2
Risco de Taxa de Juros e Imunização

Um dos objetivos principais da teoria financeira é o de estudar como os investidores realizam suas escolhas sob incerteza. Até a década de 50, a análise financeira estava centrada na verificação dos retornos obtidos. A dimensão risco não era alvo de estudos.

Ao descrever pormenorizadamente a relação entre risco e retorno, Markowitz (1952) dotou a gestão ativa de recursos de novas diretrizes. Desde então, no que diz respeito à administração de recursos, a gestão ativa tem como objetivo principal maximizar o retorno de uma carteira de ativos para um dado nível de risco. A partir da mensuração dos retornos de cada ativo, de seus riscos individuais e das correlações entre eles, é possível traçar uma fronteira eficiente a qual mostrará o *portfolio* que proporciona o maior retorno para um dado nível de risco. Quanto maior o retorno esperado da estratégia ativa – definido como a diferença entre o retorno total e o retorno do *benchmark* – maior o risco.

Infelizmente, esse não é um exercício trivial. A história pregressa de retornos e correlações de ativos pode não se repetir, trazendo dificuldades adicionais à estratégia de alocação de recursos. Ademais, a gestão ativa só poderá agregar valor aos investidores se os mercados não forem totalmente eficientes.

A gestão passiva de recursos busca evitar o descasamento entre a carteira de ativos e um determinado *benchmark*. Trata-se, basicamente, de replicar a constituição de um determinado índice, seja ele de ações, renda fixa ou instrumentos financeiros correlatos. Estratégias passivas se justificam pela performance pouco consistente de boa parte dos fundos de gestão ativa (BOGLE, 2002). A preocupação do gestor se resume, basicamente, à redução do *tracking error*, de modo a garantir que os ativos reproduzam de forma fidedigna as movimentações do *benchmark*. Ressalte-se que o fluxo de dispêndios de uma EPC pode ser compreendido como um índice composto por uma série de títulos sem cupom com valor de face e vencimento idênticos aos das obrigações atuariais.

Investidores institucionais de grande importância, as EPC buscam alocar o capital disponível de forma a garantir que o volume de recursos acumulados seja capaz de garantir o pagamento dos benefícios a que fazem jus os assistidos. Uma perspectiva do tipo *asset-only* pode gerar alocações subótimas (MUHALIDHAR, 2001) com conseqüências negativas sobre o grau de solvência da instituição. Dessa forma, a política de gerenciamento de ativos é conjugada à distribuição esperada dos passivos futuros, recebendo o nome de *asset liability management* (ALM).

No caso dos planos de benefício definido, um estudo formal em ALM está normalmente focado na modelagem do fluxo de passivos e dos retornos dos instrumentos utilizados na composição do ativo, de forma a viabilizar a comparação da performance líquida entre as alternativas de investimento disponíveis para uma determinada entidade de previdência.

No que diz respeito aos planos de contribuição variável, o ALM só faz sentido a partir do momento em que os benefícios começam a ser pagos, podendo ser executado a partir de uma ótica ativa, passiva ou de uma combinação de ambas.

Sob a perspectiva da alocação ativa, o gestor se concentra no gerenciamento do excesso de recursos, *surplus asset allocation*, a qual incorpora noções de balanceamento entre retorno e risco – nos moldes da fronteira eficiente – para grupos de instrumentos financeiros (WARING, 2004).

Na gestão passiva, o objetivo é cobrir todas as obrigações futuras da EPC, sem incorrer no risco adicional associado à obtenção de um excesso de retorno. O gestor buscará, portanto, replicar o índice que reflete as obrigações atuariais da EPC. Os dois métodos mais populares de gerenciamento passivo de recursos de renda fixa constituem-se na imunização[vi] e na dedicação (FABOZZI, 2000). A única diferença se caracteriza pela extensão da combinação entre os desembolsos e recebimentos decorrentes do passivo e ativo, respectivamente.

2.1
Dedicação e imunização tradicional

Ao contrário do que o nome renda fixa possa denotar, a renda de um título só será fixa se o comprador mantiver a posse do mesmo até o vencimento. Ao descrever-se o preço de um título como:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^n} \tag{1}$$

onde C é o valor do cupom no período, i é a taxa interna de retorno e M o valor a ser pago na data de vencimento, fica explícita a dependência do preço à evolução da taxa de juros. Um incremento da taxa possivelmente significará uma perda para o comprador se esse tiver que se desfazer do título em data anterior a do vencimento. Convencionou-se denominar esse risco derivado da flutuação da taxa de juros como risco de taxa de juros.

Os modelos de dedicação e imunização buscam reduzir o risco de taxa de juros nas estratégias de alocação de recursos que contemplam um horizonte de investimento predefinido. Em princípio, só faz sentido incluí-las no rol de estratégias de ALM se o passivo puder ser representado por um fluxo predeterminado de benefícios a pagar. Nesse sentido, cada um dos fluxos pode ser compreendido como um horizonte de investimento.

Nos planos de benefício definido, especialmente durante o período de diferimento, essa parece ser uma premissa de análise pouco realista, uma vez que o caráter estocástico do passivo é um fator preponderante de pesquisa, sendo decorrente, principalmente, da evolução salarial do futuro beneficiário durante a fase laboral, da taxa de rotatividade de empregados na empresa patrocinadora e da taxa de mortalidade esperada para os participantes (risco de sobrevida).

