3 Esboço de uma Teoria Contemporânea

Os tópicos relatados nos capítulos precedentes – desde Aristóteles até Kant – refletem-se, de certo modo, também no período contemporâneo. Na discussão que será abordada agora – com Frege, Hilbert, Poincaré e Russell – três aspectos aparecem como centrais, quais sejam, a polêmica frente às definições implícitas, a relação entre definição e existência e o problema das definições impredicativas.

Se Aristóteles, por exemplo, exigiu que uma genuína definição fosse aquela que mostrasse a essência do definido estava, deste modo, deixando subentendida a imposição de que tais definições teriam que ser, evidentemente, explícitas⁹¹. A tradição que enlaça, com Platão e Aristóteles, a busca de tais definições – inspiradas nas definições elementares da geometria – foi parte constitutiva do método filosófico, com alguma exceção notória como a de Descartes.

Mas uma consideração mais apurada da prática geométrica levou, seja a distinguir entre definir e supor a existência do definido – as hipóteses aristotélicas –, seja a considerar que as definições que usa efetivamente o geômetra garantem automaticamente a existência de seu objeto, como fez Kant. Porém, o próprio progresso da matemática, já sensível para a época de Kant, torna difícil defender tal posição, exceto se se decide sacrificar setores inteiros da mesma.

A questão da existência também aparece em Aristóteles desde outra perspectiva, vinculada com o que foi dito acima. Já foi visto que os intérpretes procuram explicar uma dualidade presente no corpus aristotélico: por um lado, as definições nada dizem em relação à existência daquilo que se define; por outro, as definições são objetivo da ciência, supondo então a existência do definido. Leibniz distinguia entre definições que mostravam a possibilidade do definido e outras que não, mas as definições genéticas ou causais mostravam que algo é possível na medida em que a própria definição mostrava que a coisa *é*, sendo,

⁹¹ Esta relação é exigida no escopo da teoria aristotélica. Contemporaneamente, se aceita que definições implícitas possam, também, captar a essência do definido. É o caso, por exemplo, da noção de ponto conforme apresentada por Hilbert.

então, possível. Kant chegou a identificar as noções de definição e de construção, com o intuito de, finalmente, determinar a diferenciação entre matemática e filosofia. Isso foi também advertido por Eberhardt, um crítico de Kant, que afirmava que os matemáticos definiam considerando somente a possibilidade lógica e passavam a demonstrar teoremas, sem considerar a questão ou não da existência do definido. Neste âmbito de discussão, em linhas gerais, Poincaré está ao lado de Kant enquanto Frege coloca-se como receptor das idéias de Leibniz.

O físico e matemático francês apareceu justamente para contrapor-se ao projeto fregeano de reduzir a aritmética à lógica e encontrou terreno fértil para a exposição de suas idéias a partir da antinomia assinalada por Russell dentro do projeto de Frege. Assim, com o intuito de barrar qualquer contradição – lingüística ou matemática – Poincaré propôs que todas as definições fossem efetuadas de modo predicativo, ou seja, que não incorressem em um círculo vicioso⁹².

Agora, em relação às definições impredicativas – que, conforme será apresentado, foi a grande polêmica do final do século XIX e inseriu Poincaré neste campo de discussão – estas também refletem, de certa forma, um preceito aristotélico: definições não podem ser apresentadas de modo circular⁹³. Além disto, deve-se lembrar agora de um dos critérios exigidos para as definições: elas devem poder ser elimináveis, isto é, parte do conceito de definição explícita, mas não necessariamente coincide com ele.

Isto não significa outra coisa que toda vez que o *definiens* aparecer em um enunciado ele deverá poder ser substituído pelo *definiendum* sem nenhuma modificação do sentido. Isto sempre será possível no caso das definições reais, aponta Aristóteles⁹⁴. Ver-se-á, a seguir, que uma versão forte deste critério é satisfeito pelas definições predicativas, mas não para as impredicativas, que ainda poderiam ser consideradas explícitas. Têm-se, então, uma primeira indicação da

⁹² “Círculo Vicioso” tem, neste contexto, um significado bem determinado: definir uma entidade em função de uma totalidade na qual ela está contida. Russell colocou-se ao lado de Poincaré em relação a este tópico. Contudo, Poincaré e Russell divergiram no que diz respeito a vários outros. Um deles – aquele que a esta exposição interessa – está relacionado ao princípio de indução completa. Poincaré vê a indução como um princípio próprio da matemática. Russell, por sua vez, considera a indução matemática a própria definição de número natural.

⁹³ Conforme dito no primeiro capítulo, uma definição impredicativa é um tipo de definição circular.

⁹⁴ Fica explicitada, assim, a relação inevitável entre definição real e explícita em Aristóteles.

relação entre definições reais, definições construtivas e definições predicativas por um lado, e definições nominais, não construtivas e não predicativas pelo outro.

Tudo isto ainda poderia ser considerado como parte da discussão sobre definições explícitas, mas um aspecto da polêmica em torno das definições já excede o escopo desta distinção. Diz respeito, agora, à oposição entre definição explícita e implícita, questão que enfrentaram Frege e Hilbert.

É fundamental, então, retornar à questão das definições implícitas. Conforme Viero, Shapiro apresenta dois sentidos:

No seu entender, o termo *definição implícita* é ambíguo, uma vez que possuiria dois sentidos distintos. De acordo com o primeiro deles, uma definição implícita pressuporia que todos os termos da linguagem possuem um significado preciso, menos aquele cujo significado está sendo estipulado pela definição. Por exemplo, ' $c < 10$ e c é um número perfeito', constituindo, assim, uma definição implícita do número 6. Contudo, não é esta a concepção que interessa a Shapiro. Para ele, uma definição implícita seria uma caracterização simultânea de uma série de itens em termos de suas relações mútuas. Neste momento, é difícil evitar a imagem de um sistema de equações lineares a n incógnitas. As várias equações do sistema determinariam as suas soluções, se elas existem, de uma forma simultânea. Esta parece ser a contrapartida matemática mais próxima daquilo que Shapiro pretende caracterizar, apesar de que em momento algum do texto ele utilize de tal exemplo (Viero, 2003, p. 18).

Uma das etapas fundamentais do projeto logicista consiste na apresentação de definições claras e rigorosas. O ponto de partida na busca de legítimas demonstrações matemáticas é um corpo bem elaborado de axiomas e estes, algumas vezes, são confundidos com definições no sentido de que, como o próprio Frege assume, uma definição pode ser transformada em uma proposição auto-evidente e, quando isto ocorre, ela pode ser usada como um axioma⁹⁵. Frege tinha uma concepção de definição explícita dentro de uma teoria – é considerado por alguns como autor da concepção de definição como mera abreviatura sintática – mas tinha, também, uma noção de definição vinculada com aclaração que não se adapta exatamente ao modelo anterior.

Uma vez constatado que axiomas e definições podem ser confundidos um com o outro, Frege tratou de distingui-los. Esta proposta fregeana surgiu em decorrência de uma crítica a Hilbert, pelo fato de que este não teria realizado tal diferenciação. Mas o debate entre Frege e Hilbert a respeito de definições não se desenvolveu somente a respeito deste tópico. Distintamente de Frege, Hilbert não

⁹⁵ FREGE, 1980, p.36.

concebia a possibilidade de que todas as definições fossem apresentadas explicitamente. Iniciando pela análise das noções geométricas de “ponto”, “plano” e “linha reta”, Hilbert concluiu que delas pode-se esperar alcançar somente definições implícitas e isto significa admitir que elas devam ser assumidas enquanto entidades que satisfazem os axiomas formais que são formulados por meio de tais noções⁹⁶. Esta concepção foi energicamente rejeitada por Frege.

Tem-se, assim, um vasto campo de discussão em relação ao panorama contemporâneo. Portanto, neste capítulo discutir-se-á, principalmente, a questão das definições implícitas, a discussão epistemológica – e não lógica – em torno do predicativismo e a relação entre existência e definição.

3.1. A Formação de Conceitos Matemáticos

Definir é uma atividade de grande importância dentro do sistema fregeano. Basta observar as etapas que se fizeram necessárias para que a fundamentação do projeto logicista alcançasse seu término⁹⁷: inicialmente, Frege necessitou buscar uma definição geral de número; junto dela, apresentou uma definição de sucessão e, de modo particular, a definição dos números 0 e 1⁹⁸. Somente depois de vencidas tais etapas é que Frege introduziu a distinção entre sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*), assim como a noção de “extensão de conceitos” acrescentando, por fim, o Axioma V.

Fundamental é ressaltar que sem uma definição adequada de número o projeto logicista não poderia ser efetivado. A matemática e, em última instância, a

⁹⁶ PAP, 1970.

