1
Teoria da Definição: alguns apontamentos

Existem duas perguntas – básicas e nada triviais – a partir das quais se acredita ser possível encontrar respostas para as questões mais fundamentais que auxiliam na elaboração de uma teoria da definição. São estas: "o que se define?" e "como se define?". Não são poucos os nomes que podem ser citados que, no decorrer da história da filosofia, tentaram responder a estas duas questões. Mas talvez sejam poucos aqueles que conseguiram aproximar-se de uma resposta satisfatória.

Alcançar consenso a respeito daquilo que pode ser considerada a definição de um termo, de uma coisa ou de um conceito em uma linguagem qualquer – formal ou não – não é tarefa simples. Talvez haja anuência pelo menos em relação a um aspecto, qual seja, ao fato de que a inserção de definições em qualquer área requer que certas regras de introdução sejam obedecidas. Os preceitos definicionais não sofreram modificação drástica desde que Aristóteles fixou-os nos *Segundos Analíticos*, exceto, é claro, o primeiro deles. Convém mencioná-los[1]:

1) Uma definição precisa fornecer a essência daquilo que está sendo definido.
2) Uma definição não deve ser circular.
3) Uma definição não deve ser negativa quando ela pode ser positiva.
4) Uma definição não deve ser expressa em linguagem figurativa ou obscura.

Listando as exigências primeiras que Aristóteles inseriu na discussão sobre a teoria da demonstração – que impõe a observação de seus princípios, ou seja, de axiomas, definições e hipóteses – na qual a lógica atua auxiliando a matemática pretende-se, no momento, apenas colocar a seguinte questão: haveria um meio de

[1] A referência a tais regras é tradicional em manuais como, por exemplo, o de em Suppes (1957). Para um comentário mais extenso das normas aristotélicas, indica-se a leitura de Peruzzi (1997). Na primeira seção do segundo capítulo desta tese encontra-se uma discussão mais elaborada de tais regras.

considerar o tema das definições sem recorrer às posições já tão visadas como são, por exemplo, as de Aristóteles ou Leibniz? Ou ainda: seria possível esboçar uma "atual" teoria da definição que não remontasse as mesmas questões e aos mesmos problemas já tratados pelos gregos e rememorados nos séculos XVII e XVIII?

Uma resposta positiva a tal pergunta seria, sem dúvida, insolente. De fato, a maioria das questões que não podem deixar de ser tratadas quando o que se quer é delinear as linhas gerais que permitem falar de uma "teoria da definição" são variações de questões que já foram levantadas por Aristóteles. Um exemplo claro é a caracterização da metodologia empregada na elaboração de "boas" definições: ainda perdura a classificação por gênero próximo e diferença específica. Outro exemplo diz respeito ao legado de Porfírio que não pode ser omitido quando se consideram os problemas aqui visados.

Sendo assim, convém admitir desde já que a pretensão destas linhas concernentes a tão complicado tema não é refletir originalidade no sentido de propor um tratamento para as definições que até agora não tenha sido levantado por algum filósofo. Antes, é interessante salientar que sem o apoio de clássicos escritos – de Platão a Aristóteles, de Leibniz a Kant e de Frege a Hilbert ou Poincaré – muitas questões não teriam sido aqui levantadas.

Alguns dos problemas envolvidos no tratamento da natureza das definições, do método adequado de definir e do papel que elas desempenham nas ciências não são aqui mais do que atualizações das questões que atormentaram lógicos e filósofos de todos os tempos. Urge, então, comentar algumas destas questões, que serão abordadas com maior ênfase no decorrer desta exposição.

