3
Solução Numérica

Neste capítulo, a estratégia numérica utilizada na solução do problema não-linear descrito no Cap. 2 é discutida. Inicialmente, uma equação de equilíbrio é definida a partir do princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) formulado de acordo com o referencial Lagrangiano total e expresso em termos do segundo tensor das tensões de Piolla-Kirchhoff e do tensor das deformações de Green-Lagrange. Essa equação de equilíbrio é posteriormente aproximada através da introdução de variáveis relacionadas à discretização do contínuo por elementos finitos baseados em deslocamentos. A partir dessa aproximação, deduz-se a matriz de rigidez tangente através do método de Newton-Raphson.

A matriz tangente é utilizada para compor uma equação incremental da qual também fazem parte o vetor de forças internas, os vetores de força incremental provenientes das deformações incrementais de origem térmica e devidas à fluência, o vetor de forças externas e o vetor de deslocamentos nodais incrementais. Todos esses conjuntos são particularizados para o elemento finito isoparamétrico bidimensional empregado na análise do estado plano de tensões e no caso axissimétrico. A equação incremental assim definida constitui a base do esquema computacional desenvolvido, cujos passos básicos também são apresentados.

A modelagem incremental do comportamento viscoelástico do material é baseada em um modelo mecânico formado pela associação em série de modelos de Kelvin (Zienkiewicz, 1968). O efeito viscoelástico é incluído através da consideração de um incremento de deformações iniciais.

O problema da não-linearidade geométrica, de uma forma geral, deve ser abordado a partir da consideração de grandes deslocamentos e grandes componentes de deformação. Neste trabalho, entretanto, preserva-se a hipótese de grandes deslocamentos, mas a hipótese de grandes componentes de deformação é descartada, ou seja, $\varepsilon_{ij} << 1$ é a situação admitida. É possível, dessa forma, aplicar modelos constitutivos adequados ao regime de deformações infinitesimais.

3.1
Equação de Equilíbrio

Para um sólido deformado em equilíbrio, o princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) estabelece que

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \int_V \rho \delta u^T q dV + \int_A \delta u^T p dA \,. \qquad (3.1)$$

Neste trabalho, a formulação Lagrangiana total é adotada. As integrais da Eq. (3.1) são, portanto, referentes à área e ao volume do sólido na configuração indeformada, que são aproximadamente iguais ao volume e à área do sólido deformado para o caso de pequenas componentes de deformação. Como medidas de tensão e deformação, o 2º tensor das tensões de Piola-Kirchhoff σ e o tensor das deformações de Green-Lagrange ε são adotados. Essas medidas condizem com a formulação Lagrangiana total. O vetor δu representa uma variação do vetor de deslocamentos em relação à configuração de equilíbrio; $\delta\varepsilon$ é a variação das componentes de deformação, compatível com δu. O vetor q representa as forças de massa atuantes sobre o volume indeformado de densidade ρ, enquanto p é o vetor das forças distribuídas que atuam sobre regiões do contorno do corpo.

3.2
Formulação por Elementos Finitos

As definições utilizadas nessa seção constam no trabalho de Wood & Zienkiewicz (1977). A Eq. (3.1) pode ser aproximada através de uma formulação por elementos finitos baseados em deslocamentos, cuja descrição cinemática é definida pelas seguintes expressões:

$$u = Nd \,, \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_L \,. \qquad (3.3)$$

Na Eq. (3.2), o vetor u representa o campo de deslocamentos dos pontos do elemento finito, N é a matriz das funções de interpolação e $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots\ldots & d_n \end{bmatrix}$

é o vetor dos n deslocamentos nodais discretos. N e d são definidos com base na configuração indeformada, ou seja, $N = N(x)$ e $d = d(x)$, onde x representa o vetor posição dos pontos materiais do elemento indeformado. As componentes do vetor d devem ser medidas em relação à posição dos nós na configuração indeformada. A variação no vetor u é dada por

$$\delta u = N\delta d \,, \tag{3.4}$$

Na Eq. (3.3), ε_0 representa a parcela do tensor das deformações de Green-Lagrange que é linear em relação aos gradientes de deslocamentos. Em termos de deslocamentos nodais, esta parcela pode ser definida a partir da seguinte relação:

$$\varepsilon_0 = B_0 d \,. \tag{3.5}$$

A matriz B_0 contém termos independentes das componentes do vetor d. A Eq. (3.5) é, portanto, linear, e a variação da parcela ε_0 é escrita como

$$\delta\varepsilon_0 = B_0 \delta d \,. \tag{3.6}$$

Na Eq. (3.3), ε_L representa a parcela não-linear do tensor das deformações de Green-Lagrange, que pode ser expressa a partir de uma matriz A e de um vetor Θ, cujas componentes são gradientes de deslocamentos. Esses conjuntos podem ser particularizados para um elemento finito específico, mas isso será feito posteriormente. Importa, agora, definir a relação:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} A\Theta \,, \tag{3.7}$$

cuja variação é aproximada por

$$\delta\varepsilon_L = A\delta\Theta \,. \tag{3.8}$$

Quando associado a um elemento finito, o vetor Θ pode ser expresso a partir do vetor dos deslocamentos nodais totais d na forma

$$\Theta = Gd\,, \tag{3.9}$$

onde G contém derivadas cartesianas das funções de interpolação. Uma vez que a Eq. (3.9) é linear em d, pois o vetor Θ é linear em relação aos gradientes de deslocamentos, a variação deste vetor é dada por

$$\delta\Theta = G\delta d\,. \tag{3.10}$$

Observadas as Eqs. (3.7) a (3.10), a parcela não-linear da Eq. (3.3) pode ser agora definida em relação aos deslocamentos nodais a partir de