⁹⁷ Não importa aqui o julgamento em relação às falhas ou aos possíveis sucessos do projeto de redução da aritmética à lógica.

⁹⁸ Mas porque definir, primeiramente, os números 0 e 1 e a noção de sucessor imediato? Pelo simples fato de que, conforme Frege, todas as equações numéricas podem ser reduzidas a estas noções. A primeira definição de 0 que pode ser encontrada em *Os Fundamentos da Aritmética* é essa: dizer que ‘o número 0 convém ao conceito *F*’ é o mesmo que dizer ‘qualquer que seja *a*, *a* não cai sob *F*’. Depois, Frege define os números naturais do seguinte modo: 0 = número que convém ao conceito “diferente de si próprio”; 1 = número que convém ao conceito “idêntico a zero”; 2 = número que convém ao conceito “idêntico a zero ou idêntico a um”; $n + 1$ = número que convém ao conceito “idêntico a 0, ou a um, ..., ou a *n*”. Expressões tais como “conceito” e “objeto” não podem ser propriamente definidas pelo fato de que são logicamente simples, ou ainda, primitivas.

lógica só pode reconhecer como conceitos seus aqueles que possuem uma fronteira nítida, ou seja, que foram determinados de modo preciso, isentos de qualquer traço de vagueza. É esta uma das primeiras exigências que resulta do rigor que Frege impôs a sua reconstrução da aritmética. E para que esta reivindicação fosse cumprida Frege estabeleceu, nos §§ 55 a 67 do Volume II de *Grundgesetze*, os princípios das definições⁹⁹.

Basicamente, pode-se falar de dois princípios: 1) o princípio de completude e 2) o princípio de simplicidade. Quanto ao segundo princípio, este diz que toda definição deve ser simples, ou seja, não definida por predicados compostos. Em outras palavras, toda definição precisa conter um signo simples e fixar o significado deste signo de modo claro, não ambíguo. Além disso, Frege exige que para cada coisa deva existir uma única definição e cada expressão definitória deve definir um único ente ou objeto, ou seja, uma expressão não pode ser usada para determinar duas coisas distintas.

Agora, em relação ao primeiro princípio, que é aquele que interessa para esta exposição, Frege afirma:

Uma definição de um conceito (de um predicado possível) precisa ser completa; ela precisa determinar de maneira não ambígua, considerando qualquer objeto, se ele cai ou não sob o conceito (se o predicado é ou não verdadeiramente atribuível a ele). Ainda assim não deve ser considerado qualquer objeto caso a definição deixe em dúvida se ele cai sob o conceito; embora para nós seres humanos, com nosso conhecimento incompleto (defeituoso), não podemos decidir sempre sobre esta questão. Nós podemos expressar isto metaforicamente do seguinte modo: o conceito precisa ter uma fronteira nítida (Frege, 2001, p.259, §56).

Mas como os homens, seres limitados, poderão determinar a fronteira nítida de um conceito? Utilizando-se de um princípio lógico, conforme Frege. E, neste caso, o princípio a ser empregado é a lei do terceiro excluído: ela é uma forma eficiente de exigir que o conceito tenha tais notas e não outras, fazendo com que sua fronteira seja demarcada de modo rigoroso¹⁰⁰.

Mais uma vez aparece a imprescindibilidade da lógica: ela não reconhece como válidos conceitos que não foram ainda determinados clara e nitidamente.

⁹⁹ Mas já nos *Grundlagen* é possível encontrar alguns dos pressupostos fregeanos em relação às definições.

¹⁰⁰ Tal exigência é, de certo modo, excessiva. A aplicação do princípio do terceiro excluído, por exemplo, dar-se-á sempre em um domínio específico. Em outras palavras, esta exigência vale para um dado domínio e não para todo o universo. Basta lembrar dos pressupostos da lógica contemporânea: define-se para um dado domínio e nunca para todo o universo do discurso.

Deste modo, Frege endossa o seu ponto de vista de que a lógica dá à matemática o rigor que ela, por si só, não poderia alcançar. Afinal, os matemáticos procedem de modo a deixar dúvidas quanto à constituição de seu corpo conceitual, ou seja, por um lado, os matemáticos definem de modo fragmentado e, por outro, fazem uso de símbolos antes de terem exibido a definição dos mesmos.

Um exemplo de procedimento de definição fragmentada, conforme Frege, é “... primeiro, eles dão a definição para um caso particular – por exemplo, para inteiros positivos – e fazem uso dela; então, após muitos teoremas, segue uma segunda definição para outro caso – por exemplo, para inteiros negativos e zero” (Frege, 2001, p. 260, §57). O prejuízo principal que se segue de tais definições é que elas não permitem o estabelecimento de teoremas, ou melhor, “se não temos definições últimas, não temos também teoremas últimos” (Frege, 2001, p. 264, §61).

Outra exigência lembrada por Frege é a de que o significado de toda palavra ou deve ser definido ou considerado simples. Uma vez estabelecido que determinado termo não possa ser considerado simples, deve-se dele obter uma definição. Somente depois de tal análise, isto é, depois de estabelecer se o termo em questão necessita ser definido ou é auto-evidente, é que ele poderá aparecer em um axioma. A exigência que Frege destaca em seus escritos semânticos deve ser aqui enfatizada: a todo nome deve ser designado um significado. Afirma Frege:

... todo nome de função precisa ter um *Bedeutung*. De acordo com isto, todas as definições condicionais e qualquer procedimento de definição fragmentada precisa ser rejeitado. Todo símbolo precisa ser completamente definido num golpe de modo que, pode-se dizer, ele adquira um *Bedeutung* (Frege, 2001, p. 268, §65).

Frege tinha, de fato, a idéia de que um conceito deve ter um valor determinado para todos os objetos. Evidentemente, esta é uma exigência bastante difícil de ser cumprida. Afinal, nem todos os termos ou objetos podem ser definidos de modo completo e explícito¹⁰¹. Aliás, há coisas primitivas que, de fato, não podem ser definidas. Contudo, acredita-se que esta prescrição fregeana deva ser entendida como um passo necessário ao cumprimento de sua tarefa de transformar toda proposição aritmética em uma proposição lógica. Parece natural

¹⁰¹ Em realidade, os termos ou objetos devem poder ser definidos para um determinado universo do discurso. Não cabe a exigência de que sejam definidos, de modo conclusivo, para o universo como um todo.

supor que através de definições fragmentadas seu projeto não poderia ser desenvolvido. Cabe, então, observar ainda o que diz Frege a respeito em outro momento:

O que as pessoas poderiam dizer da seguinte definição? “Signos são chamados brancos quando eles pertencem a objetos brancos”. Então, eu posso legitimamente considerar, assim como um signo para a folha branca de papel que eu tenho a minha frente, um remendo [pedaço] circular preto, na medida em que eu não tenha ainda empregado este signo de algum outro modo. E, assim, um remendo poderia ser, então, branco por definição. Ao contrário disto, nós devemos dizer: usando a expressão “se eles pertencem a objetos brancos” a definição pressupõe que nós conhecemos o *Bedeutung* da palavra “branco”; por outro lado, não seriam completamente especificados que signos pertencem a objetos brancos. Muito bem! Se a palavra “branco” é conhecida, nós não podemos pretender defini-la novamente. Nós devemos considerar totalmente auto-evidente que uma palavra não pode ser definida por meio dela mesma; pois se nós fazemos isto nós estamos considerando a palavra como conhecida e como desconhecida. Se ela é conhecida, uma definição é, no mínimo, supérflua; se ela não é conhecida, ela não pode servir para o propósito de definição (Frege, 2001, p. 262, §59).

Decorre daí, também, que definições circulares não podem ser aceitas. Nenhum termo pode ser utilizado na definição dele mesmo uma vez que se do termo é exigida uma definição é bastante óbvio que ele em nada poderá auxiliar no momento de exibir a definição que antes era desconhecida.

Tal exigência destacada por Frege é a mesma que, posteriormente, Poincaré utilizará para acusar o projeto logicista de ter fracassado. Mas pode-se considerar que há uma distinção de princípio entre a exigência de Frege e a de Poincaré. Para Poincaré, algumas definições circulares geram contradições. Para afirmar com maior exatidão, aquelas que envolvem o infinito. No caso de Frege, estabelecer que definições não sejam circulares significa ter o cuidado de tornar o termo definido preciso e, conseqüentemente, bem determinado em relação a qualquer outro. Assumindo a posição fregeana, se a definição for circular ela poderá permanecer ambígua¹⁰².