Nos planos de contribuição variável, após o período de diferimento, a premissa é mais realista, na medida em que a variabilidade do passivo encontra razão tão somente no risco de sobrevida, não sendo necessárias assunções adicionais sobre a evolução salarial e rotatividade dos beneficiários. Isso torna o trabalho do atuário muito mais simples (ATKINSON e DICKSON, 2000). Nesse caso, fluxos futuros de pagamento de benefícios podem ser obtidos a partir da utilização de tábuas de mortalidade, sem a necessidade de premissas adicionais. Ademais, o risco de sobrevida será reduzido na mesma proporção de crescimento da opção, pelos futuros assistidos, do recebimento de uma renda temporária em detrimento a uma renda vitalícia.

Carteiras dedicadas significam grandes dispêndios, pois buscam a combinação exata entre as entradas e saídas de capital. Normalmente, têm espectro limitado pela virtual impossibilidade de se obter títulos sem cupom com vencimentos idênticos aos de todos os fluxos de caixa passivos. Esse problema é ainda mais contundente no caso brasileiro, dado o pequeno volume de títulos de renda fixa de longo prazo. Ainda que seja possível adotar a estratégia de dedicação para horizontes de investimento de curta duração, o mercado brasileiro de renda fixa praticamente inviabiliza esse tipo de operação no médio e longo prazo. As LTN possuem prazo médio de 11,45 meses[vii]. Ressalte-se que praticamente todo o fluxo de saída de uma EPC está indexado à variação anual de um índice de preços e o Tesouro Nacional não emite títulos com cláusula de atualização monetária sem o pagamento de cupons intermediários, a não ser pela NTN-B Principal, cuja venda está restrita ao ambiente do Tesouro Direto, ou seja, apenas pessoas físicas podem comprar esse título (compra limitada a R$ 400.000,00)[viii].

Ante a dificuldade na formatação de carteiras dedicadas, o analista financeiro poderia adotar a estratégia de montar a carteira com títulos que apresentem valor presente idêntico ao das saídas de caixa previstas. Se a curva da taxa de juros não se alterar significativamente, o investimento será suficiente para cobrir as despesas.

Entretanto, o que se verifica na realidade é um alto grau de volatilidade das taxas de juros. Na tentativa de mensurar o risco de taxa de juros, Macaulay (1938) criou o conceito de *duration*. Ao perceber a correlação entre a volatilidade dos preços dos títulos e o prazo médio dos mesmos, Macaulay procurou explicitar uma medida que pudesse ser utilizada pelo investidor como parâmetro do risco associado a uma determinada carteira de títulos.

Nesse sentido, pode-se calcular a derivada do preço de um título para determinar a variação aproximada desse preço em função de pequenas variações na taxa de juros:

$$\frac{dP}{di} = \frac{(-1).C}{(1+i)^2} + \frac{(-2).C}{(1+i)^3} + ... + \frac{(-n)(C+M)}{(1+i)^{n+1}} \qquad (2)$$

Dividindo-se (2) por P, temos a variação percentual do preço em função de pequenas variações na taxa de juros:

$$\frac{dP}{di}.\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+i}.\left[\frac{C}{1+i} + \frac{2C}{(1+i)^2} + ... + \frac{n(C+M)}{(1+i)^n}.\frac{1}{P}\right] \qquad (3)$$

A expressão entre colchetes representa a *duration* de Macaulay, enquanto a equação (3) explicita a relação inversa entre incrementos na taxa de juros e decréscimos no preço de um título, a *duration* modificada.

O cômputo da *duration* é de fundamental importância para o processo de imunização. Esse processo foi definido por Redington (1952) como a alocação de recursos de forma a tornar uma carteira "imune" a variações nas taxas de juros, garantindo um montante determinado de recursos em uma data futura específica.

No caso das EPC, o objetivo da imunização é distribuir os recebimentos intermediários e finais dos ativos de acordo com a previsão para o fluxo de pagamentos dos benefícios. O conceito de *duration* vem ao encontro da necessidade do gestor ao indicar o título (ou conjunto de títulos) que possui um prazo ponderado médio idêntico ao período de tempo compreendido entre a data vigente e a de pagamento do benefício. Igualando a *duration* do ativo e do passivo, alterações nas taxas de juros influenciarão ambos na mesma magnitude, minimizando as perdas ou ganhos líquidos.

Na medida em que uma infinidade de combinações garantiria essa igualdade, recorre-se normalmente a uma otimização. Para uma dada função objetivo – que pode estar relacionada, por exemplo, ao custo ou à diversificação da carteira – tem-se um problema típico de programação matemática que busca minimizar (ou maximizar) essa função objetivo, sujeita a uma série de restrições. Dentre outras, tais restrições contemplam a igualdade entre a *duration* do ativo e do passivo, eventuais restrições de alocação decorrentes da legislação e a exigência de que o somatório dos percentuais dos títulos em carteira seja igual a 100%. A essa forma de gestão convencionou-se denominar imunização tradicional. Tal método representa o ponto de partida para medidas mais amplas de sensibilidade ao risco inerente à evolução da estrutura a termo da taxa de juros.