Primeiramente, parte-se para uma possível resposta à pergunta que foi colocada no início desta exposição, a saber, "o que se define". Atenta-se para a seguinte observação de Robinson:

> Se um homem diz que "toda definição é nominal", ele pode talvez querer dizer que a palavra 'definição' nunca tenha, no que diz respeito ao seu uso passado, sido aplicada a qualquer processo que não um processo que diz respeito a palavras. Se assim for, ele estaria fazendo uma afirmação histórica atual sobre o uso no passado. Está claro que esta sua afirmação, se tivesse este sentido, seria falsa. Centenas de pessoas têm aplicado, no passado, a palavra "definição" a operações e afirmações que não eram sobre palavras. Nossa lista de definições de definição mostra que, enquanto alguns bons escritores têm usado a palavra "definição" para referir-se a operações que tratam de palavras (Locke, Mill), outros bons escritores têm usado

para referir-se a operações que tratam de coisas (Aristóteles, Milton), e outros a operações que tratam de conceitos (Kant) (Robinson, 1954, pp. 9-10)[2].

A opção pelo que se define, se são nomes, coisas ou conceitos depende principalmente da posição ontológica que se adota. Os adeptos do essencialismo aristotélico, por exemplo, acreditam na possibilidade de encontrar aquilo que mostra "o quê" das coisas. Consequentemente, além de distinguirem, através de uma definição, uma coisa das demais, estariam mostrando aquela caracterização que lhe é mais básica e central, ou seja, além de lhe conferirem uma identidade estariam apontando para o seu caráter distintivo. É este o papel fundamental de uma definição essencial, qual seja, apontar tanto para a identidade quanto para a unicidade daquilo que está sendo definido. Encontrar aquela característica que torna único um determinado objeto ou ente, é o mesmo que exibir sua definição real. Portanto, definições reais individualizam no sentido de que, por uma marca característica, mostram que um determinado ente não pode ser confundido com qualquer outro. Naturalmente isto supõe que o ente em questão já é dado. Caso esta suposição não fosse levada em conta, poder-se-ia ter definições de coisas que não existem como, por exemplo, de "quadrado redondo" ou de "centauro".

Mas existe uma corrente que a esta se opõem. De fato, pressupor a possibilidade de exibir a essência de algo é, por vezes, uma tarefa difícil, senão impossível, ao menos entre os nominalistas. Para estes, um universal – a essência em questão – não é uma entidade real e nem pode ser encontrado em uma; os universais não seriam nada mais do que nomes, termos, sons...[3]

Na impossibilidade de admitir que as coisas possam ser distinguidas umas das outras através de suas essências, e que estas são exibidas por meio de definições encontra-se, em primeiro lugar, a crença no fato de que qualquer tipo de definição é, em última instância, arbitrário. Afinal, se não existem essências a serem desveladas, não importa se "homem" é definido como "animal racional" ou como "bípede implume". Tanto "animal racional" quanto "bípede implume" servem para distinguir o homem do cavalo, por exemplo. Usa-se a definição que melhor convém para um determinado propósito.

---

[2] Em *Definition*, Robinson pretende apenas expor os distintos pontos de vista daqueles que se mostraram interessados em debater o tema "definições". O autor se exime de apresentar a sua posição a respeito do assunto.

[3] Nominalismo está sendo aqui caracterizado de modo muito genérico. Não se pretende distinguir as diversas formas de nominalismo que podem ser encontradas no decorrer da história da filosofia.

Peruzzi, através de um exemplo do âmbito da matemática, oferece uma razão para a teoria contemporânea da definição afastar-se do essencialismo aristotélico:

> Uma teoria pode falar de uma certa classe de coisas e também das coisas que formam oportunas sub-classes, sem que contudo seja possível definir explicitamente tais sub-classes; a teoria **Q** dos números racionais trata também dos números inteiros, mas o conjunto dos inteiros não é definível em **Q**. Este exemplo permite ilustrar um ponto paradigmático: o fato de que um conceito seja definível não é algo de absoluto, e sim uma propriedade *relativa* à teoria de fundo. Se um predicado P é eliminável em uma dada teoria T – de maneira que, para qualquer enunciado A(P) que o contenha, há um segundo, A*, que não o contém e se demonstra que A* é equivalente ao primeiro – podemos somente dizer que, *relativamente a qualquer modelo de* T, é verdadeiro o primeiro se e somente se é verdadeiro o segundo, não que a equivalência vale para qualquer teoria e para qualquer linguagem na qual podemos introduzir P.
> Por isto a teoria contemporânea da definição se afasta do essencialismo aristotélico (...), na medida em que a definibilidade de um conceito não é separada daquilo que uma teoria pode demonstrar e, portanto, se é uma teoria empírica, do seu poder preditivo. Não obstante toda definição seja relativa a uma teoria, as teorias não são, porém, ilhas separadas, por isso surge o problema da invariância das definições (e dos conceitos que estas introduzem) de uma teoria à outra (Peruzzi, 1997, pp. 112-113).

1.1. Axiomas, Definições e Hipóteses

Aristóteles distingue entre diferentes tipos de princípios na “ciência demonstrativa”: comuns e próprios. Estes são os elementos que compõe toda demonstração científica. Aos princípios comuns Aristóteles também chama “axiomas” e os princípios próprios são ou bem definições ou bem hipóteses. O propósito desta discussão é distinguir tais elementos em conformidade com as posições de Aristóteles e de Euclides. Afinal, em linhas gerais, o legado aristotélico não foi ainda suplantado, ao menos no que diz respeito a tais componentes da demonstração.

Através de uma demonstração o que se pretende é alcançar a verdade de uma proposição, ou seja, dispor da demonstração de uma proposição é algo que tem um significado bem determinado: saber que tal proposição é verdadeira. Agora, para demonstrar uma proposição – ou assegurar-se da verdade dela – é necessário levar em conta, inicialmente, um conjunto de premissas. Surge, então, uma pergunta: como é possível saber que tais premissas são verdadeiras? É necessário demonstrá-las também? Certamente tal demonstração não poderá ser exigida *ad infinitum*. Em um ponto é necessário parar. A pergunta, agora, é: onde parar?

A resposta de Aristóteles é que se deve parar em verdades necessárias, primeiras e anteriores à conclusão, ou seja, naquelas verdades que não precisam ser objeto de demonstração:

> O conhecimento demonstrativo deve descansar em verdades básicas necessárias, porque o objeto do conhecimento científico não pode ser distinto do que é. Agora, os atributos essencialmente vinculados a seus sujeitos se vinculam a eles por necessidade, pois os atributos essenciais são ou bem elementos da natureza essencial de seus sujeitos, ou contém seus sujeitos como elementos de sua própria natureza essencial. Os pares de opostos que incluem o último caso são necessários, porque necessariamente se encontra inerente um membro ou outro. Deduz-se disto que as premissas do silogismo demonstrativo devem ser conexões essenciais no sentido explicado, porque todos os atributos devem estar inerentes de maneira especial, ou do contrário ser acidentais, e os atributos acidentais não são necessários a seus sujeitos (Aristóteles, *Segundos Analíticos* I 6, 74^b).

A idéia de demonstração que tinha Aristóteles era, de maneira resumida, a seguinte: a demonstração é um método racional de conhecimento que deve ser rigoroso e tal rigor depende das premissas que são ponto de partida de todo argumento[4]. Portanto, tais premissas são proposições "primeiras" indubitáveis e são conhecidas como "princípios". Os princípios são proposições evidentes e é necessário que sejam assim, pois caso as demonstrações não partam de proposições reconhecidas como verdadeiras sem necessidade de demonstrá-las, não há como assegurar a verdade das proposições que delas decorrem. Mas não somente de axiomas constituem-se as demonstrações:

> Há, com efeito, três elementos na demonstração: o que se demonstra, a saber, a conclusão – um atributo que é inseparável essencialmente de um gênero -; os axiomas, isto é, axiomas que são premissas da demonstração; o gênero sujeito, cujos atributos, quer dizer, suas propriedades essenciais, nos são reveladas pela demonstração (Aristóteles, *Segundos Analíticos*, I 7, 75^b).