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} B_L d\,, \tag{3.11}$$

e sua variação por

$$\delta\varepsilon_L = B_L d\,, \tag{3.12}$$

onde

$$B_L = AG\,. \tag{3.13}$$

Tem-se, portanto, as seguintes relações finais entre as componentes de deformação de Green-Lagrange e os deslocamentos nodais de um dado elemento finito:

$$\varepsilon = \left[B_0 + \frac{1}{2} B_L \right] d\,, \tag{3.14}$$

para as componentes de deformação total e os deslocamentos nodais totais, e

$$\delta\varepsilon = B\,\delta d\,, \tag{3.15}$$

para as respectivas variações, onde

$$B = B_0 + B_L \; . \tag{3.16}$$

Da substituição das Eqs. (3.4) e (3.15) na Eq. (3.1), obtém-se:

$$\delta d^T \int_V B^T \sigma dV = \delta d^T \int_V N^T \rho q dV + \delta d^T \int_A N^T p dA \; . \tag{3.17}$$

Uma vez que os deslocamentos virtuais são arbitrários, a seguinte equação de equilíbrio é obtida.

$$\int_V B^T \sigma dV = \int_V N^T \rho q dV + \int_A N^T p dA \; . \tag{3.18}$$

O lado direito da Eq. (3.18) corresponde a um vetor de forças nodais equivalentes. Na Eq. (3.19), que corresponde à Eq. (3.18) reescrita, esse vetor é representado por F, que deve incorporar as forças diretamente aplicadas nos nós.

$$\Psi = \int_V B^T \sigma dV - F = 0 \; . \tag{3.19}$$

Neste trabalho, é suficiente considerar uma relação linear elástica entre as componentes de tensão e deformação. Dessa forma, o vetor das tensões e a respectiva variação são dados por

$$\sigma = C\varepsilon \, , \tag{3.20}$$

$$\delta\sigma = C\,\delta\varepsilon \; . \tag{3.21}$$

3.3
Método de Newton-Raphson e Matriz de Rigidez Tangente

A Eq. (3.19) é não-linear. Seja uma estimativa inicial de solução $\Psi[d_i]$ definida através de um vetor de deslocamentos totais d_i, aproxima-se uma solução desejada por $(\Psi[d_i + \Delta d] = 0)$ através de uma expansão em série de Taylor da Eq. (3.19) em torno de d_i , ou seja,

$$\Psi(d_i + \Delta d) = \Psi(d_i) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial d}\right]_i \Delta d \,, \tag{3.22}$$

onde Δd é um vetor de deslocamentos incrementais e a expansão em série é considerada apenas até o segundo termo. A matriz de rigidez tangente K_T é dada pela derivada do segundo termo à direita da Eq. (3.22), e a definição dos termos dessa matriz depende do vetor d_i. A aproximação $\left(\Psi[d_i + \Delta d] = 0\right)$ fornece

$$\left[K_T\right]_i \Delta d = -\Psi(d_i) = F - \left[\int_V B^T \sigma dV\right]_i \,. \tag{3.23}$$

A parcela à direita da Eq. (3.23) corresponde ao vetor de forças desequilibradas. A partir da Eq. (3.23), o vetor de deslocamento incremental Δd é obtido e empregado na obtenção de uma nova aproximação dada por

$$d_{i+1} = d_i + \Delta d \,, \tag{3.24}$$

com a qual um dado critério de convergência é testado para verificar a necessidade de uma nova iteração. Este método iterativo recebe o nome de método de Newton-Raphson. Encontra-se comumente associado a soluções incrementais, através do chamado processo incremental-iterativo.

Das Eqs. (3.22) e (3.23), a matriz de rigidez tangente avaliada em $d = d_i$ é dada por

$$K_T = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial d}\right]_i \,. \tag{3.25}$$

Para um vetor F independente dos deslocamentos, apenas a integral da Eq. (3,19), correspondente ao vetor de forças internas, contribui com a matriz tangente. A derivada desse termo fornece

$$K_T = K_o + K_\sigma \,. \tag{3.26}$$

onde

$$K_o = \int_V B^T C B \, dV , \tag{3.27}$$

$$K_\sigma = \int_V G^T S G \, dV , \tag{3.28}$$

3.4 Solução Numérica Incremental

A estratégia de solução numérica adotada está baseada em passos incrementais sem o emprego de métodos iterativos de correção. No entanto, o vetor de forças internas é incluído na formulação. Procedimento similar é empregado por Larsen & Popov (1974) e Chen & Lin (1982). Pode-se dizer que este procedimento equivale ao método de Newton-Raphson com uma única iteração.

O termo incremental pode estar referido a incrementos de carga ou tempo. É adequado e necessário utilizar incrementos de tempo quando o problema estrutural envolve os efeitos da inércia ou quando a relação constitutiva do material requer a inclusão do tempo, como é o caso do material viscoelástico aqui tratado. Para a solução do problema elástico estático, no entanto, pode-se falar em incrementos de carga.

Seja uma configuração de referência conhecida ${}^1C$ associada a um tempo t. Deseja-se determinar uma configuração ${}^2C$, associada ao tempo $t + \Delta t$, através da seguinte aproximação:

$${}^1K_T \, \Delta d = {}^2F - {}^1F_{int} , \tag{3.29}$$

onde ${}^1K_T$ é a matriz de rigidez tangente avaliada a partir da substituição dos dados de deslocamento total (vetor ${}^1d$) e tensão (vetor ${}^1\sigma$), associados à configuração de referência ${}^1C$, nas Eqs. (3.27) e (3.28), e ${}^1F_{int}$ é montado a partir desses mesmos dados quando introduzidos na integral

$$F_{int} = \int_V B^T \sigma dV . \tag{3.30}$$

O vetor ^2F da Eq. (3.29) corresponde às forças externas aplicadas no tempo $t+\Delta t$, decorrentes de um incremento de forças aplicado sobre um dado vetor ^1F, associado à configuração ^1C..

