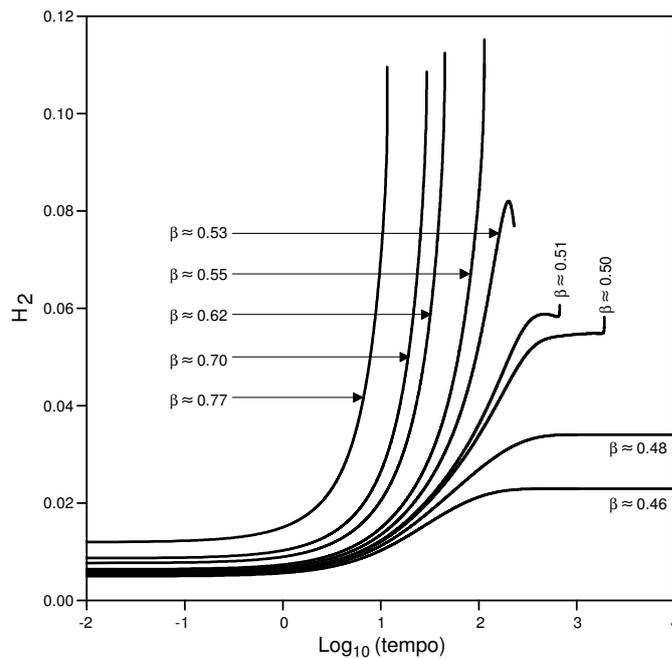


Figura 4.54. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ($H_2 \times \text{Log}_{10}(t)$).

As Figs. 4.55 e 4.56 mostram curvas relacionadas à componente de deslocamento H_1 . A resposta viscoelástica segundo esta componente confere uma particularidade a este exemplo. Na Fig. 4.56, observa-se, para $\beta = 0.44$, o efeito da não-linearidade geométrica sobre a resposta viscoelástica. A solução numérica mostra que a inversão do sentido do deslocamento H_1 ocorre apenas quando a não-linearidade geométrica é considerada. Um outro ponto a observar é o fato de que este efeito ocorre para valores de carga N_0 menores que o valor da carga crítica viscoelástica, ou seja, para valores de $\beta < 0.50$ ($\beta = 0.44$ e $\beta = 0.48$). Mesmo para valores de β acima do valor crítico ($\beta > 0.5$), pode-se observar um efeito similar para tempos menores que o tempo crítico.

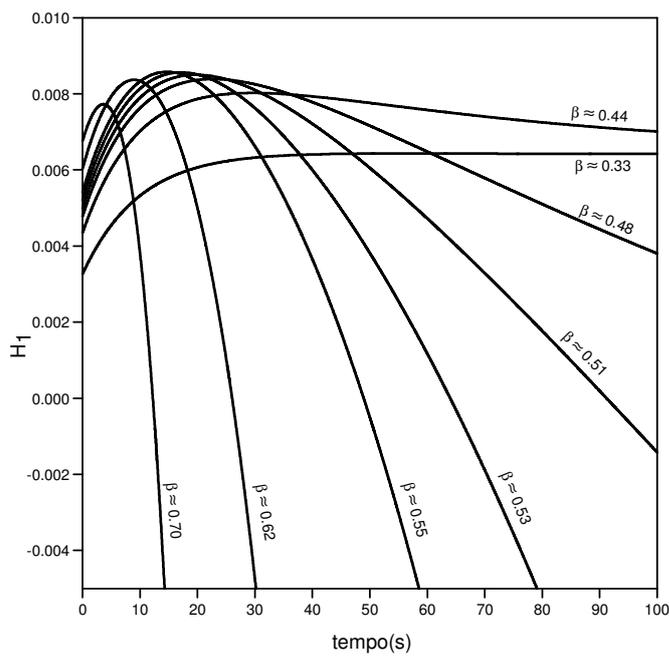


Figura 4.55. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ($H_1 \times t$).