2.2
A estrutura a termo da taxa de juros

O valor do dinheiro no tempo, ou seja, a oportunidade de investir o dinheiro obtendo uma determinada remuneração é um dos conceitos básicos na análise de qualquer instrumento financeiro. Essa remuneração, a taxa de juros, normalmente difere de acordo com o período de aplicação dos recursos. Sua descrição, ou mais precisamente a forma de expressão da incerteza inerente à evolução futura das taxas de juros, é parte essencial do ALM.

A estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) é definida como “o mapa que relaciona o termo de um empréstimo à taxa de juros embutida no mesmo (ALMEIDA, 2001, p. 1)”. O cálculo do preço de ativos de renda fixa – que apresentam risco de crédito similar – depende da relação entre taxas de juros e prazo de vencimento dos títulos, relação esta exposta pela ETTJ.

A taxa de desconto que iguala o somatório de todos os fluxos de um título a seu valor presente é denominada *yield to maturity*. Trata-se, basicamente, da taxa interna de retorno de um título. Sua representação gráfica, a *yield* não se confunde com a ETTJ. Esta é representada pela curva de juros à vista (curva *spot*) para títulos que não possuem cupom enquanto aquela representa a relação entre as taxas internas de retorno dos títulos com cupom e seus respectivos prazos de vencimento.

Finalmente, a partir da curva de juros à vista é possível definir a curva de juros a termo (curva *forward*), sendo esta a representação gráfica das taxas de juros implícitas entre os diversos pontos daquela. Uma das teorias que tenta explicar a forma da curva de juros – a teoria das expectativas – argumenta que as expectativas dos agentes sobre as taxas a termo são as responsáveis pelo formato da ETTJ.

Como boa parte dos modelos de ETTJ foi desenvolvida em tempo contínuo, as taxas de juros passam a ser definidas como instantâneas. Intuitivamente, uma taxa instantânea (também conhecida como taxa de curto prazo) pode ser compreendida como a taxa que se aplica a um curtíssimo espaço de tempo[ix].

No mercado brasileiro de renda fixa, os títulos zero cupom estão restritos ao curto prazo. As Letras do Tesouro Nacional – LTN, títulos prefixados e sem pagamentos intermediários, possuem prazo máximo de 30 meses[x]. Dessa forma, é necessário construir uma ETTJ teórica a partir de técnicas que possibilitam a transformação das taxas referentes a títulos com cupom em taxas de juros *spot*, na medida em que a utilização direta das taxas internas de retorno dos títulos com cupom caracterizaria um procedimento incorreto. Isso porque tal procedimento assume a hipótese de reaplicação dos valores à mesma taxa de juros.

Basicamente, a construção da ETTJ a partir de títulos com cupom pode ser realizada a partir do método *bootstrap*[xi]. Na medida em que a taxa de juros equivalente ao primeiro período já é conhecida, deve-se proceder aos seguintes passos:

a) Calcular a taxa equivalente ao segundo período. Para tanto, faz-se necessário subtrair o valor presente dos fluxos referentes ao título com vencimento no segundo período de seu valor de face, por meio da utilização de duas taxas distintas: para o primeiro fluxo a taxa já conhecida e equivalente ao primeiro período; para o segundo fluxo, pela taxa que se deseja calcular. "Dessa forma, obtém-se um fluxo composto de valor presente e de valor futuro sem cupons intermediários, podendo-se calcular, então, a taxa de juros spot relativa àquela maturidade (FERREIRA, 2004, p. 37)";
b) Repetir o procedimento anterior para os títulos com prazo de vencimento crescente. A cada novo fluxo, taxas *spot* equivalentes vão sendo descobertas.

A pesquisa acadêmica sobre estrutura a termo apresenta, basicamente, duas vertentes. A primeira relaciona-se ao "problema da estimação da ETTJ numa determinada data (VIEIRA NETO, 1999, p. 107)". Essa vertente é representada por modelos nos quais a estrutura a termo é descrita por uma forma funcional particular.

A segunda vertente é composta por modelos de equilíbrio (VASICEK, 1977; COX, INGERSOLL e ROSS, 1985) e de não-arbitragem da estrutura a termo (HO e LEE, 1986; BLACK, DERMAN e TOY, 1990; HULL e WHITE, 1990; HEATH, JARROW e MORTON, 1992).

Diferenciam-se dos modelos de curvas parametrizadas ao fazerem uso explícito de hipóteses econômicas e ao analisar a evolução das taxas de juros a termo (curva *forward*). São normalmente descritos por equações diferenciais (daí serem classificados como modelos de difusão contínua), cuja solução representa a função que associa cada taxa de juros *spot* a um determinado prazo de vencimento, ou seja, a curva de juros.

Assim, embora as duas vertentes possuam poucos pontos de ligação, uma abordagem conjunta apresenta benefícios significativos, permitindo não apenas a formatação de carteiras imunizadas, mas também um teste sobre a eficiência dos modelos adotados na imunização.

2.2.1
Estimação da estrutura a termo da taxa de juros

Uma estrutura a termo corretamente calculada possui grande significância para o mercado na medida em que permite "calcular o valor de mercado de uma carteira de títulos pouco líquidos; avaliar adequadamente opções, *swaps* e contratos futuros; verificar possibilidades de arbitragem entre os títulos de renda fixa disponíveis; ajudar na implementação de índices de renda fixa; e melhor investigar o retorno das carteiras de títulos de renda fixa (VARGA, 2003, p. 207)".