Deve-se observar, também, que não é conveniente apresentar várias definições de um mesmo termo¹⁰³. Isto, além de não ter utilidade alguma, prejudica muito na compreensão do mesmo. É este mais um dos freqüentes erros

¹⁰² Este tópico será discutido com maiores detalhes na segunda seção deste capítulo, principalmente a partir da concisa e precisa elaboração que Gödel apresentou em relação às definições circulares.

¹⁰³ Basta lembrar dos princípios destacados no início desta seção.

cometidos pelos matemáticos: eles preferem usar um símbolo com diferentes significados ao invés de criar um novo símbolo, conclui Frege.

Contudo, há outro modo de proceder dos matemáticos, qual seja, eles introduzem, arbitrariamente, signos que designam um determinado significado mas, com isto, não significa que estejam afirmando algo a respeito de tal signo. É o que ocorre, por exemplo, na operação matemática mais elementar, a soma. Pode-se definir o número 2 como “1+1” e, deste modo, o que se faz é simplesmente introduzir um signo que explicita um dado significado. Frege afirma que “a definição de um objeto não enuncia enquanto tal nada sobre ele, mas estipula o significado de um sinal” (Frege, 1974, p. 257, §67). Aliás, fornecer o *Bedeutung* é justamente a função primordial das definições.

É este um dos assuntos principais da correspondência que Frege trocou com Hilbert no final do século XIX e início do XX. Na carta de 27 de dezembro de 1899, Frege declarou a Hilbert: “Mas nós não podemos perder de vista o fato de que uma definição não afirma nada, mas impõe alguma coisa” (Frege, 1980, p. 36). O que a definição “impõe” é um significado para um dado termo. Somente depois de fixado tal significado, a proposição na qual o termo aparece pode ser tratada como um axioma. Assim sendo, os termos que aparecem nos axiomas devem ter sido previamente definidos, esclarece Frege.

Frege acredita ter, deste modo, clarificado a diferença entre definição e axioma. Conforme Frege, Hilbert não esclareceu tal distinção¹⁰⁴. A totalidade das proposições matemáticas pode ser dividida em definições, por um lado, e axiomas ou leis fundamentais e teoremas, por outro. Agora, o que Hilbert afirma textualmente é que os axiomas também definem, ou seja, podem ser usados como definições. Não significa, assim, que Hilbert tenha, de fato, confundido axiomas e definições.

Mas Frege chama a atenção para o fato de que na seção 6 de *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert declara: “Os axiomas deste grupo definem o conceito de congruência ou movimento”. A partir daí, Frege pergunta: “Que diferença há, então, entre definições e axiomas?” (Frege, 1980, p. 37). O fato de que uma proposição não pode ser provada – e, então, deve ser tratada como uma definição – não esclarece em nada a distinção entre axioma e definição. Tal distinção

¹⁰⁴ O mesmo valeria para a distinção entre definição e explanação. Segundo Frege, Hilbert quer com elas designar coisas diferentes, mas não deixa clara tal distinção.

consiste no fato de que axiomas e teoremas não podem conter nenhuma palavra ou signo ao qual não tenha sido designado previamente um significado, afirma Frege.

Hilbert, por sua vez, parece não ter distinguido axiomas de definições explícitas. De fato, a partir do critério de verdade e existência enunciado por Hilbert, pode-se deduzir que o papel dos axiomas é, em certo sentido, o de definir os termos que neles aparecem. Na carta de 29 de dezembro de 1899, Hilbert afirma:

... eu tenho dito exatamente o contrário [em relação ao que diz Frege]: se os axiomas dados arbitrariamente não contradizem um ao outro em todas as suas conseqüências, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem¹⁰⁵. Este é o meu critério de verdade e existência (Hilbert, apud Frege, 1980, pp. 39-40).

Frege não poderia, de fato, concordar com esta afirmação. Para Frege, da verdade dos axiomas segue-se que eles não contradizem um ao outro. Afinal, quando Hilbert afirma estar dizendo exatamente o contrário, é a este tópico que está se referindo. Na extensa carta de 06 de janeiro de 1900 Frege afirma: “Eu não posso aceitar tal método de inferência que leva da não-contradição à verdade” (Frege, 1980, p. 48). É, de fato, este o tópico em relação ao qual os pontos de vista de Frege e de Hilbert distanciam-se drasticamente.

E não poderia ser de outra maneira: enquanto que Frege pensava que podia demonstrar-se a existência dos infinitos naturais, Hilbert intuía que essa questão dizia respeito aos modelos dos axiomas. Enquanto que o primeiro pensava que tais modelos deviam em algum sentido ser exibidos, o segundo afirmava que a consistência dos axiomas era a garantia de tais modelos. Das distintas concepções de existência de Frege e de Hilbert, surgem posições diferenciadas no que diz respeito à relação entre definições e axiomas. Frege rejeita a ausência de distinção entre axioma e definição por parte de Hilbert, mas isso é correto da perspectiva escolhida por Frege. Para Hilbert: “Definições (isto é, explanações, definições e axiomas) precisam conter tudo o que é exigido para a construção de uma teoria e precisam conter somente isto” (Hilbert, apud Frege, 1980, p. 41). E isto é correto da perspectiva estrutural hilbertiana.

¹⁰⁵ Ver-se-á a seguir que posição semelhante a Hilbert tem Poincaré em relação a este tópico. Para Poincaré, o critério de existência é a não contradição.

Na mesma carta, anteriormente citada, Hilbert realça sua posição a respeito da definibilidade proveniente dos axiomas. Para Hilbert, é a estrutura dos axiomas que permite, por exemplo, alcançar uma definição de ponto. Ilustra esta sua posição o fato de que podem ser apresentadas diferentes definições de ponto, conforme a geometria que se está considerando. Portanto, afirma Hilbert, tentar apresentar uma só definição de ponto é algo impossível. Na geometria euclidiana a definição será uma, na geometria de Riemann será outra.

Nenhum conceito matemático pode ser considerado completo até que a estrutura do sistema axiomático tenha sido estabelecida em definitivo, afirma Hilbert. Qualquer novo axioma introduzido na teoria tem o poder de modificar qualquer definição. Poderia Frege concordar com esta afirmativa de Hilbert? Parece que, ao menos parcialmente, a resposta seria positiva:

De fato, o defeito do método genético reside precisamente nisto: que os conceitos não estão prontos e são, apesar de tudo, usados como se estivessem e, portanto, não usados de modo apropriado, e nós nunca sabemos se um conceito está finalmente pronto. Às vezes acontece que após uma proposição ter sido provada ela se torna depois falsa devido a seu desenvolvimento continuado, pois o pensamento contido na proposição torna-se diferente (Frege, 1980, p. 44).

Agora, isto não autoriza a afirmar que Frege tenha concordado com o uso de definições implícitas em matemática. Pelo menos não sem antes tentar estabelecer uma definição explícita. O que se pretende deixar claro é que Frege evita definições implícitas, mas aceita o fato de que às vezes sejam necessárias. Agora, o que Frege não aceita é que axiomas sejam usados como definições.

Para Frege, uma genuína definição é aquela estabelecida de maneira clara e definitiva, ou seja, explicitamente. Não basta somente identificar conceitos por meio de relações; faz-se necessário identificar um conceito por ele mesmo, sem recorrer a outros. Para tanto, definir explicitamente é o recomendável.

Resta perguntar se quando Hilbert falou em “definição” de ponto, de linha, de plano, ele não estaria querendo, em realidade, falar de distintas análises do conceito de espaço. Poderiam não ser, necessariamente, definições e sim modos de analisar tais conceitos¹⁰⁶. Agora, se tal interpretação não puder ser aceita – o que parece bastante plausível, uma vez que Hilbert afirma categoricamente que

¹⁰⁶ Esta interpretação foi sugerida, em alguns momentos de discussão, por Lassalle Casanave. Uma defesa possível da interpretação seria a seguinte: caso se modifique o conceito de definição de explícito para implícito também se modificaria a noção de análise.

axiomas “definem” – resta perguntar se axiomas poderão satisfazer as mesmas condições exigidas para as definições.

Em outro contexto de discussão, Viero¹⁰⁷ lembra que dos axiomas não podem ser exigidos os critérios de eliminabilidade e não criatividade¹⁰⁸ que, sem sombra de dúvidas, são exigidos em relação às definições. Observe-se o que afirma Viero:

Além disso, como aplicar aos axiomas, entendidos como definições, os requisitos de eliminabilidade e não criatividade? Isto é simplesmente impossível e por uma razão muito simples: os axiomas não são definições! Eles não podem ser eliminados porque formam a base da relação de demonstrabilidade a partir da qual a verdade dos teoremas é estabelecida. Neste sentido, os axiomas possuem um caráter criativo. Através deles é que as noções e conceitos básicos do sistema são introduzidos (Viero, 2003, p. 21).