A inclusão de deformações incrementais iniciais de origem térmica ou decorrentes da fluência requer a seguinte modificação na Eq. (3.29) para o cálculo do vetor Δd:

$$ {}^1K_T \, \Delta d = {}^2F - {}^1F_{int} + F^{tr} + F^{ve}, \tag{3.31}$$

onde F^{tr} e F^{ve} são dados por

$$ F^{tr} = \int_V B^T C \varepsilon^{tr} dV, \tag{3.32}$$

$$ F^{ve} = \int_V B^T C \varepsilon^{ve} dV. \tag{3.33}$$

A inclusão desses vetores na equação incremental decorre da seguinte relação entre incrementos de tensão e deformação (Creus & Marques, 1994):

$$ \Delta\sigma = C\,(\Delta\varepsilon - \varepsilon^{tr} - \varepsilon^{ve}). \tag{3.34}$$

onde $\Delta\varepsilon$ corresponde ao incremento total de deformações, ε^{tr} representa as deformações incrementais de origem térmica e ε^{ve} representa a parcela viscoelástica das deformações incrementais.

3.4.1 Implementação Computacional

A implementação computacional da Eq. (3.29) permite o traçado de trajetórias de equilíbrio e o estudo da estabilidade elástica do sistema através de um procedimento simples que verifica, a cada passo incremental, o valor do pivô da matriz de rigidez tangente. Essa verificação tem duplo objetivo: indicar a presença de um ponto de bifurcação ou de um ponto-limite sobre a trajetória, em decorrência da troca de sinal do pivô, e permitir o controle de carga, conforme discutido na Seção 3.4.2. Os seguintes passos básicos compõem a implementação:

(a) Montagem da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas, com base na configuração de referência ${}^{1}C$ corrente. No início do processo incremental, a configuração de referência é a configuração indeformada.

(b) Definição do vetor de cargas a partir da expressão ${}^{2}F = {}^{1}\lambda\ P_r + \Delta\lambda\ P_r$, onde P_r é um vetor de cargas de referência definido na entrada de dados e λ é um fator de carga, sendo que ${}^{1}\lambda$ corresponde ao nível de carga na configuração de referência ${}^{1}C$ e $\Delta\lambda$ serve para incrementar a carga externa. O sinal de $\Delta\lambda$ depende de uma verificação prévia do sinal do pivô da matriz de rigidez tangente já definida no passo (a).

(c) Obtenção do vetor de deslocamentos incrementais Δd a partir da Eq. (3.29).

(d) Obtenção dos incrementos nas componentes de deformação dos elementos, com a mesma matriz B utilizada na montagem da matriz tangente e do vetor de forças internas em ${}^{1}C$: $\Delta\varepsilon = B\,\Delta d$

(e) Obtenção dos incrementos nas componentes de tensão dos elementos, a partir da matriz constitutiva elástica C e dos incrementos nas componentes de deformação: $\Delta\sigma = C\,\Delta\varepsilon$

(f) Atualização das tensões nos elementos e dos deslocamentos nodais totais: ${}^{2}\sigma = {}^{1}\sigma + \Delta\sigma$, ${}^{2}d = {}^{1}d + \Delta d$.

(g) Volta ao passo (a). A nova configuração ${}^{1}C$ está agora associada às tensões e deslocamentos totais atualizados no passo (f).

A solução do problema elástico fornece as tensões e os deslocamentos nodais totais associados a um certo nível de carga. Esses dados compõem uma condição inicial que deve ser utilizada para a obtenção da resposta viscoelástica do sistema através de uma implementação computacional baseada na Eq. (3.31). O esquema incremental deve agora considerar incrementos de tempo. O acompanhamento do sinal do pivô da matriz de rigidez tangente passa a ser feito em cada passo de tempo, agora com o objetivo único de verificar a ocorrência do tempo crítico, conforme observado no Cap. 2 (Seção 2.3).

Embora o programa computacional implementado seja capaz de considerar casos que envolvem variação de temperatura (Ex. 4.2.2) e forças externas nodais (Ex. 4.2.1) variáveis no tempo, o resumo mostrado a seguir considera apenas o caso básico de um vetor de forças externas que é mantido constante após ser aplicado no instante t = 0.

(a) Montagem da matriz de rigidez tangente, do vetor de forças internas e do vetor F^{ve}, com base na configuração de referência ${}^{1}C$. A montagem de F^{ve} deve ser antecedida pela determinação do vetor ε^{ve}, que depende apenas de dados conhecidos em ${}^{1}C$ e do valor do incremento de tempo Δt. No início do processo incremental, a configuração de referência é aquela obtida com a solução elástica no tempo t = 0. Deve-se considerar que ${}^{1}C$ está associada a um tempo t.

(b) Obtenção do vetor de deslocamentos incrementais Δd a partir da Eq. (3.31). Esse incremento ocorre no intervalo de tempo Δt.

(c) Obtenção do incremento total de deformação nos elementos, com a mesma matriz B utilizada no passo (a): $\Delta\varepsilon = B\,\Delta d$.

(d) Obtenção do incremento de tensões: $\Delta\sigma = C\,(\Delta\varepsilon - \varepsilon^{ve})$. O vetor incremental ε^{ve} deve ser o mesmo utilizado na montagem do vetor F^{ve}, no passo (a).

(e) Atualização das componentes de deformação viscoelástica total nos elementos de acordo com o esquema de modelagem do material (discutido mais adiante).