---

[4] Esta é uma caracterização bastante genérica. Não se pretende abordar, em pormenores, as características que distinguem a noção de demonstração de Euclides, de Platão e de Aristóteles. Basta saber que o uso de figuras, pressuposto por Platão e Euclides, foi por Aristóteles substituído pela noção de "demonstração formal", ou seja, a cadeia demonstrativa passa a ser vista como um procedimento que se limita às relações lógicas que resultam da forma das proposições. Esta noção não tem nenhuma relação com o conceito formalista de demonstração que privilegia somente aspectos sintáticos.

Subjaz a esta afirmação um elemento essencial a toda demonstração que, em seguida, Aristóteles revela: "uma definição é ou bem uma premissa ou a conclusão de uma demonstração, ou bem somente difere de uma demonstração na ordem de seus termos" (Aristóteles, *Segundos Analíticos* I 8, 76ª). Mas, se uma definição pode ser uma premissa de uma demonstração, o que a distingue de um axioma? Afinal, não está dito que uma definição não possa ser a premissa primeira de uma demonstração, ou seja, aquela premissa cuja evidência é indubitável. Cabe, então, partir para a distinção entre axiomas e definições.

Ainda nos *Segundos Analíticos*, Aristóteles esclarece que os princípios não são mais do que a parte básica e principal de toda demonstração. Agora, existem dois tipos de princípios: os princípios comuns são aqueles que não dizem respeito a uma ciência em particular; são, portanto, válidos para todas as ciências e, sendo assim, fica claro que podem ser considerados verdades lógicas. Um exemplo de princípio comum é "se duas coisas são iguais a uma terceira, então elas são iguais entre si": a conhecida lei de transitividade (A=C e B=C, então A=B) e proposições deste tipo são as que Aristóteles chama "axiomas". Os princípios próprios restringem-se ao domínio de objetos de que trata uma determinada ciência. Assim, dentre os princípios próprios encontram-se as definições. Cada ciência especifica as definições necessárias à compreensão de seu campo de atuação. Enquanto princípios, as definições devem ser vistas como os elementos básicos de toda demonstração. Afirma Aristóteles:

> Das verdades fundamentais empregadas nas ciências demonstrativas, umas são peculiares a cada ciência, e algumas são comuns, mas comuns somente em um sentido de analogia, por serem úteis somente na medida em que têm entrada no gênero que constitui o campo da ciência em questão (Aristóteles, *Segundos Analíticos* I 10, 76ª).

Além das definições, há outra classe de princípios próprios, a saber, as hipóteses. Do ponto de vista aristotélico, hipóteses devem ser entendidas como suposições de existência. Em alguns casos, além de definir deve-se supor que algo existe. Por exemplo, deve-se definir linha reta e, concomitantemente, supor sua existência. Mas nem todas as definições exigem uma suposição de existência do objeto definido. Triângulo, por exemplo, é definido como figura plana de três lados. Dele não é necessário supor a existência, mas procurar a demonstração da mesma. É importante ressaltar que a distinção entre definições e hipóteses, em termos aristotélicos, conduz à distinção nominal x real, uma vez que de uma não é exigida a demonstração de existência enquanto que da outra é.

Agora, aquilo a que Aristóteles chamava "princípios comuns" ou "axiomas", Euclides denominava "noções comuns". Apesar de não colocar nestes termos – pois Euclides, além disso, chamava "postulado" aquilo que *hoje* se denomina "axioma"[5] – esta é a distinção principal entre os elementos constituintes da demonstração. As hipóteses, por sua vez, a que frequentemente Aristóteles chama a atenção, não figuram nos *Elementos* de Euclides de modo explícito, mas na literatura os postulados euclidianos têm sido considerados como equivalentes às hipóteses aristotélicas. Isso ao menos em relação com os três primeiros postulados euclidianos, quais sejam, 1) pode-se traçar uma linha reta entre dois pontos; 2) pode-se prolongar indefinidamente uma linha reta; 3) pode-se traçar um círculo a partir de qualquer ponto e de qualquer raio. Com efeito, tais postulados podem ser vistos como hipóteses da existência de segmentos, extensões de segmentos e círculos.