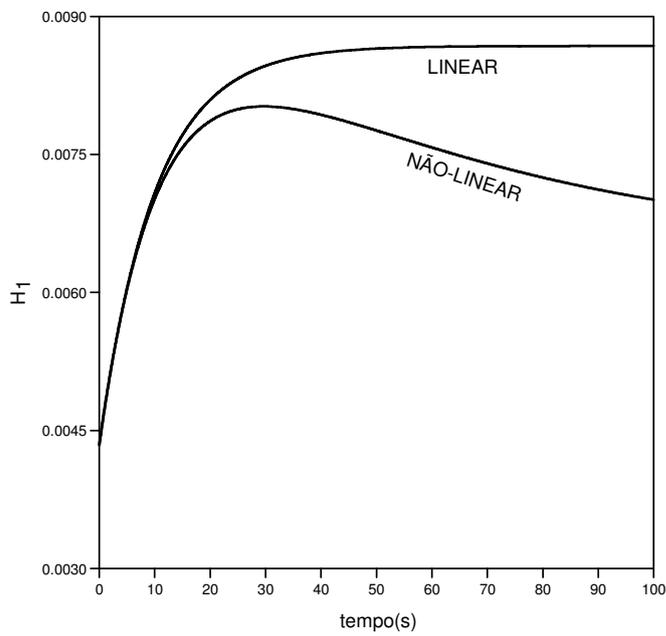


Figura 4.56. – Exemplo 4.2.8.: Comparação entre as respostas ($H_1 \times t$) linear e não-linear (geométrica) para $\beta = 0.44$.

A Fig. 4.57 esquematiza o padrão de resposta segundo a componente H_1 e mostra um resumo das observações feitas anteriormente.

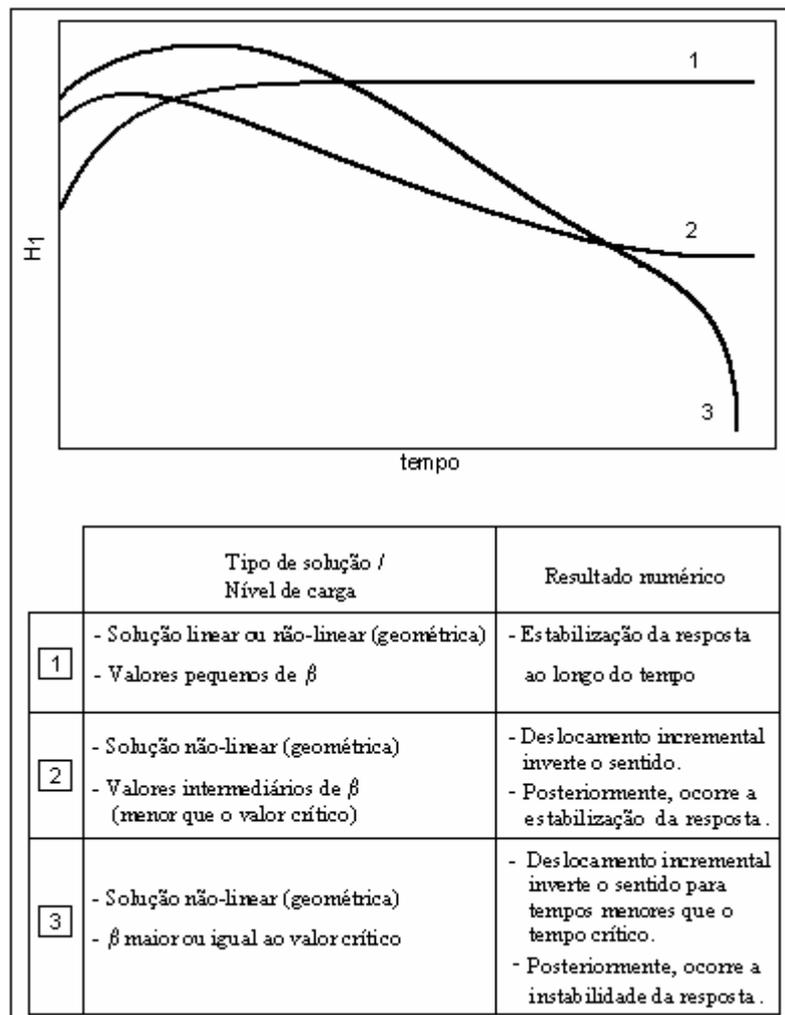


Figura 4.57. – Exemplo 4.2.8.: Três padrões distintos de resposta ($H_1 \times t$), relacionados ao tipo de análise (linear ou não-linear geométrica) e ao valor de β .

4.3 Observações

Algumas conclusões apresentadas por Oliveira (1990), relacionadas à influência da ordem de integração sobre o valor numérico de cargas críticas, estão de acordo com alguns resultados obtidos no presente trabalho.