Ora, os critérios de eliminabilidade e não-criatividade não podem ser exigidos para todos os tipos de definições. Definições implícitas, por exemplo, não são elimináveis. O mesmo se pode dizer em relação às definições impredicativas: uma vez que uma definição impredicativa é essencialmente circular, ou seja, na tentativa de eliminar o termo definido o procedimento segue a uma regressão infinita, não é possível alcançar assim uma identidade em um número finito de passos¹⁰⁹. Tais critérios são aplicáveis, por exemplo, para o caso das definições explícitas.

3.2. Definição e Existência

O principal embate entre as posições de Frege e de Hilbert situa-se, então, no que diz respeito à admissibilidade de definições implícitas em matemática e,

¹⁰⁷ Esta questão é levantada por Viero em relação à postura estruturalista de Shapiro quem pretende “constituir uma epistemologia para o estruturalismo baseada na noção de *definição implícita*” (Viero, 2003, p. 16).

¹⁰⁸ SUPPES, 1957.

¹⁰⁹ “Tais identidades são justamente o que Poincaré entende como sendo suscetíveis de um processo verificacionista. Só pode ser verificada aquela asserção que pode ser reduzida a uma identidade. Este é o critério básico para falar de significado em matemática, ou seja, só tem significado o que pode ser verificado. É isto o que, segundo Da Silva [1989], permite afirmar que a restrição predicativista está intimamente entrelaçada com uma teoria do significado em Poincaré” (Engelmann, 2002, p.75).

conseqüentemente, ao critério de existência. Para Hilbert, a existência segue-se da não-contradição¹¹⁰. Frege, porém, assume sua posição realista em relação aos entes matemáticos: a existência dos objetos matemáticos está dada. Portanto, a existência é que é primordial: a partir dela é que se determina a verdade ou a falsidade, a contradição ou ausência desta e até mesmo a necessidade ou não de definir. Vinculado com o anterior, como já foi dito, está o problema da possibilidade de demonstrar a existência de conjuntos infinitos. Uma alternativa diferente, que também se vincula com o problema das definições e seu alcance existencial é a de Poincaré.

O critério de existência formulado por Poincaré passa pela noção de construção – o que, por sua vez, não tem relação com Hilbert – e esta envolve, necessariamente, a noção de definição. Para uma melhor compreensão deste tópico, se faz necessário apresentar os pressupostos a partir dos quais a concepção de Poincaré se assenta. Em primeiro lugar, o que deve ser considerado é a distinta concepção existencial dos nominalistas em relação aos realistas¹¹¹. Implicitamente está relatada, nos textos de Poincaré, esta divisão: tem-se, por um lado, os cantorianos – aqueles que acreditam na existência do infinito atual – e, por outro, os pragmatistas¹¹². Frege e Russell pertencem ao primeiro grupo.

Conforme Poincaré, é justamente na crença no infinito enquanto atual que se encontra a origem dos problemas insolúveis que surgiram no corpo dos fundamentos da aritmética. A partir da manifestação da antinomia provinda do Axioma V, introduzido por Frege no intuito de fundamentar seu projeto de redução da aritmética à lógica, é que Poincaré acreditou ter mostrado que sua posição estava correta.

Considerar como dada a existência de uma infinidade de objetos é, conforme Poincaré, uma atitude inseqüente pois não há como saber se de tal suposição não surgirão contradições. Se for possível falar de uma infinidade de objetos é porque estes podem ser gerados a partir de uma regra de construção. Tal regra permitirá colocar no domínio de entidades existentes aquelas a partir das

¹¹⁰ Caso não se possa provar, permanece-se sem fundamentação rigorosa. Inclusive, esta exigência já aparece, por exemplo, em Leibniz.

¹¹¹ Poincaré é quem faz uso desta terminologia.

¹¹² O termo “pragmatista” no lugar de “construtivista” é utilizado por Heinzmann (1985) a fim de esclarecer, exclusivamente, o ponto de vista de Poincaré. O objetivo de Heinzmann, em tal obra, é examinar a compatibilidade entre tal pragmatismo e a noção de predicatividade de Poincaré. Sendo assim, sempre que aparecer o termo “pragmatista” este pode ser lido como “construtivista”.

quais não é possível detectar contradição alguma. Caso surja uma contradição, por meio da aplicação da regra, fica excluída a possibilidade de tal objeto existir.

É neste sentido que o infinito é algo potencialmente gerado. Falar de um conjunto infinito de objetos, do ponto de vista dos construtivistas, é o mesmo que afirmar a possibilidade de atribuir determinadas propriedades a uma infinidade de objetos, desde que estes possam ser potencialmente gerados por uma regra de construção. Dos objetos que assim puderem ser gerados pode-se afirmar que existem.

Ora, das distintas concepções ontológicas aqui brevemente descritas originam-se diferentes pontos de vista em relação à importância concedida ao ato de definir. Do ponto de vista daqueles que Poincaré denominou “cantorianos” – os realistas – os objetos matemáticos existem previamente a qualquer classificação que a eles possa ser atribuída¹¹³. Já para os pragmatistas – ou construtivistas – de nenhum objeto pode ser afirmada a existência até que ele tenha sido pensado e, principalmente, definido. O caráter pragmático da concepção de Poincaré, enquanto oposto ao ponto de vista platonista, nos é apresentado de forma bastante clara por Chihara, embora Chihara mencione a construção – ao estilo de Poincaré – apenas enquanto geradora de nomes – ou símbolos – e não faz referência à construção de objetos. Em suas palavras:

Poincaré rejeita completamente a descrição platonista do matemático como o investigador e descobridor das propriedades das entidades abstratas supra-sensíveis. Do ponto de vista de Poincaré, o matemático somente constrói ‘linguagens’ e ‘sistemas de símbolos’ guiado, às vezes por necessidades práticas, outras por um tipo de senso estético (Chihara, 1973, p. 151).

Enfim, se cantorianos e pragmatistas – ou realistas e construtivistas – manifestam diferentes posições ontológicas apresentam, também, maneiras distintas de definir. Para Poincaré, as definições podem ser expostas de forma indireta ou através de postulados. A definição direta pode ser realizada por gênero e diferença específica ou por construção. Ao primeiro modo Poincaré concede

¹¹³ Muito da rejeição à posição de Poincaré decorre do fato de que ela pode sofrer a acusação de ser psicologista. Afinal, Poincaré assume que determinar a existência de uma entidade significa o mesmo que declarar que ela passou pelo processo construtivo anteriormente descrito e, acima de tudo, tal entidade foi produto do pensamento – esclareça-se que “pensamento” está sendo aqui usado em sua concepção ordinária, pois nenhuma relação tem com a noção fregeana de pensamento – de um determinado sujeito. Isto justificaria, segundo Poincaré, a impossibilidade de pressupor o infinito enquanto atual, pois não há uma mente infinita capaz de pensá-lo.

certa legitimidade pelo fato de que vem sendo usado, desde Aristóteles, no decorrer da história da filosofia.

A definição por gênero e diferença específica é, conforme Poincaré, usual para aqueles que assumem a concepção realista: são eles que definem um gênero em conformidade com uma determinada propriedade e, assim sendo, não definem indivíduos e sim classes às quais tais indivíduos podem ou não pertencer. Este tipo de definição Poincaré acaba por recusar acreditando que a substituição do *definiens* pelo *definiendum* é um modo estéril de nomear os objetos. Afinal, nada que já não fosse conhecido poderia ser introduzido através deste método de definição.

Uma vez que os objetos matemáticos necessitam ser construídos, o método da Árvore de Porfírio – do alto para a base – não pode ser aceito. Somente o procedimento construtivo – utilizado enquanto método de definição – permite a extensão do conhecimento¹¹⁴.

Fica, assim, estabelecida a conexão entre construção e definição dentro da fundamentação da matemática que tenta realizar Poincaré. Só é passível de existência aquilo que foi devidamente construído e construir significa gerar a partir de uma regra. Tal regra é que permitirá classificar os indivíduos nesta ou naquela espécie¹¹⁵. Esta classificação pode ser chamada, também, “definição”:

Isto que acabamos de dizer das classificações se aplica imediatamente às definições. Toda definição é, com efeito, uma classificação. Ela separa os objetos que satisfazem a definição daqueles que não satisfazem e lhes arruma em duas classes distintas. Se ela procede, como diria a Escola, *per proximum genus et differentiam specificam* ela repousa, evidentemente, sobre a subdivisão do gênero em espécies. Uma definição, como toda classificação, pode então ser ou não ser predicativa (Poincaré, 1913, p. 11).

