

2 Flambagem Viscoelástica

Este capítulo apresenta alguns conceitos relacionados à viscoelasticidade linear e à instabilidade de sistemas estruturais viscoelásticos. Com o emprego de exemplos simples, os conceitos de tempo crítico, módulo efetivo e carga crítica viscoelástica são introduzidos. Os critérios de estabilidade associados ao problema também são apresentados.

2.1 Modelo Constitutivo Viscoelástico

Certos materiais exibem um comportamento físico que combina as características de um sólido elástico e de um líquido viscoso. Esse tipo de comportamento é comumente denominado fluência, e pode ser observado em sistemas simples, como, por exemplo, em uma barra cujo deslocamento axial cresce com o tempo em resposta a uma força axial aplicada e mantida constante. O comportamento físico real desses materiais pode ser simulado através de modelos retirados da teoria da viscoelasticidade. São exemplos de materiais que exibem fluência: o concreto, o aço sob temperaturas elevadas, os materiais poliméricos, os materiais rochosos.

A aplicabilidade da teoria viscoelástica linear em problemas envolvendo fluência encontra limitações. Os modelos lineares são inadequados, por exemplo, para simular a fluência em metais submetidos a altas temperaturas (Findley et al, 1976), embora possam se adequar à modelagem do concreto, polímeros e rochas (Rabotnov, 1969; Zienkiewicz et al., 1968).

A inclusão do tempo nas relações constitutivas é uma característica essencial dos modelos viscoelásticos. Isso permite relacionar histórias de tensão com histórias de deformação. Essas relações são comumente definidas através das formulações diferencial ou integral.

A formulação integral é obtida com base no princípio da superposição, cuja aplicação é permitida devido ao comportamento linear do material. Nessa

formulação, a relação entre as histórias de deformação e tensão pode ser escrita através das integrais de convolução mostradas nas Eqs. (2.1) e (2.2).

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{\partial \sigma}{\partial t'} dt', \quad (2.1)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t-t') \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} dt' \quad (2.2)$$

onde t' representa o tempo, como variável independente, e as funções $J(t)$ e $Y(t)$ são denominadas função de compliância e módulo de relaxação, respectivamente. A função $J(t)$ descreve a deformação $\varepsilon(t)$ para uma tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, sendo uma função crescente para $t > 0$. Já a função $Y(t)$ descreve a tensão $\sigma(t)$ para uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, sendo uma função decrescente para $t > 0$.

A formulação diferencial, por sua vez, pode ser definida na forma geral

$$P \sigma = Q \varepsilon, \quad (2.3)$$

onde P e Q são operadores diferenciais lineares dados por

$$P = \sum_0^m p_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad (2.4)$$

$$Q = \sum_0^m q_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad (2.5)$$

ou seja,

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots + p_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + \dots + q_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m}, \quad (2.6)$$

Devido à hipótese de linearidade, a Eq. (2.6) possui coeficientes constantes, uma vez que p_k e q_k são independentes das tensões e das deformações. Diferentes combinações dos termos presentes na Eq. (2.6) permitem a descrição de comportamentos viscoelásticos distintos. É possível estabelecer uma relação entre uma combinação específica e um determinado modelo reológico formado pela associação de molas elásticas lineares e amortecedores viscosos lineares.

2.2 Exemplos de Flambagem Viscoelástica

Para ilustrar o problema estrutural, utiliza-se o exemplo da coluna viscoelástica mostrada na Fig. 2.1. A solução é obtida com base na hipótese de pequenas rotações, que equivale à hipótese adotada na determinação da carga crítica elástica da coluna de Euler (Bazant & Cedolin, 1991).

A presença de uma curvatura inicial, denotada por z_0'' , permite tratar o problema elástico correspondente a partir da Eq. (2.7).

$$EI(z'' - z_0'') + Pz = 0. \quad (2.7)$$

O material viscoelástico é representado por um sólido padrão, onde a relação diferencial entre tensão e deformação é dada por

$$\lambda D\varepsilon + \varepsilon = \frac{\lambda}{E} D\sigma + \frac{1}{E_\infty} \sigma, \quad (2.8)$$

onde E , $E_\infty = EE_1/(E + E_1)$, $\lambda = \eta_1/E_1$ e $D = \partial/\partial t$ representam, respectivamente, o módulo de “impacto”, o módulo assintótico, o tempo de retardo e um operador diferencial atuando sobre a tensão e a deformação. A Eq. (2.8) pode ser reescrita na forma

$$[1 + \lambda D]\varepsilon = \left[\frac{1}{E_\infty} + \frac{\lambda}{E} D \right] \sigma, \quad (2.9)$$

onde, a partir da Eq. (2.3),

$$\mathbf{P} = \left[\frac{1}{E_\infty} + \frac{\lambda}{E} D \right] \text{ e } \mathbf{Q} = [1 + \lambda D]. \quad (2.10)$$

O procedimento utilizado por Flugge (1975) (Seção 4.5), baseado na analogia entre o problema elástico e viscoelástico, permite escrever

$$I\mathbf{Q}(z'') + \mathbf{P}\mathbf{P}(z) = I\mathbf{Q}(z_0''). \quad (2.11)$$

