4
Modelagem em Árvore

4.1
Introdução

A modelagem por árvore de cenários é uma forma usual de representação de incertezas em problemas estocásticos multi-período [9, 14, 28, 42, 43]. Ela possibilita a incorporação de dependências de qualquer natureza entre os fatores envolvidos e sujeitos a flutuações aleatórias, cuja evolução ao longo do período é representada por uma seqüência temporal partindo da raiz (etapa inicial) até uma folha da árvore (etapa final).

Nas próximas seções será detalhada a modelagem da incerteza na demanda em árvore de cenários, com suas ramificações, nós e probabilidades associadas. Em seguida é apresentado como a estrutura em árvore é utilizada para construção do problema de otimização linear que estima a estratégia ótima de contração para as distribuidoras nos leilões de energia.

4.2
Estrutura da Árvore

Cada ramificação da árvore de demanda é associada a uma diferente taxa de crescimento em relação à demanda do nó anterior. Ou seja, a demanda em um ano t pode evoluir para diversos cenários (ramificações) no ano $t + 1$, estabelecidos de acordo com taxas de crescimento anuais pré-determinadas. Por exemplo, pode-se considerar a evolução da demanda de um dado ano para três possíveis cenários (ou ramificações): alto, médio e baixo de crescimento de mercado. Cada nó deste ano dará origem a outros três nós no ano seguinte, e assim por diante, representando a incerteza na evolução da demanda.

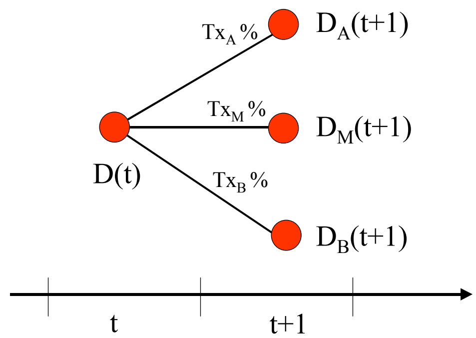

Figura 4-1 – Taxas de crescimento

Portanto, supondo um número de T etapas (anos) simuladas e um número de ramificações constante igual a N, serão construídas N^T possíveis trajetórias de evolução da demanda no modelo de decisão de contratação.

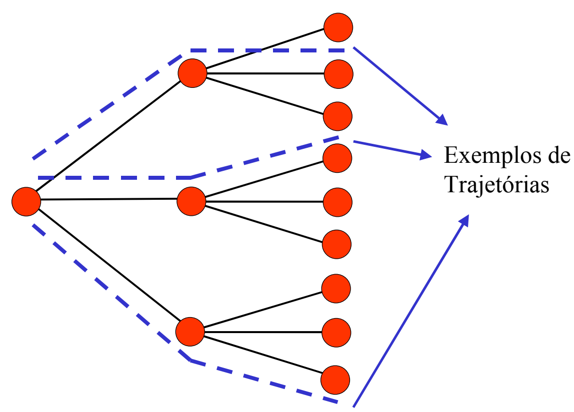

Figura 4-2 – Árvore de expansão da demanda

4.3 Probabilidade

Se a evolução da demanda for um processo aleatório, isto é, se o sucessor de um ano com crescimento "alto" pode ser tanto um ano com crescimento "baixo" como "médio" ou novamente "alto", as probabilidades de transição são iguais ($P_{alto/alto} = P_{alto/médio} = P_{alto/baixo}$). Por outro lado, se houver correlação entre os anos, isto é, se após um ano com crescimento "alto" existir uma maior probabilidade de ocorrer outro ano com crescimento "alto", então $P_{alto/alto} > P_{alto/médio}$ e $P_{alto/alto} > P_{alto/baixo}$.

Neste estudo será adotado que a evolução da demanda segue um processo markoviano, ou auto-regressivo de primeira ordem. Isto é, a probabilidade de um cenário ocorrer depende da realização da demanda do ano anterior. Será feita uma transição condicionada da demanda de energia, com distintas probabilidades dado que no ano corrente o cenário (alto, médio ou baixo) é conhecido.

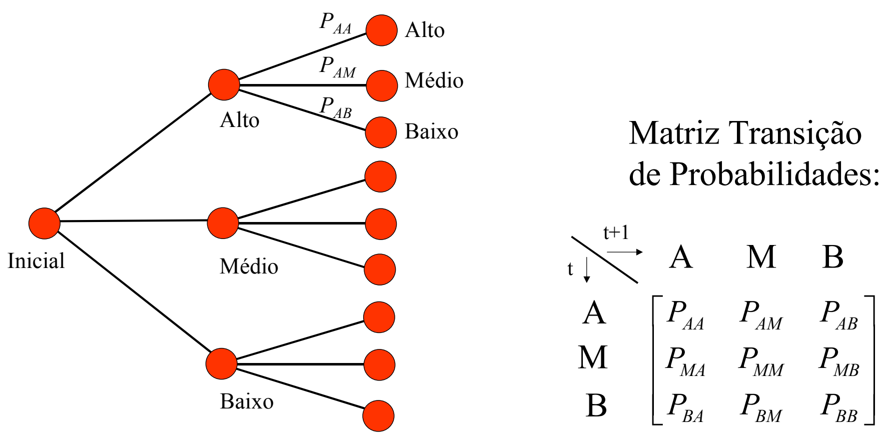

Figura 4-3 – Matriz de transição de probabilidade

4.4 Formulação Matemática

Utilizando a modelagem por árvore, a formulação do problema apresenta um grande número de variáveis de decisão (uma para cada tipo de leilão vezes o número de nós da árvore de decisão) e também um grande número de restrições (uma para cada regra modelada vezes o número de nós da árvore de decisão).