(f) Atualização das tensões nos elementos e dos deslocamentos nodais totais: ${}^{2}\sigma = {}^{1}\sigma + \Delta\sigma$, ${}^{2}d = {}^{1}d + \Delta d$. O sobrescrito 2 indica uma nova configuração ${}^{2}C$, associada ao tempo $t + \Delta t$.

(g) Volta ao passo (a) com a nova configuração de referência, que é composta pelos dados atualizados nos passos (e) e (f).

3.4.2 Controle de Carga

O programa computacional engloba dois procedimentos distintos: a solução incremental do problema elástico, baseada em incrementos de carga, e a solução incremental do problema viscoelástico, baseada em incrementos de tempo e precedida pela solução elástica.

A solução elástica fornece trajetórias de equilíbrio que podem conter pontos críticos do tipo bifurcação ou ponto-limite. Pelo menos para os exemplos da Seção 4.1, o esquema numérico adotado permite encontrar e ultrapassar esses pontos críticos através do acompanhamento, a cada passo incremental, dos valores dos termos que compõem a diagonal da matriz de rigidez tangente.

Um primeiro ponto a considerar diz respeito à magnitude do incremento de carga. Para que o traçado do caminho de equilíbrio seja obtido com uma certa precisão, esses incrementos devem ser suficientemente pequenos, uma vez que nenhum método iterativo de correção é utilizado. Para tentar garantir incrementos de carga suficientemente pequenos, o programa considera um fator $\Delta\lambda$ que decresce à medida que o valor do pivô da matriz de rigidez tangente diminui. Isso ocorre, por exemplo, quando o caminho de equilíbrio se aproxima de um ponto-limite. Deve-se observar que $\Delta\lambda$ é um fator que multiplica uma carga de referência constante, previamente definida na entrada de dados, e dessa multiplicação surge o incremento da carga externa, ou seja, o vetor ${}^{2}F$ das Eqs. (3.29) e (3.31) é obtido pela soma ${}^{2}F = {}^{1}F + \Delta\lambda\ P_r$, onde ${}^{1}F$ é o vetor de forças nodais na configuração de referência e P_r é um vetor de cargas de referência.

A ultrapassagem de pontos críticos depende também do controle do fator $\Delta\lambda$, mais precisamente do controle sobre o sinal desse fator, que pode ser modificado de acordo com as trocas de sinal do pivô da matriz de rigidez tangente. Esse processo encontra-se automatizado no programa, e pode ser perfeitamente aplicado a sistemas elásticos cujas trajetórias possuem apenas ponto-limite. Sua simplicidade, no entanto, provoca limitações, conforme observado no Ex. 4.1.3.

3.4.3 Incremento de Tempo

O procedimento utilizado na solução do problema viscoelástico é baseado no esquema numérico proposto por Zienkiewicz et al (1968). Durante o incremento de tempo Δt, a tensão e a deformação viscoelástica total são consideradas constantes, com os valores correspondentes ao instante de tempo que antecede o incremento. Esses valores são utilizados para definir o incremento de deformação viscoelástica que ocorre em Δt, conforme descrito na Seção 3.6. Este incremento, por sua vez, é utilizado para montar o vetor F^{ve} da Eq. (3.31), de acordo com a Eq. (3.33). Em todos os exemplos da Seção 4.2, adota-se $\Delta t = 0{,}01$. A escolha desse valor foi baseada em testes feitos com os exemplos de validação 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3.

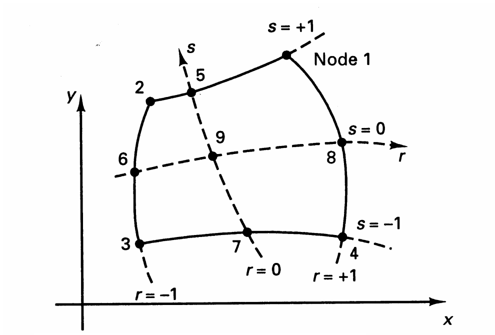
3.4.4 Validação do Programa Computacional

Implementou-se uma rotina computacional em linguagem Fortran. A validação do modelo está baseada nas observações a seguir.

- Para auxiliar na geração de coordenadas nodais, sobretudo nos exemplos que envolvem arcos, e para verificar os resultados obtidos com modelos elásticos lineares, utilizou-se o programa FEAPpv (http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv).
- Os resultados dos exemplos da Seção 4.1, exceto o exemplo do cilindro elástico, foram comparados com os resultados obtidos por Wood, & Zienkiewicz (1977). Para o cilindro, considerou-se o valor conhecido da carga crítica. Os dados utilizados constam no trabalho de Hughes et al. (1981).
- A simulação do comportamento viscoelástico (fluência e relaxação) foi verificada a partir dos Exs. 4.2.1. e 4.2.2., cujos resultados analíticos são de fácil obtenção.
- Finalmente, o exemplo da coluna viscoelática (Ex. 4.2.3) serviu para validar o funcionamento do programa em relação a problemas que envolvem não-linearidade geométrica e viscoelasticidade.

3.5 Elemento Finito

Conhecidas a forma geral da equação incremental e as matrizes e vetores que a compõem, resta particularizar esses termos para o elemento finito isoparamétrico mostrado da Fig. 3.1. As formulações para o estado plano de tensões e para a análise axissimétrica são consideradas.



(a) Elemento bidimensional com 4 a 9 nós

Incluir apenas se o nó i estiver definido

		$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$h_1 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$			$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_2 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$-\frac{1}{4}h_9$
$h_3 =$	$\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$-\frac{1}{4}h_9$
$h_4 =$	$\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_5 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_7 =$	$\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 =$	$\frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 =$	$(1-r^2)(1-s^2)$					

(b) Funções de interpolação

Figura 3.1. – Elemento finito e funções de interpolação (Bathe, 1995).