A obtenção da curva de juros referente a uma determinada data se dá por meio de técnicas estatísticas que buscam suavizar os dados obtidos através das observações dos preços dos títulos. "Não há referência a nenhuma teoria de precificação de ativos além do fluxo de caixa descontado (JORDAN e MANSI, 2003, p. 1488)". Assim, os movimentos nas taxas de juros são expressos por alterações nos parâmetros que caracterizam a função de ajuste, permitindo formulação de estratégias de *hedge* baseadas nesses estimadores e viabilizando as estratégias de imunização descritas na seção 2.3.1. Essa linha de pesquisa foi notabilizada pelos trabalhos de McCulloch (1971, 1975), através do uso de interpolações polinomiais por meio de *splines*.

2.2.2
Simulação da Curva a Termo

A modelagem da ETTJ objetiva produzir uma série de curvas de juros que possam efetivamente vir a ser observadas na realidade. Os modelos de evolução das taxas a termo distinguem-se entre modelos de fator único ou multifatoriais, de equilíbrio ou de não-arbitragem, e normais ou lognormais, servindo, basicamente, ao propósito de simular estruturas a termo de forma a subsidiar a avaliação instrumentos financeiros dependentes das taxas de juros.

Nos modelos unifatoriais, toda a estrutura a termo é função de uma única variável ou fator, normalmente a taxa de juros instantânea. A associação a apenas uma fonte de incerteza não é demasiadamente restritiva, "uma vez que o método unifatorial implica todas as taxas movendo-se na mesma direção, mas não na mesma intensidade. A ETTJ não possui, como eventualmente se supõe, uma mesma forma sempre (HULL, 2000, p. 565)".

Após o trabalho seminal de Heath, Jarrow e Morton (1992), vários autores têm buscado incrementar a precisão dos modelos propostos por meio da inserção de novos fatores de incerteza. Desta forma, as taxas de curto e longo prazo poderiam se mover em direções opostas. Essa multiplicidade de dimensões será tanto mais eficiente quanto menor a correlação entre as variâncias observadas em pontos distintos da estrutura a termo.

Nos modelos de equilíbrio, também conhecidos como endógenos, a curva de juros em um dado tempo t é derivada analiticamente a partir dos parâmetros definidos e não há garantia de que ela será idêntica à curva de mercado efetivamente observada.

Em um artigo pioneiro, Vasicek (1977) explicita as bases dos modelos de equilíbrio unifatoriais, descrevendo o processo para a taxa instantânea de juros a partir da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \qquad (4)$$

onde a, b e σ são constantes que descrevem a taxa de reversão à média, a média e o desvio-padrão, respectivamente, da taxa de juros instantânea e dz um processo de Wiener básico que segue uma distribuição normal com média zero e variância dt. Reversão à média nesse caso significa que as taxas de juros são "atraídas" para um nível médio no longo prazo – quando a taxa está alta, a reversão à média faz com que seu *drift* torne-se negativo; de forma análoga, quando a taxa está baixa, o *drift* torna-se positivo.

Intuitivamente, pode-se dividir o processo descrito por Vasicek em duas partes: a primeira, caracterizada por um componente determinístico (*drift*) que ressalta a tendência das taxas de juros a retornar para um dado valor médio (sempre que *r* for maior que *b*, o termo *a*(*b* - *r*) será negativo, impactando negativamente a taxa de curto-prazo. Analogamente, sempre que *r* for menor que *b*, o impacto será positivo); a segunda, representada pela volatilidade do processo.

O ponto fraco do método proposto por Vasicek decorre do fato de que o modelo pode gerar taxas reais negativas, o que dificilmente ocorrerá na realidade. Nesse sentido, Cox, Ingersoll e Ross (1985) propõem um procedimento alternativo onde o processo para a taxa de juros instantânea é descrito por:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \qquad (5)$$

O componente representado pela raiz de *r* impede que as taxas de juro tornem-se negativas.

O aspecto endógeno do procedimento adotado nos métodos de equilíbrio é normalmente apresentado pelos analistas financeiros como o responsável pela maior utilização dos modelos de não-arbitragem ou exógenos. Nestes, o procedimento é "calibrado" de forma a ajustar a estrutura a termo inicial à curva de juros efetivamente observada no mercado.

Pioneiro na linha dos modelos de não-arbitragem, o método de Ho e Lee (1986) transforma a curva de juros prevalecente no mercado em um *input* do processo. Nesse sentido, o modelo consubstancia-se no primeiro método coerente com os princípios da não-arbitragem. A versão em tempo contínuo do processo para a taxa de juros de curto prazo passa a ser descrito por:

$$dr = \frac{\partial\theta(t)}{\partial t}dt + \sigma dz \qquad (6)$$

onde $\theta(t)$ é uma função determinística escolhida de forma a possibilitar que o modelo seja capaz de gerar, na data inicial, uma estrutura a termo idêntica à observada no mercado. Em contrapartida, o procedimento proposto por Ho e Lee desconsidera uma eventual tendência de reversão à média da taxa de juros, o que significa que a mesma pode evoluir indefinidamente, alcançando níveis improváveis (taxas extremamente elevadas ou negativas).