Para a coluna elástica, por exemplo, observa-se, pela Fig. 4.58, que os resultados são melhores quando 4 pontos de integração são utilizados. Com essa quantidade de pontos de integração, apenas 5 elementos Q8 são necessários. Com

9 pontos de integração, no entanto, são necessários 20 elementos Q8 para que um bom resultado numérico seja gerado.

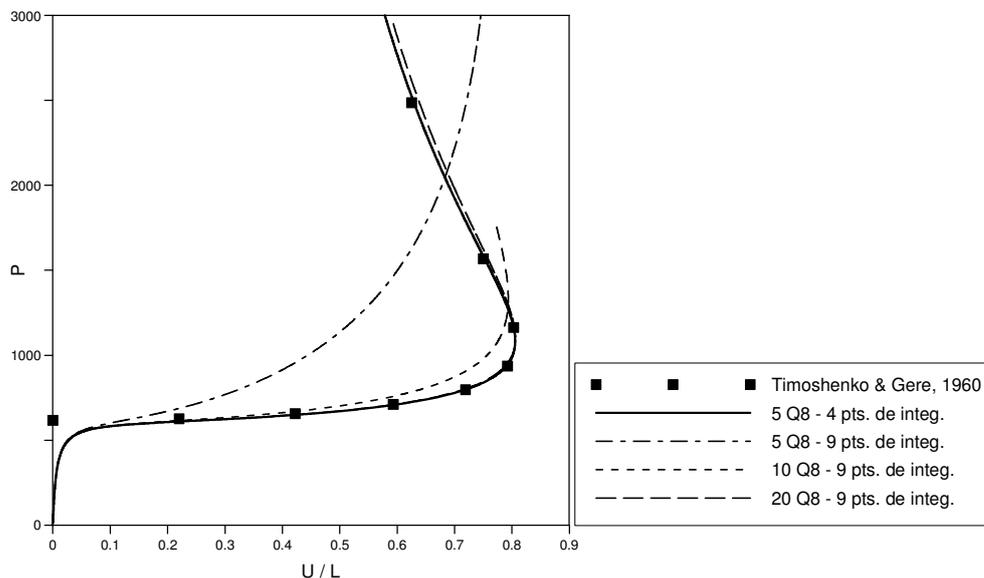


Figura 4.58 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para a coluna elástica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

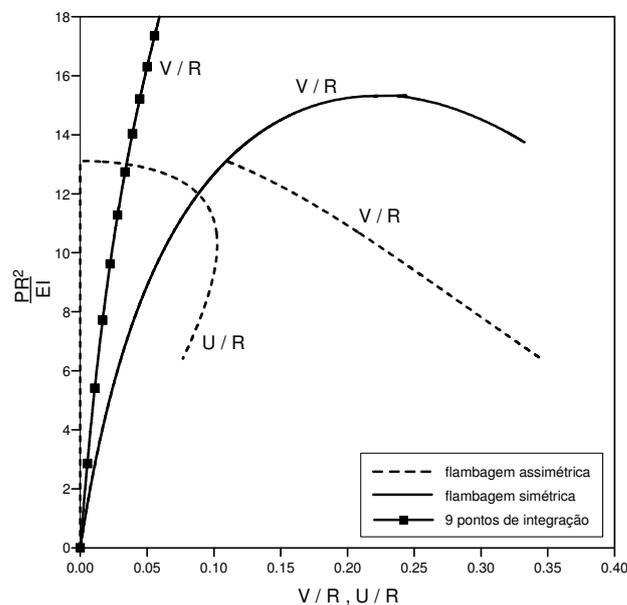


Figura 4.59 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco abatido.

A ordem de integração também influencia significativamente os resultados obtidos nos exemplos dos arcos abatido e elevado, conforme visto nas Figs. 4.59 e 4.60. Na Fig. 4.59, as trajetórias referentes à flambagem simétrica e assimétrica do

arco abatido (linhas cheia e tracejada) são obtidas com 4 pontos de integração (Ex. 4.1.3). Com 9 pontos de integração e com a mesma quantidade de elementos, observa-se um desvio significativo dos resultados. O mesmo acontece para o caso do arco elevado, conforme visto na Fig. 4.60.