E ainda: “Pelo fato de que lhe damos um nome, nós afirmamos implicitamente que o objeto existe (isto é, está livre de contradição) e assim ele está completamente determinado” (Poincaré, 1913, p. 92). Fica evidente que, para Poincaré, se um objeto é passível de definição significa que é não-contraditório e, uma vez que o objeto foi definido, pode-se afirmar que existe. Vale frisar que, conforme Poincaré, só existe depois de ter sido definido. Nada poderia ser mais

¹¹⁴ Fica evidente, assim, a conexão, no que diz respeito a este tópico, entre a tese de Poincaré e aquela defendida por Kant. Basta lembrar que para Kant a matemática se faz por construção de conceitos e, por isto, somente ela possui genuínas definições.

¹¹⁵ Percebe-se que se trata do procedimento inverso àquele utilizado na Árvore de Porfírio.

distante da posição realista que assume Frege e, neste aspecto, também Russell, com quem Poincaré fundamentalmente polemizou.

Em outras palavras, uma vez realizado o processo de construção pode-se afirmar que determinado objeto existe, afirma Poincaré. E, se existe, está livre de contradição. Este ponto de vista permite aproximar, de certo modo, a concepção de Poincaré daquela de Hilbert. Contudo, vale lembrar que o outro lado da moeda também é válido para Hilbert, ou seja, se é possível afirmar que é consistente, então é possível afirmar que existe. Para Poincaré, se existe é consistente. Além disto, a noção de construção não faz parte do arcabouço conceitual desenvolvido por Hilbert para fundamentar a matemática.

A definição por postulado, por sua vez, requer previamente uma prova de existência do objeto a ser definido. Somente assim poderá ser assumida a não-contradição dentro do sistema. Surge aqui uma interrogação: se a existência depende da definição como, agora, exigir-se-á a prova ontológica antes de definir? De fato, Poincaré parece contradizer-se em vários pontos. Mas talvez seja possível salvá-lo desta acusação.

A prova ontológica, neste caso, pode ser compreendida simplesmente como uma prova de consistência. Uma vez comprovada a ausência de contradição, será possível estabelecer uma adequada definição. Definições de entidades contraditórias seriam, também, contraditórias. Portanto, ilegítimas. O que Poincaré afirma é o seguinte:

Mas nós temos ainda um outro tipo de definições, as definições por postulados; geralmente nós sabemos que o objeto a definir pertence a um gênero, mas quando se trata de enunciar a diferença específica, esta não será enunciada diretamente mas com a ajuda de um “postulado” ao qual o objeto definido deverá satisfazer. É assim que os matemáticos podem definir uma quantidade x por um equação explícita $x = f(y)$, ou por uma equação implícita $F(x,y) = 0$. A definição por postulado não tem valor se não for demonstrada a existência do objeto definido; em linguagem matemática, isto quer dizer que o postulado não implica contradição; não se tem o direito de negligenciar esta condição... (Poincaré, 1913, p.90).

Parece haver aqui mais um ponto de aproximação entre as posições de Poincaré e de Hilbert. Afinal, se Poincaré assume a possibilidade de definir através de postulados não estaria afirmando algo semelhante a Hilbert quando este declara que os axiomas são meios de definir? Porém, certamente Poincaré não privilegiava a matemática postulacional defendida por Hilbert. Ou ainda, Poincaré

não tinha uma visão da matemática como axiomática, mas como genético-construtiva.

Abre-se um parêntese para fazer uma rápida aproximação entre definição e demonstração no que diz respeito à fundamentação oferecida por Poincaré. Aqueles que defendem um ponto de vista realista¹¹⁶ privilegiam o acréscimo de postulados¹¹⁷ em seu sistema, afere Poincaré. Isto nem sempre auxilia a atividade do matemático. Por este motivo, os pragmatistas visam outra maneira de demonstrar. No lugar de introduzir um número exorbitante de axiomas e postulados, preferem assumir como legítimo o raciocínio por recorrência¹¹⁸. Seria este o método mais eficiente de demonstração matemática, conforme Poincaré.

Para Poincaré, não somente a definição permite assumir a existência. Para que se possa atribuir existência aos entes matemáticos, três são os critérios que devem ser observados. O primeiro deles, conforme já foi exposto, é a consistência. O segundo – aquele que recebeu uma série de críticas – é que a definição deve ser efetuada em um número finito de palavras. O terceiro, por sua vez, é que as definições devem ser feitas de modo predicativo.

A condição que diz que uma definição deve ser efetuada em um número finito de palavras é algo, no mínimo, controverso. A este critério exposto por Poincaré, Da Silva faz a seguinte observação: “Tomemos, por exemplo, a restrição que exige que as definições matemáticas tenham um número finito de palavras. Como se alguém alguma vez tivesse logrado definir o que quer que seja com um número infinito de palavras!” (Da Silva, 1989, p. 30).

Acredita-se que Poincaré impôs esta exigência ao renegar a definição de número natural de Russell. Russell pretendeu definir os números naturais através do princípio de indução, ou melhor, afirmou que o princípio de indução não é, em

¹¹⁶ Com esta afirmação Poincaré visa criticar Russell.

¹¹⁷ Mas, em realidade, Poincaré equivocou-se a respeito visto que o realismo não postula e, sim, apresenta hipóteses.

¹¹⁸ “Raciocínio por recorrência” pode ser lido como “princípio de indução matemática”. A base sobre a qual opera a indução matemática é o raciocínio por recorrência. Mais do que legítimo, Poincaré afirma ser este o mais importante princípio matemático: “Em *La Science et l’Hypothèse*, Poincaré define as operações de adição e multiplicação, assim como demonstra algumas de suas propriedades – respectivamente: associatividade, comutatividade e distributividade – através do que ele denomina “raciocínio por recorrência”. Utilizando a operação de adição como exemplo, Poincaré principia por supor como já definida a operação $x + 1$ (adição do número 1 a um número qualquer x). Em seguida, pretende definir a operação $x + a$. Para tanto, supõe como já definida a operação $x + (a - 1)$. Então, a operação $x + a$ será definida pela igualdade $x + a = [x + (a - 1)] + 1$. A definição é realizada, então, por recorrência” (Engelmann, 2002, p. 28).

realidade, um princípio e sim a própria definição de número natural. A isto Poincaré não poderia condescender: para Poincaré, a indução matemática é o exemplo legítimo de juízo sintético *a priori* e, além disto, é o método mais eficiente de demonstração do qual se pode dispor. Em relação à crítica a Russell, Poincaré afirma:

A existência de semelhantes princípios é uma dificuldade para os logicistas intransigentes; como eles pretendem escapar? O princípio de indução completa, dizem eles, não é um axioma propriamente dito ou um juízo sintético *a priori*; é simplesmente a definição de número inteiro. É, então, uma simples convenção (Poincaré, 1905, p. 818).

Ou ainda:

... o princípio de indução não tem o significado de que todo número inteiro pode ser obtido por adições sucessivas; significa que para os números que podem ser obtidos por adições sucessivas, pode-se demonstrar uma propriedade qualquer por meio de recorrência. Um número pode ser definido por recorrência; sobre este número pode-se raciocinar por recorrência; estas são duas proposições distintas. O princípio de indução não nos ensina que a primeira é verdadeira, ele nos ensina que a primeira implica a segunda (Poincaré, 1905, p. 835).

Neste sentido, Poincaré fez uso do artifício acima descrito: definir em um número finito de palavras seria, então, uma maneira de justificar a impossibilidade de considerar a indução enquanto definição dos números naturais? Exigir que a definição seja efetuada em um número finito de palavras é, segundo Heinzmann, o mesmo que impor que a construção do conceito seja finita:

É verdade que este modo de ver ultrapassa os textos explícitos, mas confirma e explica, por outra parte, a expressão “langagière” que dá Poincaré à identificação pragmática da ontologia com a epistemologia: para o pragmatista um indivíduo “não existe antes que ele seja pensado... por um sujeito pensante”¹¹⁹ e quando ele é suscetível de ser definido “em um número finito de palavras”¹²⁰. E um conceito que não é suscetível não é admissível porque não pode ser pensado. Parece, então, coerente dizer, com Heyting, que a definibilidade em um número finito de palavras significa (em um sentido textual) a construtibilidade finita. Assim, poder-se-á enumerar, característica do infinito denumerável que deveria ser reforçada. A interpretação de Borel me parece ir bem ao encontro desta: um conjunto só é admissível se ele é efetivamente enumerável, isto é, se é possível indicar “com a ajuda de um número finito de palavras, um procedimento seguro que atribui sem ambigüidade uma posição determinada a cada um de seus elementos”¹²¹ (Heinzmann, 1985, pp. 26-27).