3.5.1 Descrição cinemática

Seja um sistema cartesiano fixo bidimensional formado pelos eixos (X,Y), e seja um ponto material de um sólido indeformado definido através das coordenadas Lagrangianas

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

com x e y medidos sobre os eixos X e Y, respectivamente.

Para descrever o comportamento cinemático do elemento bidimensional, é necessário considerar duas componentes para o campo de deslocamentos U:

$$U(\bar{x}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

As componentes de deformação de Green-Lagrange para estados planos são dadas por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Para a análise axissimétrica, inclui-se a componente circunferencial ε_θ:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

O vetor ε das deformações pode ser parcelado segundo a Eq. (3.3). Esse desmembramento fornece, para o estado plano de tensões,

$$\varepsilon_o = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{3.39.a}$$

$$\varepsilon_L = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ 2\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \end{bmatrix}, \tag{3.39.b}$$

e, para o estado axissimétrico,

$$\varepsilon_o = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{u}{x} \end{bmatrix}, \tag{3.40.a}$$

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ 2\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\ \left(\dfrac{u}{x}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{3.40.b}$$

Para este último caso, deve-se observar que a coordenada x é definida como a coordenada radial e y faz o papel da coordenada axial (geralmente referida como coordenada z).

Introduz-se uma matriz A e um vetor Θ, cujas componentes são gradientes de deslocamentos devidamente arranjados, para que as parcelas não-lineares de ε, dadas por (3.39.b) e (3.40.b), sejam reescritas de acordo com a Eq. (3.7). Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{3.41.a}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{3.41.b}$$

para o estado plano de tensões e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{x} \end{bmatrix}, \qquad (3.42.a)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{x} \end{bmatrix}. \qquad (3.42.b)$$

para o estado axissimétrico.

São também definidas as matrizes

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}, \qquad (3.43)$$

para o estado plano de tensões, e

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ H_3 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix},\ H_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad (3.44)$$

para o estado axissimétrico, com as quais é possível escrever cada linha A_i das matrizes A, definidas nas Eqs. (3.41.a) e (3.42.a), através, respectivamente, das expressões

$$A_{i(1x4)} = \Theta^T H_i, i = 1...3, \qquad (3.45)$$

$$A_{i(1x5)} = \Theta^T H_i, i = 1...4, \qquad (3.46)$$

ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \Theta^T H_1 \\ \Theta^T H_2 \\ \Theta^T H_3 \\ \Theta^T H_4 \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

onde a última linha em (3.47) surge apenas para o caso axissimétrico.

A matriz G da Eq. (3.9) é dada por

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & .... & .... & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & .... & .... & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & .... & .... & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & .... & .... & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

para o estado plano de tensões, e

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & .... & .... & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & .... & .... & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & .... & .... & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & .... & .... & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{N_1}{x} & 0 & .... & .... & \frac{N_n}{x} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

para o estado axissimétrico. $N_i(x,y)$ representa a função de interpolação referente ao nó i. O vetor das n componentes de deslocamento nodal do elemento é dado por

$$d = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ .... \\ .... \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

3.5.2
Matriz de Rigidez Tangente

Com o auxílio dos vetores e matrizes definidos na Seção 3.5.1, são agora deduzidas as parcelas que compõem a matriz de rigidez tangente do elemento finito adotado, de acordo com as Eqs. (3.26) a (3.28).

3.5.2.1
Estado Plano de Tensões

Seja ${}^{1}d$ o vetor de deslocamentos nodais totais do elemento com n graus de liberdade em uma configuração de equilíbrio de referência ${}^{1}C$ conhecida, dado por

$$ {}^{1}d = \begin{bmatrix} {}^{1}u_1 \\ {}^{1}v_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ {}^{1}u_n \\ {}^{1}v_n \end{bmatrix} . \qquad (3.51) $$

Seja ${}^{1}\sigma$ o vetor das tensões atuantes nessa mesma configuração, dado por

$$ {}^{1}\sigma = \begin{bmatrix} {}^{1}\sigma_{xx} \\ {}^{1}\sigma_{yy} \\ {}^{1}\tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (3.52) $$

Com o auxílio das matrizes H_i definidas em (3.43) e do vetor definido na Eq. (3.52), monta-se uma matriz ${}^{1}S$ a partir do somatório

$$ {}^{1}S = \sum_i {}^{1}\sigma_i H_i = {}^{1}\sigma_{xx} H_1 + {}^{1}\sigma_{yy} H_2 + {}^{1}\tau_{xy} H_3 , \qquad (3.53) $$

ou seja,

$$
{}^{1}S = \begin{bmatrix} {}^{1}\sigma_{xx} & 0 & {}^{1}\tau_{xy} & 0 \\ 0 & {}^{1}\sigma_{xx} & 0 & {}^{1}\tau_{xy} \\ {}^{1}\tau_{xy} & 0 & {}^{1}\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & {}^{1}\tau_{xy} & 0 & {}^{1}\sigma_{yy} \end{bmatrix}. \tag{3.54}
$$

Com a substituição das Eqs. (3.54) e (3.48) na Eq. (3.28), obtém-se a matriz de rigidez geométrica K_σ do elemento, referente à configuração ${}^{1}C$.

As matrizes B_0 e B_L da Eq. (3.16) são dadas por

$$
B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{3.55}
$$

$$
B_L = {}^{1}AG, \tag{3.56}
$$

A Eq. (3.9), particularizada para a configuração de referência ${}^{1}C$, é dada por

$$
{}^{1}\Theta = G\ {}^{1}d, \tag{3.57}
$$

onde o vetor ${}^{1}d$ é dado em (3.51) e a matriz G é dada em (3.48).