Hull e White (1990) exploram essa “deficiência” do modelo de Ho e Lee, propondo uma extensão do modelo de Vasicek:

$$dr = a(\frac{\theta(t)}{a} - r)dt + \sigma dz \tag{7}$$

Portanto, a taxa de juros instantânea tende à média $\frac{\theta(t)}{a}$. No modelo de Hull e White, diferentemente do proposto por Ho e Lee, a análise contempla um espectro mais amplo de volatilidade, já que a mesma é afetada concomitantemente pela constante de reversão à média a e pelo desvio-padrão σ. A probabilidade de taxas de juros negativas é reduzida pela introdução do processo de reversão.

Os modelos descritos acima, com exceção do proposto por Cox, Ingersoll e Ross (1985)[xii], apresentam uma característica em comum: supõe-se que o processo que descreve o comportamento da taxa de juros instantânea segue uma distribuição normal. O termo estocástico que descreve a volatilidade não depende do nível da taxa de juros. Black, Derman e Toy (1990) rompem esse paradigma ao propor uma distribuição lognormal para o processo:

$$d\ln r = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln(r)\right]dt + \sigma(t)dz \tag{8}$$

Tal mudança torna impossível a obtenção de taxas de juros negativas, o que, teoricamente (embora pouco provável), pode ocorrer quando da utilização de modelos normais. A volatilidade passa a ser descrita por um termo estocástico que é proporcional ao nível das taxas de juros. Ao tornar a volatilidade uma função do tempo, o modelo pode precificar instrumentos que apresentam negociação ativa no mercado de forma mais precisa. Nessa linha de raciocínio, Heath, Jarrow e Morton (1992) propuseram uma extensão do método ao definir um modelo lognormal de dois fatores.

2.3
A evolução dos modelos de imunização

Os modelos de imunização representam uma forma simples de gerenciar o risco de taxa de juros, na medida em que “o gestor tem de monitorar apenas o preenchimento das condições associadas às restrições, não havendo a necessidade adicional de se estimar os processos estocásticos que governam os fatores de risco (SOTO, 2004, p. 1090)". De estruturação relativamente simples e computacionalmente menos intensivos que os modelos estocásticos, os métodos baseados no conceito – tradicional ou expandido – de *duration* permanecem extremamente populares entre os gestores de carteiras. Entretanto, é necessário analisar essa "simplicidade" no contexto da evolução das estratégias de imunização.

O modelo tradicional assume uma ETTJ plana e variações idênticas para todas as taxas de juros, independentemente do prazo. Fischer e Weil (1971) propõem uma modificação de modo que a estrutura a termo não tenha de ser necessariamente plana, embora permaneça a restrição de que as variações sejam paralelas. Embora mais simples, a medida original proposta por Macaulay é no mínimo tão eficiente quanto a proposta por Fischer e Weil (LAU, 1983).

Ocorre que, historicamente, os movimentos nas taxas de curto prazo tendem a ser superiores aos das taxas de longo prazo e, consequentemente, a assunção de que a ETTJ irá se modificar apenas por meio de movimentos paralelos é restritiva. Isso não significa que o cômputo tradicional da *duration* deva ser negligenciado, mas tão somente que o acréscimo de medidas adicionais de sensibilidade ao risco de taxa de juros pode ser benéfico.

Assim, as estratégias de imunização evoluíram de forma a contemplar variações não apenas paralelas da ETTJ, expandindo o conceito de *duration*. Essa evolução ocorreu por meio de três vias distintas[xiii]: a) os modelos passaram a incorporar, na programação matemática, novas restrições decorrentes do tipo de forma funcional da estrutura a termo que se pretende imunizar; b) foram incorporadas proteções para cada uma das alterações fundamentais – obtidas a partir da análise de fatores – da ETTJ; c) a imunização passou a contemplar movimentos puramente estocásticos da ETTJ, sem nenhuma restrição adicional decorrente de parametrização específica. Representantes de cada uma dessas linhas de pesquisa estão descritos nas subseções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, respectivamente.

Por último, cabe realizar algumas observações sobre o conceito de convexidade. A convexidade (C) de um título é definida como a média ponderada do prazo de seus fluxos elevada ao quadrado: $\sum_{t=t_1}^{t=t_n} t^2 w_t$. Os pesos são representados pela razão entre o valor presente de cada fluxo e o preço do título. Para alterações não infinitesimais da ETTJ, a variação relativa do preço de um título é aproximada por:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -D\Delta y + \frac{1}{2} C(\Delta y)^2 \qquad (9)$$

A equação (9) sugere que uma maior convexidade será sempre preferível. Isso porque independentemente do sinal de Δy, $(\Delta y)^2$ sempre será positivo. Entretanto, essa assunção é baseada na existência apenas de mudanças paralelas da ETTJ. Ocorre que movimentos unicamente paralelos não são comuns, sendo normalmente acompanhados por mudanças em outros fatores como curvatura e inclinação da ETTJ. Conforme salientado por Lacey e Nawalkha (1993), Gagnon e Johnson (1994), e Soto (2001), pequenas variações não paralelas podem ser suficientes para transformar em negativa a variação positiva esperada no preço do título. Assim, uma vez que a convexidade se caracteriza como uma medida de retorno, é possível que a mesma acrescente risco de taxa de juros ao *portfolio*. Tal fato constituiu-se na principal motivação para Fong e Vasicek (1984) derivarem a medida de risco de imunização M^2, uma função linear da convexidade.