¹¹⁹ POINCARÉ, 1913, p. 87.

¹²⁰ Id., *ibid.*, p. 85.

¹²¹ BOREL, 1928, p. 446.

O princípio de indução é o que melhor caracteriza a matemática, conforme Poincaré, porque através dele passa-se de enunciados particulares a enunciados gerais. A lógica procede justamente ao contrário, afirma Poincaré: principia por leis gerais e conclui casos particulares. Para Russell, por sua vez, não é este o papel da indução matemática:

(...) é simplesmente um meio de passar de uma proposição geral a outra. Nossas premissas são: primeira, que determinada propriedade pertence a 0; podemos admitir que esta premissa é particular; segunda, que *todo* número finito n é tal que, se n tem a propriedade citada, também $n+1$ tem; esta premissa é geral. A conclusão é que todo número finito tem a propriedade citada; mas esta conclusão tem exatamente o mesmo grau de generalidade que nossa segunda premissa. O aparente passo do particular para o geral é sugerido pelo esquecimento de nossa segunda premissa (Russell, 1910, p. 101).

Importa destacar que para Russell a indução matemática é utilizada para definir os números naturais pois, se uma dada propriedade pertence ao número 0 e também ao sucessor imediato de qualquer número que tenha a propriedade em questão, pertencerá a todos os números naturais¹²². Obviamente este procedimento é válido somente para os números finitos. Considere-se a seguinte definição de sucessor: “o sucessor do número de termos da classe a , juntamente com x , em que x é qualquer termo que não pertence à classe”¹²³. Através da operação de adicionar um número a outro não é possível alcançar a cadeia dos números até o infinito.

Mas há ainda outro aspecto que corrobora essa defesa de Russell: os números irracionais, por exemplo, não podem ser encontrados através da indução matemática, pois a aplicação da operação sucessor a qualquer número inteiro resulta sempre em outro número inteiro. Portanto, afirma Russell, a indução não dá conta da matemática, pois do infinito ela não pode tratar. Em *The Principles of Mathematics* Russell faz referência ao método utilizado para definir os números explicitando passos. São eles: 1) a partir de Cantor deu-se início ao tratamento dos números infinitos; 2) a definição de adição aritmética é obtida por meio do cálculo lógico; 3) a definição de outros números – finitos – pode ser obtida da mesma forma que se obteve a definição de 0 e 1¹²⁴.

¹²² Portanto, neste sentido, “número natural” e “número indutivo” são duas expressões diferentes que designam o mesmo conceito. Não entra em questão, aqui, a indução transfinita.

¹²³ RUSSELL, 1981, p. 29.

¹²⁴ “Os logicistas, por considerarem a indução a própria definição dos números naturais necessitam, inicialmente, demonstrar a validade de tal raciocínio em termos estritamente lógicos.

A terceira condição que permite afirmar a existência é a predicatividade. Definições predicativas são aquelas que não utilizam no *definiens* o termo que aparece no *definiendum*, ou seja, o termo a ser definido não pode ser utilizado em sua definição. Este tópico será tratado na próxima seção.

3.3. Definições Predicativas

O *definiens* deve ser composto por termos que não apareçam no *definiendum*. Esta é uma das regras que devem ser seguidas para que seja possível obter definições apropriadas. E esta exigência – conforme pode ser lido no segundo capítulo desta tese – encontra-se, de certo modo, já em Aristóteles. Aliás, trata-se de uma posição assumida por grande parte – senão por todos – daqueles que se dedicaram ao tema.

Isto vale também para Frege. Frege exigiu das verdadeiras definições que elas não fossem circulares. E não é de outra forma que está constituído o seu sistema lógico-filosófico. O programa logicista foi organizado de modo a preservar o maior rigor possível e, para tanto, a não circularidade no âmbito das definições teve que ser mantida.

Porém, é justamente a partir do Axioma V, introduzido por Frege, que Poincaré dá início à polêmica relacionada à circularidade. Mas é Russell quem aponta para a contradição no sistema fregeano – fato que se deduz do Axioma V que assume que toda propriedade determina um conjunto – e para barrar tal problema propõe a conhecida teoria dos tipos¹²⁵. Poincaré, por sua vez, propõe que a partir daí toda definição – tanto no âmbito da matemática quanto da linguagem natural – seja feita respeitando o preceito da não-circularidade. A este tipo de definição Poincaré denomina predicativa. Russell acaba por concordar

Já Poincaré, por negar a identidade entre matemática e lógica, considera a indução um princípio matemático e o resultado de uma intuição. Portanto, não tem necessidade lógica de justificá-lo” (Kneale, 1962, p. 473).

¹²⁵ Foge do assunto principal desta tese a explicação referente à teoria dos tipos. Mas convém citar ao menos duas fontes bibliográficas que clarificam o funcionamento da teoria: Chateaubriand Filho (2002) e Chihara (1973).

com Poincaré, assumindo que definições predicativas isentam a matemática de paradoxos.

Conforme já foi dito, a condição de existência dos entes matemáticos é, do ponto de vista de Poincaré, a definibilidade: só existe aquilo que foi definido. Porém, esta é uma condição necessária, mas não suficiente. Para tornar-se suficiente, é preciso que a definição seja predicativa. Definir predicativamente é definir uma entidade observando o princípio do círculo vicioso, ou seja, é definir sem mencionar a totalidade da qual a entidade faz parte. Portanto, definições impredicativas são aquelas que definem uma entidade em função de uma classe a qual tal entidade pertence.

Um exemplo de definição que Poincaré considerou impredicativa é a definição de número natural como número indutivo – definição esta formulada por Russell. O conjunto dos números indutivos é definido como intersecção de classes recursivas: $\forall x [\text{Ind}(x) \leftrightarrow \forall \varphi \{ \varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)) \} \rightarrow \varphi(x)]$. Neste caso, aquilo que define os números naturais está sendo usado para definir, também, os números indutivos. A aparente circularidade encontra-se no fato de que a propriedade “ser indutivo” é ela mesma um valor de uma variável ligada por um quantificador universal.

Convém observar, inicialmente, uma das caracterizações de círculo vicioso, apresentada por Russell: “Nenhuma totalidade pode conter membros definidos em termos desta totalidade” (Russell, 1908, p. 163). Percebe-se, assim, porque Russell prontamente concordou com Poincaré no momento em que este exigiu que definições predicativas fossem efetuadas quando o que se objetivasse era barrar paradoxos. Russell apresentou esta descrição de círculo vicioso com o intuito de complementar uma das definições de impredicatividade de Poincaré. Inicialmente, Poincaré afirmou apenas que definições impredicativas são aquelas que encerram em si um círculo vicioso. Para Russell, faltou definir “círculo vicioso”. Mas há uma definição apresentada por Poincaré que, além de esclarecer no que consiste uma circularidade, lança mão de um critério que a proíbe:

A definição de um conjunto E é predicativa, se ela pode ser formulada sem introduzir a noção do próprio conjunto E. Sem o que a definição de E conterá um círculo vicioso; não se pode definir E pelo próprio conjunto E. Uma definição não-predicativa de um conjunto E torna-se predicativa, caso se exclua o conjunto E do *definiens* (Poincaré, 1906a, pp. 40 e 42).

Percebe-se, então, a correlação entre definições impredicativas e o princípio do círculo vicioso: uma vez respeitado o princípio do círculo vicioso, as definições terão sido efetivadas de modo a não gerarem paradoxos. Porém, não somente o círculo vicioso é o responsável pela geração de paradoxos.

Poincaré fez a distinção entre dois diagnósticos a partir dos quais poderiam surgir contradições. O primeiro é o princípio do círculo vicioso e o segundo é a suposição do infinito enquanto atual. É interessante destacar que Russell concordou com Poincaré em relação aos dois diagnósticos¹²⁶. Quem aponta para esta curiosa posição de Russell é Feferman:

Em seu artigo *Os Paradoxos da Lógica*, Russell rapidamente aceita ambos diagnósticos de círculo vicioso e apresenta a objeção ao infinito completado como o ponto de partida para seu avançado trabalho [*Essays in Analysis*, 1973] em definições de classes predicativas versus impredicativas (Feferman, 2005, p. 2).