Com a substituição dos operadores P e \mathcal{D} da Eq. (2.10) na Eq. (2.11), obtém-se a equação diferencial parcial

$$z'' + \lambda \mathcal{D}(z'') + \frac{P}{E_{\infty} I} z + \frac{P}{EI} \lambda \mathcal{D}(z) = z''_0. \quad (2.12)$$

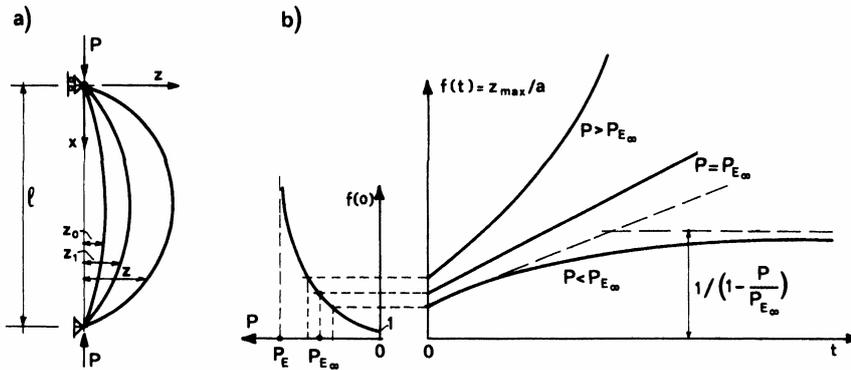


Figura 2.1 – Flambagem da coluna viscoelástica (Bazant & Cedolin, 1991).

A curvatura inicial $z_0(x)$ é admitida como uma senóide de amplitude constante definida por a , e a solução dos deslocamentos $z(x,t)$ é obtida com a multiplicação dessa curvatura inicial por uma função dependente apenas do tempo, dada por $f(t)$ (Fig. 2.1):

$$z_0(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (2.13.a)$$

$$z(x,t) = f(t) a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (2.13.b)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.13.a) e (2.13.b) na Eq. (2.12), obtém-se uma equação diferencial ordinária cuja única variável independente é o tempo. A partir desta equação, é possível investigar o comportamento da amplitude $f(t)$ ao longo do tempo como uma função dos valores da carga de compressão P e das propriedades do material.

Com a introdução das expressões

$$P_E = \frac{\pi^2}{l^2} EI, P_{E_{\infty}} = \frac{\pi^2}{l^2} E_{\infty} I, \quad (2.14)$$

onde P_E corresponde à carga crítica elástica e P_{E_∞} corresponde à carga crítica de longa duração, obtém-se

$$\lambda \left(1 - \frac{P}{P_E}\right) \frac{df}{dt} + \left(1 - \frac{P}{P_{E_\infty}}\right) f = 1. \quad (2.15)$$

A condição inicial necessária à solução da Eq. (2.15) é obtida a partir do fator de amplificação da deflexão de uma coluna elástica submetida à carga P e à curvatura inicial $z_0(x)$ da Eq. (2.13.a). Portanto, para $t = 0$,

$$f = \frac{1}{1 - P/P_E} \quad (2.16)$$

A solução obtida a partir das Eqs. (2.15) e (2.16) é, dessa forma, dada por

$$f(t) = \left(\frac{1}{1 - P/P_{E_\infty}}\right) - \left(\frac{1}{1 - P/P_{E_\infty}}\right) e^{-t/\tau} + \left(\frac{1}{1 - P/P_E}\right) e^{-t/\tau}, \quad (2.17)$$

onde $\tau = \lambda \frac{1 - P/P_E}{1 - P/P_{E_\infty}}$.

A partir da solução da Eq. (2.17) e do gráfico da Fig. 2.1, é possível investigar o comportamento das deflexões na coluna e identificar algumas particularidades do problema da flambagem viscoelástica.

A depender da magnitude da força P , as deflexões podem se aproximar assintoticamente de um valor finito, o que caracteriza uma resposta estável, ou crescer indefinidamente à medida que o tempo t tende ao infinito, caracterizando-se, assim, a perda de estabilidade do sistema através da chamada flambagem viscoelástica. O exemplo utilizado mostra também que não existe tempo crítico finito para o qual a deflexão apresenta um comportamento assintótico tendendo a infinito, o que está de acordo com as conclusões de Kempner & Phole (1953).

Substituindo-se valores de carga $P < P_{E_\infty}$ na Eq. (2.17), fica definido um limite para a deflexão $z(x,t)$ em qualquer instante de tempo t . Isto porque, para t

tendendo a infinito, $f(t)$ tende assintoticamente ao valor constante mostrado na Fig. 2.1.b, que equivale à primeira parcela à direita da Eq. (2.17). Portanto, a resposta é estável para $P < P_{E_\infty}$.