Com definições, axiomas e postulados – ou hipóteses, como diria Aristóteles – pode-se proceder no intuito de demonstrar. Estes três elementos eram considerados por Aristóteles os princípios de toda demonstração e esta era realizada em uma seqüência de passos. A seqüência obedecia, "naturalmente", certa ordem[6]. Partindo de axiomas e/ou postulados, era possível chegar à proposição demonstrada, ou seja, esta proposição era o último passo da seqüência.

As proposições a serem demonstradas Euclides divide em dois grandes grupos. Primeiro, tem-se o que ele denominou "problemas". São proposições que dizem respeito a construir ou gerar figuras. Um exemplo de tal tipo de proposição é este: "Construa um triângulo eqüilátero, dado um lado". As outras proposições a

[5] Devido ao desenvolvimento do formalismo lógico e matemático, em termos contemporâneos a noção de axioma sofreu drástica modificação. Em primeiro lugar, fala-se de axiomas lógicos e axiomas não-lógicos que poderia comparar-se, seja com a distinção aristotélica entre princípios comuns ou axiomas e hipóteses, seja com a distinção euclidiana entre noções comuns e postulados. Em segundo lugar, o que antes caracterizava esta noção – a imediação, a certeza e a evidência – foi então negado. Do ponto de vista formalista, os axiomas não são nem verdadeiros nem falsos, mas são assumidos por convenção. Sendo assim, axiomas e postulados não são mais distinguidos. Agora, apesar de a liberdade ser uma característica essencial na escolha dos axiomas, certas exigências *idealmente deveriam* ser levadas em conta. São elas: 1) os axiomas devem ser coerentes para que deles não surja nenhuma contradição; 2) o sistema de axiomas deve ser completo, ou seja, de duas proposições contraditórias uma deve poder ser demonstrada; 3) os axiomas devem ser independentes; 4) os axiomas devem ser simples e em menor número possível para preservar a elegância do sistema.

[6] Aparece aqui a noção de inferência.

demonstrar são denominadas por Euclides "teoremas". Um teorema é uma proposição que afirma propriedades essenciais e, portanto, necessárias. No caso da geometria, propriedades de figuras. "A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos" é um exemplo de teorema. Em ambos os casos, antes de proceder para a demonstração, é necessário definir os termos que aparecem na proposição ("triângulo", "eqüilateralidade", ...).

Assim, no que Aristóteles e Euclides concordam é quanto à importância das definições. As definições são vistas, tanto por Aristóteles quanto por Euclides, como princípios fundamentais de toda demonstração. Porém, uma afirmação deste tipo pode ser encontrada em Aristóteles, mas nada tão explícito pode ser lido em Euclides. Deduz-se a importância que as definições têm para as demonstrações euclidianas do fato de que cada livro que compõe os *Elementos* é iniciado por novas definições, mas em nenhum momento Euclides diz o que é uma definição[7].