Conforme já foi dito, Poincaré acredita que as antinomias acabam por ser produto de um modo particular de encarar a existência dos entes matemáticos:

É a crença na existência do infinito atual que tem dado nascimento às definições não predicativas. Eu me explico: nestas definições aparece a palavra “todos”, (...). A palavra “todos” tem um sentido bem claro quando se trata de um número finito de objetos; para que ela tivesse ainda um, quando os objetos são em número infinito, seria necessário que houvesse um infinito atual. De outro modo, *todos* estes objetos não poderiam ser conhecidos como colocados anteriormente a sua definição e, então, se a definição de uma noção N depende de todos os objetos A, ela pode ser considerada um círculo vicioso, se entre os objetos A existe um que não pode ser definido sem fazer intervir a própria noção N. Não há infinito atual; os cantorianos têm se enganado, e eles têm caído em contradição (Poincaré, 1906a, p. 316).

Portanto, retorna-se mais uma vez à questão da ontologia e da epistemologia enquanto elementos fundamentais para a compreensão do assunto. Em última instância, a maneira de encarar a existência dos entes matemáticos e o modo como eles se comportam é que determina o procedimento exigido no momento de ocupar-se de tais entes. A ontologia assumida é que irá delinear o tipo de definição que se aceita em matemática e, em consequência, o modo de encarar suas demonstrações. É neste sentido que se pretende defender a idéia de que o predicativismo exigido por Poincaré é reflexo de sua posição ontológica antes de ser simplesmente um expediente utilizado para impedir o surgimento de paradoxos. É esta a perspectiva que orienta as páginas seguintes.

¹²⁶ RUSSELL, 1906.

Preliminarmente, é importante destacar que o predicativismo tem uma relação – mesmo que não explícita – com a noção de construção de conceitos apresentada por Kant, confirmando assim a vinculação com problemas ontológicos. Para mostrar como isto é possível, convém relembrar alguns tópicos de semelhança e de diferença entre as concepções de Poincaré e de Kant.

Poincaré, do mesmo modo que Kant, considera que a aritmética é sintética *a priori*. Os conceitos matemáticos são construídos e tal construção é possível devido à intuição pura. Mas no que diz respeito à noção de intuição, as duas posições distanciam-se. Poincaré, apesar de nunca ter desenvolvido uma teoria sistemática sobre o assunto, remete a várias noções de intuição. A intuição pode ter um caráter sensível, mas pode também servir como fundamento de definições e de demonstrações. Neste caso, trata-se de uma espécie de intuição intelectual¹²⁷.

Estas diferenças sugerem que os termos kantianos – síntese *a priori* e intuição – utilizados por Poincaré, não são mais do que fruto de coincidência terminológica. Mas no que diz respeito à noção de construção, as idéias de Poincaré e de Kant estão mais próximas¹²⁸.

No contexto da construção de conceitos a noção de intuição de Poincaré está restrita à individualidade – característica marcante da noção kantiana de intuição. Porém, a noção de “construção de conceitos” de Poincaré ganha, de certo modo, um aprimoramento em relação à noção kantiana. Conforme visto no capítulo precedente, para Kant “construir um conceito é apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde” (Kant, 1996, B741, p.430). Mas, afinal, que significado poderá ter esta enigmática descrição de construção? O que significa apresentar *a priori* a intuição que corresponde a um conceito? Em realidade, não há, na fundamentação kantiana da matemática, um critério de construtibilidade.

Pois bem, Raggio oferece uma resposta a esta questão¹²⁹. Para Raggio, o predicativismo é a recepção da teoria kantiana dos conceitos: “Como se sabe, mas não o suficiente, sua teoria [de Poincaré] das definições predicativas é a extensão

¹²⁷ Poincaré afirma, inclusive, que a intuição é o que fundamenta, em certo sentido, as regras da lógica formal.

¹²⁸ Conforme Raggio, a recepção de Poincaré da teoria kantiana dos conceitos não pode ser visualizada nem na noção de intuição nem na de síntese *a priori*. É na noção de “construção” de conceitos matemáticos que Poincaré aproxima-se de Kant.

¹²⁹ Este é um resultado da pesquisa realizada durante o mestrado que pode ser lido na dissertação de Engelmann (2002).

natural da noção kantiana da construção matemática no âmbito da abstração conceitual” (Raggio, 1978, p. 9).

Em outras palavras, o critério que falta à posição de Kant é apresentado por Poincaré, qual seja, que definições devem ser feitas de modo predicativo. A intuição pura que corresponde ao conceito estaria refletida apenas nas definições predicativas. No caso das impredicativas, tal construção não poderia ocorrer de modo efetivo uma vez que este tipo de definição não poderia refletir nenhuma intuição pura do conceito.

A teoria de Poincaré das definições predicativas retoma um pressuposto que aparece em Kant, a saber, que os conceitos matemáticos não passam por um processo de análise, mas de síntese por construção. Somente o processo de síntese, afirma Kant, permite a ampliação do conhecimento. Contudo, falta a Kant um critério formal de construtibilidade – pois a síntese arbitrária e a exibição na intuição pura não podem ser considerados critérios de definibilidade. O critério que falta à posição de Kant é apresentado por Poincaré, qual seja, que definições devem ser feitas de modo predicativo. A singularidade, já que não a intuição pura, que corresponde ao conceito, estaria refletida apenas nas definições predicativas. A teoria predicativista é o critério acrescentado por Poincaré¹³⁰.

Deste modo, acredita-se que a tese predicativista está circunscrita aos limites da postura construtivista, ou seja, a posição assumida em relação à existência em matemática é o que determina, em última instância, a crença na viabilidade da restrição predicativista. Esta reflexão apóia-se tanto na leitura de Gödel (1981) quanto na de Heinzmann (1985). Este último considera que o predicativismo decorre essencialmente da postura pragmatista de Poincaré:

Introduzida inicialmente para evitar as antinomias da teoria dos conjuntos, a predicatividade torna-se logo o conceito chave do pragmatismo filosófico de Poincaré. Seguindo este desenvolvimento, as antinomias não representam mais do que um papel indicativo das dificuldades que implicam uma compreensão realista dos objetos matemáticos que fazem abstração do método segundo o qual estes objetos são dados. Esta crítica vem inclusive estipular que mesmo um domínio perfeito do ponto de vista técnico, isto é, em primeiro lugar a demonstrabilidade da não-contradição, não mudará em nada a incapacidade do princípio do realismo em explicar o *sentido* de um teorema (Heinzmann, 1985, p. 77).

¹³⁰ Para Poincaré, somente definições predicativas são construtivas pelo fato de que através do *definiens* é possível obter uma “explicação” sobre o *definiendum*. As definições impredicativas, por sua vez, são estéreis.

Ainda que não com o propósito idêntico ao de Heinzmann, Gödel realizou uma apurada análise do princípio do círculo vicioso e apontou para o fato de que ele pode ser considerado sob perspectivas distintas. Neste sentido, o platonismo e o construtivismo destinaram aos paradoxos e, conseqüentemente, à restrição predicativista, distintas considerações.

Cabe salientar, inicialmente, que em relação ao tratamento destinado aos paradoxos as posições de Russell e de Poincaré acabam por ir ao encontro uma da outra. Se Russell assumiu o ponto de vista realista em relação à existência matemática não significa que tal posição tenha perdurado quando se deparou com o paradoxo que levou seu nome. Gödel esclarece que a teoria de Russell da inexistência de classes¹³¹ acaba por abrir a possibilidade de considerá-lo uma espécie de construtivista ou, pelo menos, não um realista no sentido estrito da palavra.

A análise de Gödel em relação à circularidade – em *La Lógica Matemática de Russell* – é de extrema clareza. Gödel apresenta três versões do princípio do círculo vicioso seguindo a exposição que Russell faz de tal princípio. Na primeira delas o processo está colocado em termos de definibilidade. Já a segunda versão apresenta a noção de “envolver”, ou seja, membros que envolvem a totalidade na qual estão contidos devem ser excluídos. Caso contrário, cair-se-ia em contradições. A terceira manifesta a noção de “pressuposição”¹³².

A primeira versão do princípio do círculo vicioso, destacada por Gödel, é esta: “nenhuma totalidade pode conter membros definíveis unicamente em termos da totalidade” (Gödel, 1981, p. 306). Conforme Gödel, o princípio do círculo vicioso – quando estabelecido em termos de definibilidade – só tem sentido para aqueles que defendem uma ontologia de tipo construtivista em relação aos entes matemáticos, ou seja, para aqueles que acreditam que um objeto ou um ente matemático existe somente depois de efetuada sua definição. Em outras palavras, para aqueles que crêem que é a definição a responsável pela construção ou criação

¹³¹ A *no-class theory* de Russell nada mais é do que a suposição necessária para falar de funções proposicionais sem falar de classes. Conforme Russell: “A tese da teoria sem classes é que todas as proposições significantes a respeito de classes podem ser consideradas proposições que concernem a todos ou a quaisquer de seus membros, isto é, aos termos que satisfazem qualquer função proposicional ϕx ” (Russell, 1906, p. 636).