A substituição de ${}^{1}\Theta$ na Eq. (3.45) fornece

$$
{}^{1}A = \begin{bmatrix} {}^{1}\Theta^{T} H_1 \\ {}^{1}\Theta^{T} H_2 \\ {}^{1}\Theta^{T} H_3 \end{bmatrix}. \tag{3.58}
$$

que pode então ser substituída na Eq. (3.56).

Com B_0 e B_L obtidas (Eqs. (3.55) e (3.56)), tem-se o seguinte parcelamento da matriz K_o:

$$K_o = K0 + K1 + K2, \tag{3.59}$$

onde

$$K0 = \int_A q\ B_0^T C B_0\ dxdy, \tag{3.60}$$

$$K1 = \int_A q\ \left(B_0^T\ C\ B_L + B_L^T\ C\ B_0\right) dxdy, \tag{3.61}$$

$$K2 = \int_A q\ B_L^T\ C\ B_L\ dxdy, \tag{3.62}$$

e com as substituições das Eqs. (3.48) e (3.54) na Eq. (3.28), a forma final da matriz K_σ é obtida:

$$K_\sigma = \int_A q\ G^T\ {}^1S\ G\, dxdy. \tag{3.63}$$

onde q representa a espessura do elemento, $dA = dxdy$ representa uma área infinitesimal da superfície do elemento e C é a matriz constitutiva elástica relacionada ao estado plano de tensões.

Com isso, está definida a matriz de rigidez tangente para a análise do estado plano de tensões. Apenas dados relativos a uma configuração de referência ${}^1C$ conhecida são necessários: o vetor ${}^1d$, utilizado para montar a matriz B_L, e o vetor ${}^1\sigma$, utilizado para montar a matriz ${}^1S$.

3.5.2.2 Estado Axissimétrico

Seja ${}^1\sigma$ o vetor das tensões atuantes na configuração de referência ${}^1C$, com σ_θ correspondendo à componente circunferencial, dado por

$${}^1\sigma = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} \\ {}^1\sigma_{yy} \\ {}^1\tau_{xy} \\ {}^1\sigma_\theta \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Com o auxílio das matrizes H_i definidas em (3.44) e do vetor definido na Eq. (3.64), monta-se uma matriz ${}^1S$ a partir do somatório

$$ {}^1S = \sum_i {}^1\sigma_i H_i = {}^1\sigma_{xx} H_1 + {}^1\sigma_{yy} H_2 + {}^1\tau_{xy} H_3 + {}^1\sigma_\theta H_4 \,, \tag{3.65} $$

ou seja,

$$ {}^1S = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 \\ {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1\sigma_\theta \end{bmatrix} . \tag{3.66} $$

Com a substituição das Eqs. (3.49) e (3.66) na Eq. (3.28), obtém-se a matriz de rigidez geométrica K_σ do elemento, referente à configuração ${}^1C$.

As matrizes B_0 e B_L da Eq. (3.16) são dadas por

$$ B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & .. & .. & .. & .. & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & .. & .. & .. & .. & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & .. & .. & .. & .. & \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{N_1}{x} & 0 & .. & .. & .. & .. & \frac{N_n}{x} & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.67} $$

$$ B_L = {}^1AG \,. \tag{3.68} $$

A Eq. (3.9), particularizada para a configuração de referência ${}^1C$, é dada por

$$ {}^1\Theta = G \; {}^1d \,, \tag{3.69} $$

onde o vetor ${}^1d$ é dado em (3.51) e a matriz G é dada em (3.49).

A substituição de ${}^1\Theta$ na Eq. (3.46) fornece

$$
{}^{1}A = \begin{bmatrix} {}^{1}\Theta^{T} H_1 \\ {}^{1}\Theta^{T} H_2 \\ {}^{1}\Theta^{T} H_3 \\ {}^{1}\Theta^{T} H_4 \end{bmatrix}. \qquad (3.70)
$$

que pode então ser substituída na Eq. (3.68).

Com B_0 e B_L obtidas (Eqs. (3.67) e (3.68)), tem-se o seguinte parcelamento da matriz K_o:

$$
K_o = K0 + K1 + K2 . \qquad (3.71)
$$

Uma formulação axissimétrica deve ser expressa em termos das coordenadas cilíndricas x(coordenada radial), y(coordenada axial) e θ (coordenada circunferencial). A condição de axissimetria permite admitir que as funções presentes nas integrais que originam os termos de rigidez e força dependem apenas das coordenadas x e y, isto é, essas funções são independentes da coordenada circunferencial θ. Dessa forma, reduz-se um problema tridimensional a um problema bidimensional, e a formulação pode, então, ser obtida a partir do elemento finito da Fig. 3.1. É necessário, entretanto, multiplicar o termo $2\pi x$ (ou $2\pi r$, r = raio) às integrais de rigidez e força. Uma vez que 2π é um termo constante e comum a todas as integrais, é possível retirá-lo da formulação, o que equivale a estabelecer as integrais sobre um intervalo, segundo a coordenada θ, de zero a 1rd. Com esta aproximação, a carga externa aplicada deve ser aquela que atua sobre um segmento de 1rd (Cook et al., 1989). Sendo assim, as matrizes da Eq. (3.71) e a matriz de rigidez geométrica são dadas por:

$$
K0 = \int_A x \; B_0^{\,T} C B_0 \, dxdy , \qquad (3.72)
$$

$$
K1 = \int_A x \left(B_0^{\,T} C \; B_L + B_L^{\,T} C \; B_0 \right) dxdy , \qquad (3.73)
$$

$$
K2 = \int_A x \; B_L^{\,T} C \; B_L \, dxdy , \qquad (3.74)
$$

$$K_{\sigma} = \int_A x \; G^T \; {}^1S \; G \, dxdy \,, \qquad (3.75)$$

onde x é a coordenada radial, $dA = dxdy$ representa uma área infinitesimal da superfície do elemento e C é a matriz constitutiva elástica referente ao estado axissimétrico.