Aristóteles, por sua vez, concede às definições um duplo papel. Grande parte do livro II dos *Segundos Analíticos* é dedicado à investigação das definições enquanto princípios e, ao mesmo tempo, enquanto fins da ciência demonstrativa. Esta aparente contradição se dissolve caso se observe o que afirma Le Blond a respeito:

> Nós podemos dizer, então, que a definição é o resultado do trabalho científico e que ela é princípio do trabalho científico – mas 'ciência' precisa ser entendida diferentemente nestas duas proposições. Nós podemos afirmar, com Hamelin, que definição é a própria ciência, considerada como um produto acabado. Mas neste caso, como nós precisamos considerar que Aristóteles hesitou entre ciência como investigação (pesquisa) e ciência como demonstração, nós precisamos aceitar uma dualidade em seu ideal científico: por um lado, a ciência ideal é concebida enquanto uma cadeia de *fatos*, por outro, a ciência ideal é concebida enquanto uma hierarquia de *idéias*; por um lado, um ideal de *demonstração*, por outro um ideal de *definição* (Le Blond, 1979, pp. 77-78).

Definições têm, então, este papel duplo: servem como princípios demonstrativos e, ao mesmo tempo, podem ser vistas como fim de toda demonstração. Como aponta o próprio Le Blond, não há aqui nenhuma

---

[7] Esta afirmação pode ser contestada. Por exemplo, conforme B. Levi: "Euclides, com efeito, nunca se refere a uma definição como expressão da verdade de algo necessário para levar a cabo uma demonstração" (Levi, 2001, p. 92). Não se pretende aqui investigar pormenorizadamente os *Elementos* de Euclides. Para os propósitos desta exposição basta que fique claro que, tanto Euclides quanto Aristóteles, não dispensaram o uso de definições na descrição do processo demonstrativo.

contradição. Trata-se de perspectivas distintas. Para os fins desta investigação, será a primeira perspectiva a relevante.

1.2. O Papel das Definições

O importante papel que Aristóteles reserva às definições, no que diz respeito à ciência demonstrativa, ficou já estabelecido. Agora, é em um âmbito mais geral que se pretende questionar o papel das definições: não somente na lógica e na matemática, mas também nas demais ciências, o que as definições representam? Não somente em Aristóteles pode-se encontrar uma resposta a esta pergunta. Que as definições sejam importantes para o desenvolvimento das ciências, de um modo geral, parece não ser objeto de dúvidas. Porém, se a questão for investigada em seus pormenores, ver-se-á que a possibilidade de encontrar posições convergentes em relação ao papel que as definições desempenham nas ciências não é muito plausível. Considere-se, por exemplo, as posições ontológicas envolvidas.

O que se pretende a partir do levantamento desta questão é mostrar que posições ontológicas distintas conduzem a diferentes pontos de vista em relação à função das definições. Isto pode ser bem ilustrado justamente a partir da relação que se estabelece entre definição e existência. Para dar início a esta discussão, é novamente a Aristóteles que se recorre. Afinal, a relação entre definir e existir está explicitamente relatada nos *Segundos Analíticos*[8]:

> Resulta, ademais, evidente, se consideramos as maneiras de definir atualmente em uso, que a definição não demonstra que a coisa definida exista, porque ainda que na atualidade exista algo que eqüidiste de um centro, no entanto, porque terá que existir a coisa nomeada na definição? Em outras palavras, porque será esta a fórmula que define o círculo? Se poderia igualmente chamá-la a definição de um monte de cobre. As definições, com efeito, não nos dão nenhuma garantia ulterior de que a coisa definida possa existir ou de que isto seja o que elas pretendem definir; sempre cabe perguntar "por que" (Aristóteles, *Segundos Analíticos* II 7, 92^b).

---

[8] Devido à problemática inerente ao termo "existência", evita-se discutir o tópico desde o âmbito aristotélico. A passagem dos *Segundos Analíticos* foi aqui mencionada simplesmente para mostrar que a relação em questão é tratada também por Aristóteles.