O problema linear que surge ao final da modelagem é apresentado de forma simplificada a seguir:

$$\text{Min} \quad \lambda CP + (1-\lambda)\, CE$$

sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} A\,x \leq b \\ C\,y \leq k \\ F\,x + G\,y + s \geq d \end{array}\right] \quad \text{Para cada nó da árvore de decisão}$$

onde:

- x e y representam os montantes contratados de energia existente e nova, respectivamente.
- *$A\,x \leq b$ representa restrições associadas à energia existente.*
- *$C\,y \leq k$ representa restrições associadas à energia nova.*
- *$F\,x + G\,y + s \geq d$ representa restrições associadas ao atendimento da demanda*, onde a variável de folga "s" representa a sub-contratação.
- *CE* é o custo esperado total da energia para os consumidores cativos, e *CP* é o custo esperado das penalizações/incentivos para a distribuidora. O fator de ponderação λ reflete a *aversão a risco* de cada distribuidora, podendo variar entre 0% a 100%.

Para cada nó da árvore de demanda, o modelo computacional calcula um vetor cujos componentes são os montantes *a contratar* para cada um dos leilões. Estas decisões terão impacto futuro somente nos cenários originados deste nó (seus nós "filhos"), num horizonte que depende dos prazos de entrega e duração dos contratos de cada tipo de leilão. Por exemplo, caso haja uma decisão de compra do leilão A-1 em um determinado nó, esta energia só estará disponível para os nós filhos situados entre o ano seguinte à compra (prazo de entrega para A-1) e cinco anos após a entrega (duração do contrato para A-1), área representada pelo cone na figura abaixo.

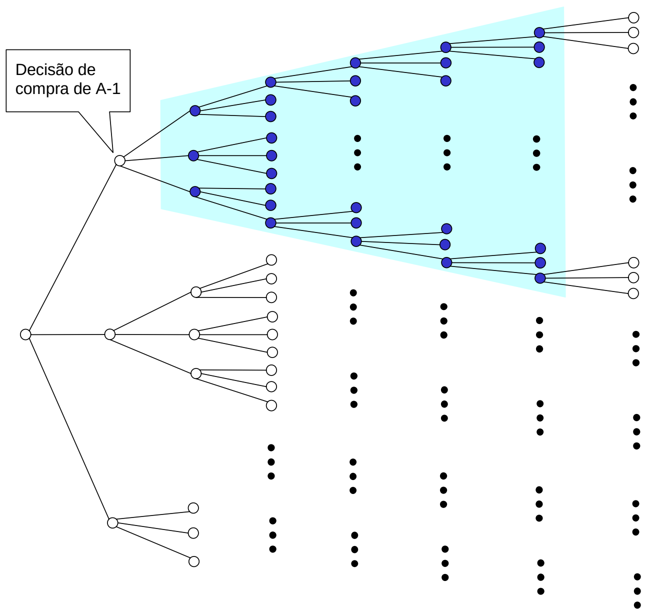

Figura 4-4 – Exemplo de compra no leilão de A-1

Assim, a cada nó da árvore, há os montantes *contratados* de cada tipo de leilão, que dependem das decisões de contratação tomadas no passado, como foi descrito acima. Por outro lado, cada nó da árvore de demanda representa uma possível realização da mesma, com uma probabilidade de ocorrência associada. Desta forma, as decisões de contratação tomadas devem satisfazer as restrições do problema para todos os possíveis cenários, isto é, para todos os nós da árvore. Como conseqüência, cada nó da árvore do problema traz um respectivo custo associado, devido às decisões tomadas no passado para satisfazer suas restrições.

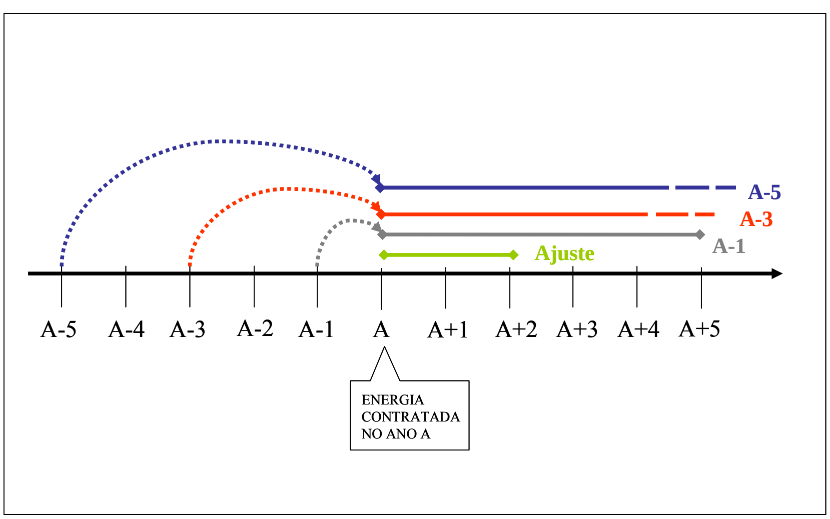

Figura 4-5 – Esquema de contratação para determinado ano

Visto isto, o programa age no sentido de minimizar o valor esperado total dos custos associados a cada nó, ponderando o valor dos custos com a probabilidade de sua ocorrência. Desta forma, cotejando todos cenários possíveis, com suas respectivas probabilidades de ocorrência, o modelo traça sua estratégia de contratação, definindo quanto contratar de cada tipo de leilão, para cada realização da demanda ao longo do tempo (nós da árvore).