Para $P = P_{E_\infty}$, as deflexões crescem indefinidamente e linearmente com o tempo. Segundo a Eq. (2.17), essa situação de instabilidade é definida pela equação

$$\lim_{P \rightarrow P_{E_\infty}} f(t) = \frac{1}{1 - P/P_E} (1 + t/\lambda). \tag{2.18}$$

Para valores de $P > P_{E_\infty}$ e $P < P_E$, o sistema também é instável. P_E é a carga crítica da coluna elástica de Euler, ou seja, a carga que faria a coluna perder a estabilidade da configuração reta no instante do carregamento. A carga crítica de longa duração é sempre menor que a carga crítica instantânea.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

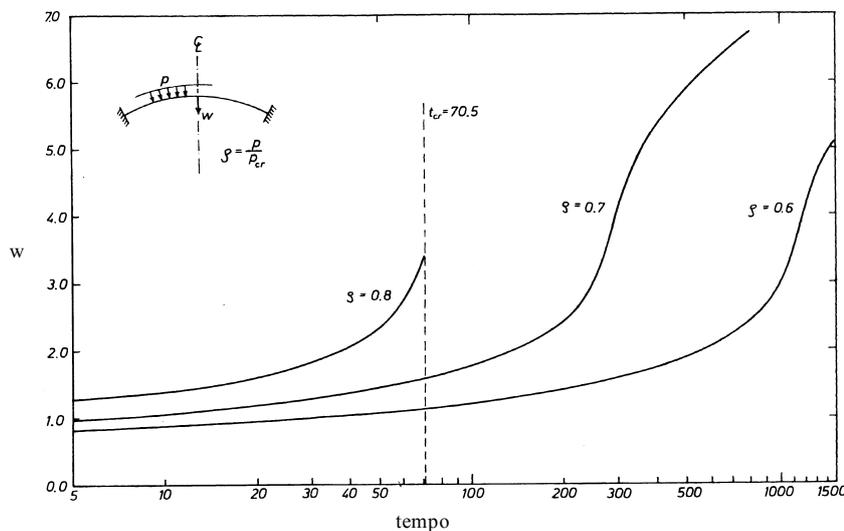


Figura 2.2 – Resposta típica de sistemas viscoelásticos que possuem tempo crítico.

A coluna viscoelástica não exhibe o chamado tempo crítico, embora ocorra a situação de instabilidade. O tempo crítico pode ocorrer para sistemas com outras geometrias, submetidas a outros tipos de instabilidade elástica diferentes da bifurcação. A Fig. 2.2 mostra um exemplo retirado do trabalho de Larsen & Popov (1974). Percebe-se que existe um instante de tempo finito, denominado

tempo crítico, onde ocorre uma condição de instabilidade caracterizada pelo crescimento ilimitado da deflexão.

2.3 Critérios de Estabilidade

No estudo da estabilidade sistemas estruturais elásticos, os critérios de estabilidade utilizados estão associados ao caráter conservativo desses sistemas. O critério energético da estabilidade, por exemplo, estabelece que um sistema está em equilíbrio estável se não existe uma configuração adjacente cuja energia potencial é menor do que aquela relativa à configuração de equilíbrio corrente. Um outro critério estabelece que um sistema em equilíbrio estável retorna a esta configuração de equilíbrio caso alguma perturbação tenha sido imposta e posteriormente retirada do sistema.

Sistemas viscoelásticos são não-conservativos. A estes, não é possível associar uma energia potencial. Os critérios acima são, portanto, inadequados à aplicação em sistemas viscoelásticos.

É possível, entretanto, estabelecer um critério de estabilidade mais geral, baseado na seguinte consideração: se uma pequena perturbação causa apenas um deslocamento pequeno e limitado, então o sistema é estável. Essa condição de estabilidade pode ser observada, por exemplo, na Fig. 2.1, para valores de $P < P_{E\infty}$. A perturbação, nesse caso, é a imperfeição inicial imposta à coluna. O mesmo não ocorre para valores de $P \geq P_{E\infty}$, pois esses valores provocam um crescimento indefinido da deflexão, não importando a amplitude da imperfeição (perturbação) inicial imposta à coluna. Esta segunda situação caracteriza o mecanismo de instabilidade denominado flambagem viscoelástica.

A instabilidade da coluna, que ocorre na faixa de valores $P_{E\infty} \leq P < P_E$, caracteriza-se pela inexistência de um tempo crítico, pois a curva deflexão vs tempo cresce continuamente e de forma suave. O mesmo não acontece para o exemplo da Fig. 2.2, onde é possível observar uma flambagem súbita caracterizada por um comportamento assintótico da deflexão que ocorre em um determinado tempo crítico. Odqvist (1974) utiliza a seguinte equação para expressar esse mecanismo de instabilidade:

$$\dot{W} \equiv \infty, \quad (2.19)$$

onde \dot{W} representa a taxa de variação da componente de deslocamento.

Resta definir um critério apropriado ao esquema numérico apresentado no Cap. 3. No critério adotado, a ocorrência do tempo crítico está associada ao surgimento de um pivô negativo na matriz de rigidez tangente, que, nesse instante crítico, deixa de ser positiva definida. Este procedimento é discutido por Bazant (2003).