Ademais, a assunção de que uma maior convexidade será sempre preferível porque gerará maior retorno é inconsistente com as condições de equilíbrio. Se a presença de maior convexidade fosse algo indubitavelmente benéfico, títulos com esse atributo deveriam ser negociados a preços mais elevados. Entretanto, "os estudos empíricos sobre um possível valor positivo para a convexidade não são conclusivos (GARBADE, 1996)". Dessa forma, a convexidade não fará parte da análise que se segue.

2.3.1
Imunização baseada em formas funcionais da ETTJ

Como alternativa aos modelos polinomiais de estimação descritos em 2.2.1, Nelson e Siegel (1987) derivaram um modelo adjetivado como parcimonioso, na medida em que o número de parâmetros estimados é significativamente inferior. A curva de juros é descrita por:

$$YC(m) = l + (s+c)\frac{(1-e^{-m/\tau})}{m/\tau} - ce^{-m/\tau} \tag{10}$$

onde $YC(m)$ é a taxa de juros, m representa o prazo de vencimento e l, s, c e τ os parâmetros nível, inclinação, curvatura e velocidade de convergência para a taxa de juros de longo prazo, respectivamente. Em geral, não existirá um conjunto específico de parâmetros capaz de ajustar a função para todos os prazos de vencimento, o que implica a utilização de um critério que norteie a aproximação. Os parâmetros são, portanto, estimados por meio de métodos como mínimos quadrados.

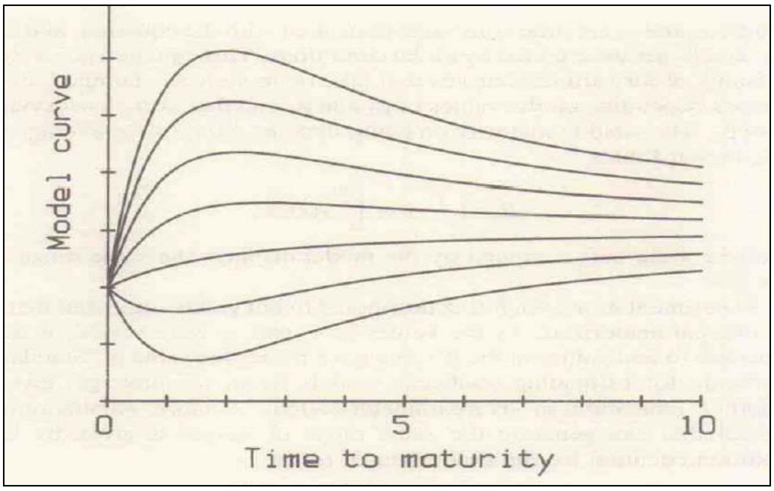

Figura 1 – Estrutura a Termo

Fonte: Extraído de Nelson e Siegel (1987), p.476

Pode-se observar na figura 1 que as formas típicas de ETTJ (monotônica, invertida para cima, invertida para baixo) podem ser obtidas por meio dessa função. Uma das vantagens do modelo é que ele permite que a curva de juros se comporte assintoticamente, consistente com a realidade presente no mercado de juros (o espectro de variação das taxas de curto prazo é maior).

A premissa de que a estrutura a termo pode ser descrita por uma forma funcional particular em cada momento do tempo, ensejou a criação de modelos de imunização baseados em um conceito expandido de *duration*. Nesse caso, a gestão do risco de taxa de juros está associada à equalização da sensibilidade de ativos e passivos a fatores de risco, sendo esses obtidos a partir da diferenciação da função de ajuste escolhida com relação a seus parâmetros.

Esse tipo de formulação do problema foi originalmente proposto por Cooper (1977), tendo sido posteriormente desenvolvido por Chambers et al. (1988) e Prisman e Shores (1988). Os autores adotam a premissa de que um polinômio pode ser ajustado de forma a descrever a ETTJ vigente e que a incerteza associada à evolução da curva de juros pode ser representada pela alteração nos parâmetros que definem a função de ajuste. A partir daí, deriva-se um vetor de *duration*, onde cada elemento é obtido por meio da diferenciação da função preço com respeito a cada um desses parâmetros.

Uma evolução dessa linha de pesquisa foi proposta por Willner (1996). O autor propõe a imunização baseada na uniformização das sensibilidades representadas pelos parâmetros da função de ajuste exponencial do modelo parcimonioso de Nelson e Siegel (1987).

Ao diferenciar a função de ajuste de Nelson e Siegel com respeito a cada um de seus parâmetros obtém-se o vetor de *duration* descrito pelo modelo exponencial para cada um dos títulos em carteira. Ressalte-se que os parâmetros da função de ajuste não devem ser confundidos com os fatores obtidos pela análise de componentes principais (descrita no subitem seguinte). Embora os termos utilizados para descrevê-los sejam idênticos, existem diferenças no cômputo e no apelo intuitivo de cada uma das perspectivas.

2.3.2
Imunização baseada na análise dos componentes principais

Essa vertente também está alicerçada na equalização das sensibilidades aos fatores de risco. Entretanto, tais fatores não são obtidos a partir de uma função de ajuste, mas sim por uma análise de componentes principais (ACP).