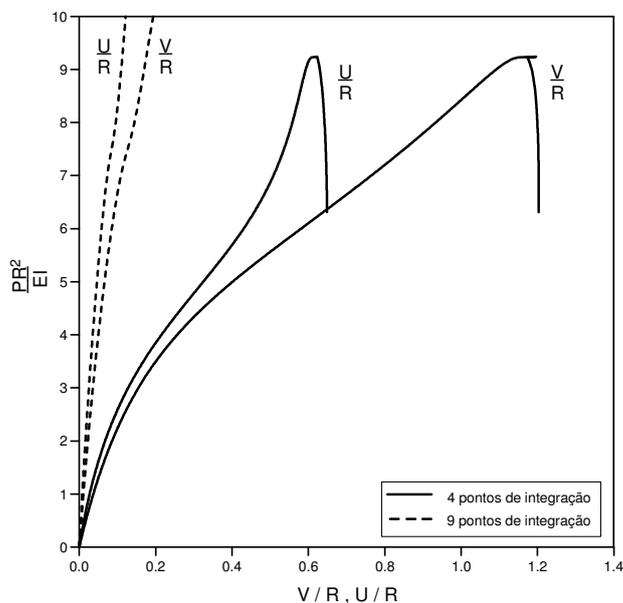


Figura 4.60 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco elevado.

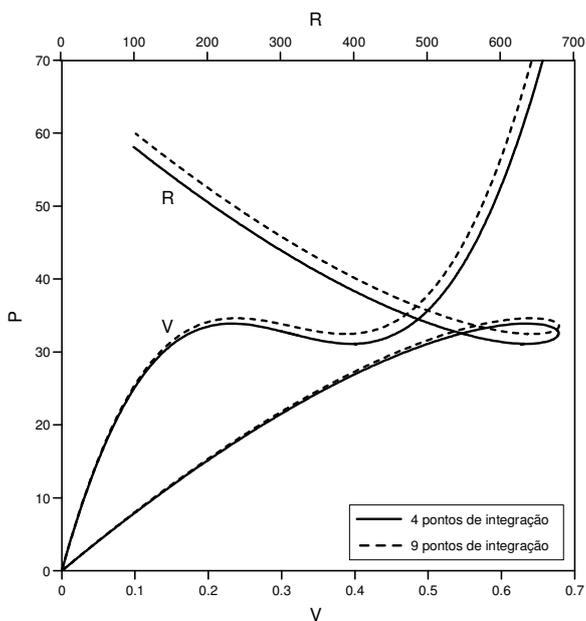


Figura 4.61 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o pórtico de Williams.

Para o pórtico de Williams, a Fig. 4.61 mostra que os resultados obtidos com 4 e 9 pontos de integração estão bem próximos. O mesmo acontece para o caso da calota esférica, conforme visto na Fig. 4.62.

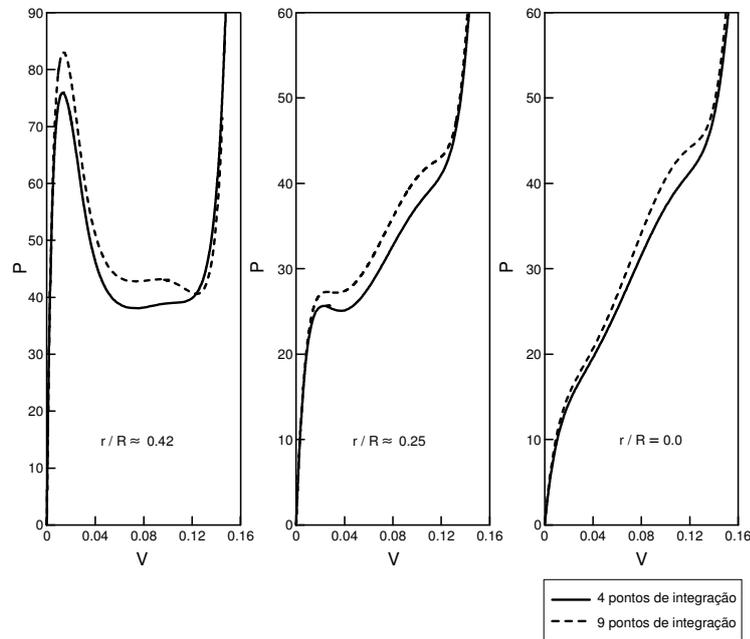


Figura 4.62 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para a calota esférica.