¹³² No que diz respeito a esta terceira versão, Gödel apresenta ainda a distinção entre a pressuposição de existência – versão ontológica – e a pressuposição de cognoscibilidade – versão epistemológica (Gödel, 1981, p. 309). Para uma melhor compreensão do tópico, ler Chateaubriand Filho (2002, p. 349).

de tais entidades. Gödel afirma que o mesmo problema não existe para quem assume uma postura realista:

Se, entretanto, se trata de um problema de objetos que existem independentemente de nossas construções, então não há nada de absurdo na existência de totalidades que contenham membros que podem ser descritos (isto é, caracterizados univocamente) somente por referência a esta totalidade (Gödel, 1981, p. 309).

Os axiomas do formalismo também “implicam a existência de números reais que somente são definíveis neste formalismo por referência a todos os números reais” (Gödel, 1981, p. 308). A questão é como se interpreta a palavra “todos”. Caso “todos” seja interpretada como uma conjunção lógica infinita pode haver, de fato, um círculo vicioso. Afinal, deste modo se estaria fazendo referência à totalidade cada vez que se fizesse a um dos membros que a compõe¹³³. Pelo menos é o que admitiriam aqueles que acreditam que as entidades matemáticas são construídas através de alguma atividade e, portanto, não existem como entes independentes do sujeito que com elas trabalha.

Para Gödel, o papel das definições é, na melhor das hipóteses, o de identificar as entidades. Portanto, se definir significasse gerar esbarrar-se-ia, de fato, na presença de um círculo vicioso. Agora, se definir quer dizer classificar, determinar ou distribuir, tal problema careceria de sentido. Raggio menciona a distinção para a qual Gödel aponta:

Assim como Gödel mostrou a impossibilidade de reduzir a matemática à aritmética via sistemas axiomáticos, assim também criticou outras formas de reducionismo. A mais importante é a teoria predicativa de conjuntos, sugerida por Poincaré e desenvolvida por Russell, que proíbe definir um conjunto utilizando um quantificador cujo domínio contém já este conjunto, pois haveria um círculo vicioso. Gödel assinala que definir pode significar gerar: o círculo neste caso é vicioso pois para gerar um conjunto deveríamos tê-lo previamente. Mas definir, acrescenta Gödel, pode significar também determinar, em cujo caso o círculo não é vicioso porque algo pode determinar-se a si mesmo. Na teoria predicativa de conjuntos há tantos conjuntos quantos possamos gerar um após o outro – tempo! – sem cair em círculos viciosos. Frente a esta versão exata do conceitualismo kantiano Gödel dirá, reafirmando sua tese platônica, que há tantos conjuntos quantos possamos *determinar* partindo de um domínio em si de conjuntos (Raggio, 1981, p. 72).

Ressaltando o que já foi dito, caso se esteja impelido a concordar com a posição de Gödel, qual seja, a de que as definições não criam objetos, mas os classificam, torna-se possível “salvar” grande parte da matemática atual. A teoria

¹³³ Conforme Gödel, Carnap e Langford, por exemplo, interpretam “todos” no sentido de analiticidade, necessidade ou demonstrabilidade (Gödel, 1981, p. 308).

dos conjuntos e a análise¹³⁴ são exemplos de ramos da matemática que lidam constantemente com a impredicatividade e, mais do que isto, não podem dela abrir mão. Peruzzi parece concordar plenamente com Gödel:

A questão teve um direto significado filosófico. Quem adota o ponto de vista platônico pensa que a matemática é uma ciência que estuda um mundo de entidades ideais, de maneira que toda demonstração de um teorema é uma descoberta, semelhante à descoberta da América, e toda definição de um conceito é uma caracterização de uma propriedade objetiva: não introduz um *novo* construto, mas individua alguma coisa *pré-existente*. Quem, pelo contrário, como um intuicionista, não pensa assim, é levado a pressupor somente aquilo que postula como intuitivamente dado ou, com base em construções precedentes, tem demonstrado que existe – e temos apenas visto como isto está relacionado também às definições (Peruzzi, 1997, p. 118).

As divergências ontológicas aqui em jogo parecem tornar impossível qualquer consenso em relação aos paradoxos e a outros problemas congêneres levantados em filosofia da matemática. Poincaré estava ciente disto quando afirmou que jamais haveria concordância em relação à polêmica frente aos paradoxos pelo fato de que “pragmatistas” e “cantorianos” estavam falando línguas distintas.

Mais ainda, pode-se afirmar que a falta de anuência entre realistas e construtivistas se dá não somente em relação a problemas decorrentes de paradoxos, mas à fundamentação da matemática de modo geral. De fato, o que se quer aqui defender é que não há possibilidade de concordar com um ou outro ponto de vista sem tomar posição em relação à ontologia pressuposta como base de ambas as fundamentações. São posições divergentes devido àquilo que está na base de cada uma das teorias, ou seja, realistas assumem a existência prévia das entidades com as quais lidam enquanto que para os construtivistas nada existe antes de passar por um processo de criação. Sendo assim, todas as divergências decorrem destas fundamentações antagônicas.

As duas posturas – dos “pragmatistas” e dos “cantorianos” – diferem em muitos aspectos. Um deles diz respeito à dicotomia “intensão” versus “extensão”, conforme Poincaré. Os “cantorianos” apresentam o “ponto de vista da compreensão”, ou seja, quando pretendem delimitar um conjunto tomam como ponto de partida a existência de objetos que antecedem a formação do conjunto e

¹³⁴ No que diz respeito à teoria dos conjuntos, um bom exemplo é o próprio paradoxo de Russell. Quanto à análise, um exemplo de definição impredicativa é a definição de número real de Dedekind.

então classificam tais objetos de acordo com determinadas propriedades. Os “pragmatistas”, por sua vez, acreditam que conjuntos são gerados sempre pelo acréscimo de novos elementos e este processo pode ter seguimento *ad infinitum*. Em outras palavras, os “pragmatistas” constroem conjuntos de forma extensional. Acrescentar novos membros a um conjunto requer que se observe a regra que permitiu gerar o conjunto em questão.

Fica a sugestão de que o predicativismo, muito antes de ser considerado uma solução para os paradoxos, deve ser pensado como resultado do pragmatismo filosófico que aceita apenas objetos construídos a partir de uma regra. Somente a partir daí torna-se possível introduzir os nomes em uma dada linguagem.

Conforme foi dito até aqui, assumir que definições são as responsáveis pela criação dos entes matemáticos, além de não ser objeto de consenso, é algo que envolve vários problemas. É importante, então, retornar à pergunta colocada no primeiro capítulo desta tese, qual seja, “qual é o papel das definições no âmbito das ciências”? Em outras palavras, as definições exercem uma função ontológica ou apenas epistemológica?

Que sua função seja epistemológica parece estar claro. Afinal, definições auxiliam no acréscimo de conhecimento. Mas teriam elas algum valor ontológico?

Em *Logical Forms*, Chateaubriand afirma:

A noção de definibilidade é, principalmente, uma noção epistemológica que compartilha muitas das características da noção de prova. Se dizer que uma entidade é definível em termos de algumas entidades é dizer que ela pode ser identificada através destas entidades de um modo específico, então não se segue disto que a entidade em questão dependa ontologicamente das entidades que estão sendo usadas na definição (Chateaubriand Filho, 2002, p. 348).

Parece que Chateaubriand concordaria com Gödel quanto ao fato de que uma definição o que faz é classificar ou identificar objetos. A idéia é de inspiração aristotélica também pelo fato de que definições, além de não dizerem respeito à existência, compartilham com demonstrações a característica de desempenharem uma função epistemologicamente fundamental. Leia-se o que Chateaubriand diz a respeito:

... uma definição pode servir para identificar alguma coisa no sentido de individualizá-la e pode, também, servir para caracterizar a essência de alguma coisa. Em qualquer um dos casos não está em questão nem a criação de alguma coisa nem a justificação de sua existência. A existência é pressuposta e uma definição impredicativa é tão boa quanto uma predicativa para identificar algo (...). Uma definição predicativa pode nos dar uma identificação mais direta ou, em

muitos casos, pode nos dar uma identificação mais informativa, isto é, ela pode ser epistemologicamente mais rica (Chateaubriand Filho, 2002, p. 353).

Esta posição parece ser a mais coerente. De fato, definições auxiliam no processo de conhecimento e não há nada que leve a crer que sejam responsáveis pela criação das entidades que definem. Portanto, a tese que se pretende aqui defender é endossada pelas posições assumidas tanto por Gödel quanto por Chateaubriand.