Ao contrário dos modelos representados por aproximações funcionais, na análise de componentes principais não há uma definição *a priori* dos fatores de risco. A premissa básica é a de que é possível detectar os fatores capazes de explicar parcela significativa da variabilidade dos retornos dos títulos, por meio de um procedimento de análise multivariada de dados conhecido como análise de fatores.

Uma das dificuldades ao se realizar uma análise multivariada reside na visualização das relações entre uma série de variáveis de uma base de dados. Felizmente, na grande maioria dos casos, boa parte das variáveis de uma dada base é governada pelo mesmo princípio.

Essa redundância de informações permite uma simplificação por meio de técnicas como a análise dos componentes principais. O método gera um novo conjunto de variáveis denominadas componentes principais[xiv], sendo cada um desses uma combinação linear das variáveis originais. Os componentes principais formam uma base ortogonal, reduzindo a zero a informação redundante.

No caso específico da estrutura a termo, a análise busca estimar os componentes mais representativos das alterações no amplo espectro das taxas de juros representadas. De posse de uma série de dados sobre a ETTJ do mercado americano, Litterman e Scheinkman (1991) identificam três fatores ortogonais como os responsáveis pela maior parte (aproximadamente 98%) dos movimentos da estrutura a termo da taxa de juros americana: movimentos paralelos (nível), mudanças na inclinação e alterações na curvatura. Segundo Varga e Valli (2001), esses mesmos fatores respondem por 94,3% dos movimentos da ETTJ no mercado brasileiro.

O método baseado em componentes principais possui a vantagem de identificar os fatores explicativos das variações da curva de juros, fazendo uso de dados reais. Entretanto, o foco de virtude é ao mesmo tempo responsável pela principal deficiência do modelo, ao tornar a análise dependente da amostra. As aproximações funcionais padecem de deficiência semelhante, embora os fatores possam ser especificados de uma forma conveniente à análise engendrada pelo gestor de recursos.

Baseado no trabalho de Litterman e Scheinkman (1991), Barber e Copper (1996) sugerem a adoção de métodos de imunização alicerçados no *hedge* desses componentes principais. Partindo-se da premissa que a estrutura a termo se altera em múltiplas direções – e que a carteira só estará imunizada se prover proteção para cada uma das alterações de direção fundamentais – os autores sugerem a adoção da análise de componentes principais, já que "o único guia disponível para determinar o conjunto de movimentos independentes é a própria história destes (BARBER e COOPER, 1996, p. 99)".

Suponha que a estrutura a termo de taxas de juros $r(s)$ se altere por um montante $u(s)h$, onde $u(s)$ representa uma função conhecida u de prazo de vencimento s e h representa uma variável randômica. Assuma, ainda, que $x(s)$ representa a alteração $r(s)$ - $r_0(s)$ na data s. Se as alterações nas taxas a vista de diferentes prazos de vencimento não forem perfeitamente correlacionadas, teremos:

$$x(s) = \sum_{k=1}^{K} u_k(s)h_k \tag{11}$$

Se n fluxos de caixa irão ocorrer entre t_1 e t_n, $x(s)$ e $u_k(s)$ podem ser expressos como vetores coluna de dimensão *n*. Em notação vetorial a equação (11) se transforma em:

$$X = \sum_{k=1}^{K} h_k U_k \tag{12}$$

O objetivo da estratégia é aproximar X – definido como o vetor de mudanças nas taxas a vista – por meio da combinação linear de um pequeno conjunto de mudanças fundamentais expressas pelos componentes u_k. Assim, tem-se:

$$X_t = \bar{X} + \sum_{k=1}^{k} h_{t,k} u_k + E_t \tag{13}$$

onde $\bar{X}$ representa o vetor de médias de mudança das taxas *spot* e E_t o vetor de erros. Os parâmetros $h_{t,k}$ são obtidos por meio da regressão de X_t em $U_1,...,U_k$. Por sua vez, a análise de componentes principais permite determinar $U_1,...,U_k$ de forma a minimizar a variância do erro total.

A cada fator U_k corresponderá uma medida de *duration* D_k definida por:

$$D_k = \sum_{i=1}^{N} W_t C_i u_k(t_i) t_i / P_{i(0)} \tag{14}$$

onde W_t representa o fator de desconto que traz a valor presente o valor do cupom a ser pago em *t*. Definindo-se D_k^A e D_k^P como a *duration* do ativo e do passivo, respectivamente, alcança-se a imunização mediante a escolha de ativos que viabilizem a igualdade entre D_k^A e D_k^P.

2.3.3
Imunização baseada em choques arbitrários

Na imunização baseada em choques arbitrários, o procedimento de imunização não está necessariamente associado a uma forma funcional específica da ETTJ. Nesse sentido, busca-se imunizar uma carteira de ativos em um ambiente de choques arbitrários sobre a curva de taxa de juros.

Fong e Vasicek (1984) foram os primeiros a oferecer uma solução nesse contexto, baseada no conceito de dispersão ao redor da *duration*. A hipótese básica do modelo consiste na divisão do risco de taxa de juros em dois componentes básicos: a magnitude da alteração sofrida pela estrutura a termo e o tipo de título (ou conjunto de títulos) exposto a essa modificação. O segundo termo representa uma medida de risco de imunização. A minimização desse risco busca reduzir a variabilidade do valor de um título em função de movimentos aleatórios das taxas de juros.