3.5.3 Vetores de Forças

Com a substituição das matrizes B_0 e B_L definidas na Seção 3.5.2 nas Eqs. (3.30), (3.32) e (3.33), obtém-se

$${}^1F\,int = \int_A q \; (B_0 + B_L)^T \; {}^1\sigma \, dxdy \,, \qquad (3.76)$$

$$F^{tr} = \int_A q \; (B_0 + B_L)^T \; C \; \varepsilon^{tr} \; dxdy \,, \qquad (3.77)$$

$$F^{ve} = \int_A q \; (B_0 + B_L)^T \; C \, \varepsilon^{ve} \; dxdy \,, \qquad (3.78)$$

para o estado plano de tensões, e

$${}^1F\,int = \int_A x \; (B_0 + B_L)^T \; {}^1\sigma \, dxdy \,, \qquad (3.79)$$

$$F^{tr} = \int_A x \; (B_0 + B_L)^T \; C \; \varepsilon^{tr} \; dxdy \,, \qquad (3.80)$$

$$F^{ve} = \int_A x \; (B_0 + B_L)^T \; C \, \varepsilon^{ve} \; dxdy \,, \qquad (3.81)$$

para o estado axissimétrico, observadas as diferenças entre as matrizes B_0, B_L e C, definidas em 3.5.2.1. e 3.5.2.2.

Os incrementos nas deformações de origem térmica são obtidos com as expressões (Bathe, 1995)

$$\varepsilon^{tr} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{m} N_i ({}^2T_i - {}^1T_i) \right], \tag{3.82}$$

$$\varepsilon^{tr} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{m} N_i ({}^2T_i - {}^1T_i) \right], \tag{3.83}$$

para o estado plano de tensões e para o caso axissimétrico, respectivamente.

Nas Eqs. (3.82) e (3.83), N_i é a i-ésima função de interpolação do elemento, m é a quantidade de nós do elemento, ${}^2T_i$ e ${}^1T_i$ são temperaturas nodais nos instantes $t+\Delta t$ e t, respectivamente, e α representa o coeficiente de dilatação térmica do material. Para um esquema de solução envolvendo integração numérica, cada função N_i associada a um nó i deve ser definida nos pontos de integração, enquanto ${}^2T_i$ e ${}^1T_i$ são valores retirados diretamente do nó i. Dessa forma, o produto N_iT_i passa a representar a temperatura interpolada sobre o ponto de integração. Obtido o incremento ε^{tr}, o vetor de forças F^{tr} fica definido. Para que o vetor F^{ve} seja definido, é necessário conhecer o incremento ε^{ve}.Esta variável depende da modelagem do material, que será discutida na Seção 3.6.

3.5.4 Integração numérica

Um procedimento básico da formulação por elementos finitos isoparamétricos consiste em expressar as coordenadas e os deslocamentos com o auxílio de funções de interpolação deduzidas em um sistema natural de coordenadas.

Para um elemento finito bidimensional, a interpolação das coordenadas cartesianas (x,y) de um ponto qualquer do elemento é definida como

$$x = \sum_{i=1}^{m} h_i(r,s)x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m} h_i(r,s)y_i \tag{3.84}$$

onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas dos pontos nodais do elemento, h_i são as funções de interpolação da Fig. 3.1.b, definidas em termos de coordenadas naturais r e s, e m é a quantidade de nós do elemento.

A regra da cadeia relaciona derivadas em relação às coordenadas r e s com as derivadas em relação às coordenadas x e y através da expressão

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad (3.85)$$

onde J é o operador Jacobiano definido como

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial h_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}. \qquad (3.86)$$

Para encontrar as derivadas das funções de interpolação em relação a x e y, é necessário inverter a matriz J para obter

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial s} & -\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial s} \end{bmatrix}. \qquad (3.87)$$

A utilização de coordenadas naturais leva a novos limites de integração nas expressões que definem as matrizes e vetores que compõem a equação de equilíbrio incremental. Dessa forma, as matrizes (3.60) a (3.63), (3.72) a (3.75), e os vetores (3.76) a (3.81) são reescritos, respectivamente, como

$$K0 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left(B_0^{\,T}\, C\, B_0 \right) \det J \, dr\, ds\,, \qquad (3.88)$$

$$K1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left(B_0^{\,T}\, C\, B_L + B_L^{\,T} C\, B_0 \right) \det J \, dr\, ds\,, \qquad (3.89)$$

$$K2=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} q\ \left(B_L{}^T C\ B_L\right) \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.90)$$

$$K\sigma=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} q\ G^T\ {}^1S\ G\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.91)$$

$$K0=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ \left(B_0{}^T\ C\ B_0\right) \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.92)$$

$$K1=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ \left(B_0{}^T\ C\ B_L\ +\ B_L{}^T C\ B_0\right) \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.93)$$

$$K2=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\left(B_L{}^T C\ B_L\right) \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.94)$$

$$K\sigma=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ G^T\ {}^1S\ G\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.95)$$

$${}^1F\,int=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} q\ (B_0+B_L)^T\ {}^1\sigma\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.96)$$

$$F^{tr}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} q\ (B_0+B_L)^T\ C\,\varepsilon^{tr}\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.97)$$

$$F^{ve}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} q\ (B_0+B_L)^T\ C\,\varepsilon^{ve}\ \det J\, dr\, ds. \qquad (3.98)$$

$${}^1F\,int=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ (B_0+B_L)^T\ {}^1\sigma\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.99)$$

$$F^{tr}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ (B_0+B_L)^T\ C\,\varepsilon^{tr}\ \det J\, dr\, ds\,, \qquad (3.100)$$

$$F^{ve}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x\ (B_0+B_L)^T\ C\,\varepsilon^{ve}\ \det J\, dr\, ds.. \qquad (3.101)$$

onde a coordenada x = x(r,s), e a espessura q pode também ser variável.

A solução destas integrações é obtida por meio da seguinte regra de integração numérica:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(r,s)\, dr\, ds=\sum_i\sum_j \alpha_i\alpha_j\ f(r_i,s_j) \qquad (3.102)$$

onde r_i e s_j são as coordenadas dos pontos de integração de Gauss, e α_i e α_j são os respectivos pesos de integração.

3.6 Modelagem do Comportamento Viscoelástico

O modelo viscoelástico adotado é mostrado na Fig. 3.2. As expressões definidas a seguir são retiradas do trabalho de Zienkiewicz et al. (1968).

O modelo mecânico da Fig. 3.2 é composto por n unidades de Kelvin-Voigt associadas em série. A i-ésima unidade é composta por uma mola de constante E_i e por um amortecedor viscoso representado pela constante de viscosidade η_i. O modelo mecânico sugere que uma tensão σ atua igualmente em cada uma das n unidades. A deformação de cada unidade i é representada por ε_c^i. Cada componente ε_c^i é governada por uma equação de evolução no tempo, dependente de E_i e η_i, dada por

$$\dot{\varepsilon}_c^i = \frac{1}{\eta_i}\sigma - \frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c^i . \tag{3.103}$$

Ao se adotar um intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno, pode-se utilizar a Eq. (3.103) para aproximar os incrementos de deformação para cada unidade do modelo a partir da equação

$$\Delta\varepsilon_c^i = \left[\frac{1}{\eta_i}\sigma - \frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c^i\right]\Delta t. \tag{3.104}$$

Se a tensão σ e a deformação total ε_c^i são valores conhecidos em um determinado instante de tempo t, calcula-se $\Delta\varepsilon_c^i$ a partir de (3.104).

Uma vez que a deformação total do modelo na Fig. 3.2 é obtida através da soma da deformação de todas as unidades, a deformação total por fluência para um intervalo de tempo Δt é dada pela Eq. (3.105).

$$\varepsilon^{ve} = \sum_{i=1}^{n}\Delta\varepsilon_c^i = \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\eta_i}\right)\sigma - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c^i\right)\right]\Delta t . \tag{3.105}$$

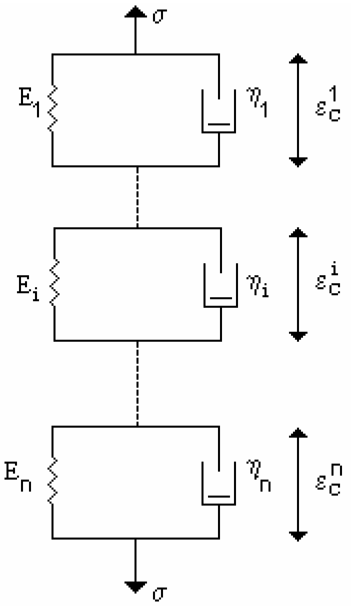


Figura 3.2. – Modelo viscoelástico.

A descrição acima considera um estado uniaxial de tensão. Pode, entretanto, ser generalizada para uma condição multiaxial. Essa generalização pode ser empregada na análise dos casos de axissimetria e estado plano de tensões.

Sabe-se que a Eq. (3.103) pode ser obtida a partir da expressão

$$\varepsilon_c^i = \left(\frac{1/\eta_i}{D + E_i/\eta_i} \right) \sigma , \tag{3.106}$$

onde D representa um operador diferencial relacionado ao tempo, de tal forma que

$$D\left[\varepsilon_c^i\right] + \frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c^i = \frac{1}{\eta_i}\sigma \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_c^i + \frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c^i = \frac{1}{\eta_i}\sigma . \tag{3.107}$$

Considera-se agora a expressão

$$\varepsilon_c^i = \frac{1}{\overline{E}_i}[A]\sigma , \tag{3.108}$$

onde ε_c e σ são vetores, e não mais quantidades escalares. [A] é uma matriz que contém apenas termos constantes ou dependentes do coeficiente de Poisson. Se o termo $1/\overline{E}_i$ é agora substituído pelo operador da Eq. (3.106), que multiplica o escalar σ, a Eq. (3.108) é reescrita como

$$\varepsilon_c^i = \left(\frac{1/\eta_i}{D + E_i/\eta_i} \right) [A] \sigma \,, \tag{3.109}$$

e as equações (3.103), (3.104) e (3.105) são reescritas, respectivamente, nas formas

$$\dot{\varepsilon}_c^i = \frac{1}{\eta_i} [A] \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \,, \tag{3.110}$$

$$\Delta\varepsilon_c^i = \left[\frac{1}{\eta_i} [A] \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right] \Delta t \,, \tag{3.111}$$

$$\varepsilon^{ve} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varepsilon_c^i = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i} \right) [A] \sigma - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right) \right] \Delta t \,, \tag{3.112}$$

que estão agora adequadas ao estudo do caso multiaxial, uma vez que ε_c e σ representam vetores, e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\nu+1) \end{bmatrix}, \tag{3.113}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(\nu+1) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.114}$$

para os casos de estado plano de tensões e axissimetria, respectivamente.

A inclusão do modelo descrito na equação incremental é abordada nas Seções 3.4.1 e 3.4.3.