Ao testar a hipótese, Fong e Vasicek demonstram que o risco de imunização pode ser descrito pela variável:

$$M^2 = \frac{\sum_i^n (t_i - D)^2 PV(CF_i)}{\sum_i^n PV(CF_i)} \tag{15}$$

onde D representa a *duration* do título (ou o horizonte de investimento), t_i é o prazo do fluxo *i* e $PV(CF_i)$ é o valor presente do fluxo *i*.

Trata-se, portanto, de uma medida de dispersão que tenderá a zero na medida em que a data de recebimento dos cupons se aproximar da *duration* da carteira. De fato, M^2 será igual a zero se a carteira for composta apenas por um título sem cupom. A estratégia de gerenciamento conjunto de ativos e passivos consistirá, portanto, em minimizar M^2 para uma dada *duration* do passivo.

Ao se observar a equação (15) nota-se certa semelhança com o conceito de convexidade, a não ser pelo fato de que M^2 está necessariamente associada a um horizonte de tempo. Entretanto, trata-se de perspectivas diferentes: na derivação de M^2, Fong e Vasicek se concentram na modelagem e mensuração da exposição ao risco. O conceito de convexidade, ao contrário, enfatiza ganhos no retorno (ganhos esses que se baseiam em bases frágeis e podem facilmente se transformar em variações negativas, conforme descrito anteriormente).

Numa análise correlata, Balbás e Ibáñez (1998) propuseram uma nova medida para o risco de imunização. Os autores introduzem o conceito de condição de imunização fraca[xv]. Esta é verificada quando da existência de pelo menos um título *i* no *portfolio* que, em decorrência de um choque *k* na estrutura a termo, seja capaz de produzir um retorno maior ou igual ao retorno esperado.

Assim, $\frac{Vi(k)}{Pi} \geq R$, onde $Vi(k)$ representa o retorno do título i na ocorrência do choque *k*, Pi o preço do título *i* e R o retorno esperado. A condição pode ser interpretada da seguinte forma: um investidor que tenha certeza da ocorrência de um determinado choque *k* irá comprar um título cuja rentabilidade esperada não será comprometida pela alteração na curva de juros.

Suponha agora que exista um subconjunto de choques para os quais a condição de imunização fraca não se verifica. Nesse caso, o risco da estratégia de imunização pode ser calculado a partir das perdas decorrentes da ocorrência de tais choques e a minimização do risco de imunização estará associada à minimização dessas perdas. Para tanto, os autores sugerem a adoção de uma medida do risco de imunização:

$$\tilde{N} = \frac{\sum_{i}^{n} \left| t_i - D \right| PV(CF_i)}{\sum_{i}^{n} PV(CF_i)} \tag{16}$$

Embora os dois modelos partam de uma mesma premissa, a da ocorrência de choques arbitrários sobre a curva de taxa de juros, a carteira de ativos é exposta a diferentes extensões de choques, o que justifica a diferença entre as medidas de dispersão apresentadas. A rigor, uma série de modelos de dispersão pode ser criada a partir da exposição a diferentes choques arbitrários. Entretanto, as justificativas econômicas para o modelo linear e para o quadrático são mais consistentes (BALBÁS, et al., 2002).

Finalmente, Nawalkha et al. (2003) propuseram um método generalizado para o *hedge* do risco de taxa de juros em uma ambiente de choques arbitrários da estrutura a termo onde não há imposição de limites à extensão dos choques. Ao contrário dos modelos de Fong e Vasicek e de Balbás e Ibáñez, os autores não assumem que o fluxo de caixa oriundo dos títulos tenha de ser necessariamente positivo, ou seja, permite-se a venda a descoberto. Assim, é possível:

a) Derivar o modelo do vetor *M* generalizado para título *i*, ou seja, uma série de medidas de risco de imunização de ordem *m*, descritas por:

$$M_i^m = \left[\sum_{t=1}^{n} C_t . W_t . \left[g(t) - g(H) \right]^m / P_0 \right] \tag{17}$$

onde C_t representa o cupom em t, W_t a função que traz o cupom a valor presente, e $g(t)$ representa uma função polinomial que associa um expoente α ao prazo t de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O valor de $\alpha = 1$ corresponde ao caso clássico onde a distância entre o prazo de vencimento de cada fluxo de caixa e o horizonte de planejamento é elevada à potência inteira. Se definirmos $0 < \alpha < 1$, podemos creditar um maior peso aos fluxos de curto prazo, garantindo uma melhor imunização caso as taxas de juros de curto prazo se mostrem mais voláteis que as de longo prazo;

b) Igualar as medidas de risco a zero, independentemente do uso de títulos sem cupom[xvi].

O vetor *M* de medidas de risco pode ser especialmente interessante para aplicação no caso brasileiro, uma vez que as taxas reais de curto prazo são mais voláteis que as de longo prazo. Assim, espera-se um melhor desempenho dos modelos que contemplem $0 < \alpha < 1$. Matematicamente, esse intervalo garante que, dada a função polinomial $g(t) = t^\alpha$, a razão $g(s)^m / g(t)^m$ seja maior que s^m / t^m para um prazo de vencimento $s > t$. Intuitivamente, a definição desse intervalo pode ser compreendida como a determinação de que a volatilidade da parte inicial da estrutura a termo terá uma maior ponderação.