Conforme Porchat Pereira, a pergunta que melhor se relaciona à definição é "o que é". De fato, é assim que Aristóteles expressa a distinção entre a afirmação de existência e a definição:

> Quando se faz referência a um complexo são estas, então, as duas questões que colocamos; a saber: para determinar objetos de investigação temos uma forma distinta de pergunta a colocar; tal como se é ou não é um centauro ou um deus. Entendo por "é ou não é", "é ou não é, sem nenhuma posterior classificação"; enquanto oposta a "é ou não é (por exemplo) branco". Por outra parte, uma vez que temos averiguado a existência de uma coisa, inquirimos pela sua natureza perguntando, por exemplo, "que é, então, Deus?", ou bem, "que é o homem?" (Aristóteles, *Segundos Analíticos* II 1, 89^b)[9].

Ora, fica claro, através desta passagem que a definição figura como um passo posterior em relação à existência. Define-se depois de conhecida a existência. Porém, não contradiz isso o que foi dito acima? De fato não, pois por um lado deve-se lembrar que foi feita acima a distinção entre a definição como fim da ciência e como princípio da demonstração. Da primeira perspectiva, a existência está antes de alcançar a definição; mas da segunda perspectiva, primeiro está a definição e depois a demonstração de existência do definido.

Acredita-se que o ponto de vista aristotélico em relação a este tópico pode ser melhor compreendido caso se retome, rapidamente, alguns traços de sua ontologia. Basta lembrar que, diferentemente de seus predecessores, Aristóteles concebe o mundo sensível, ou a Natureza, como um mundo real, múltiplo e em constante modificação. Obviamente, é a Platão que Aristóteles opõem-se quando apresenta seu ponto de vista ontológico. Para os fins que aqui interessam, isto tem uma só implicação: as coisas existem por si e em si, independentemente da classificação que se atribui a elas ou que se alcance sua essência. Portanto, a existência das coisas precede as definições. Em outras palavras, dizer "o que algo é" só é possível depois de dizer "se é". E neste caso se está diante das definições como fim da ciência.

Também em termos contemporâneos a relação entre definição e existência pode ser colocada desde duas distintas perspectivas ontológicas, mesmo que se

[9] Esta discussão pode ser lida também em Le Blond (1979). Aliás, na terceira parte de seu artigo, intitulada *O papel da definição*, Le Blond remete justamente à citação que aqui foi destacada e complementa: "Deste modo, uma definição não é mais considerada como alguma coisa hipotética cuja 'existência' precisa ser provada (não é mais uma *tese*, no sentido técnico de Aristóteles); antes, a definição é um objetivo de pesquisa: no lugar de passar do significado *(sêmainein)* à existência *(einai)*, nós somos movidos em direção oposta" (Le Blond, 1979, p. 77).

abandone a idéia de essência. As escolas construtivista e logicista – quando pensa-se nos representantes delas como sendo, respectivamente, Poincaré e Russell – travaram uma profunda polêmica sobre a possibilidade de definições exercerem algum papel ontológico em matemática. Para Poincaré não existe ente matemático que não tenha sido previamente definido: a definição é a responsável pela existência dos entes ou objetos matemáticos. Para Russell – que neste aspecto torna-se "platônico" nos moldes de Frege – definições desempenham um papel epistemológico antes que ontológico: elas servem para indicar ou classificar os entes e, portanto, pospõem-se a sua existência.

Decorre deste pressuposto o fato de que os defensores da posição construtivista *à la* Poincaré não podem aceitar definições impredicativas em matemática. Já para quem sustenta uma posição realista nada há de pernicioso na aceitação de tais definições. É oportuno, neste momento, destacar que ninguém antes de Gödel[10] apresentou de forma tão clara e minuciosa tal controvérsia[11].

Portanto, a questão que aqui se levanta é se haveria como sustentar a posição de que as definições têm, de alguma forma, um papel ontológico. Em primeiro lugar, não pode ser esquecido o fato de que o que se busca quando se pergunta pela definição de um determinado termo, coisa ou conceito, é conhecer com mais detalhes – ou de modo mais preciso – o significado daquilo que está em questão. O que se pretende, em última instância, é alcançar um avanço no sentido de conhecer aquilo que até o momento era ignorado.

Em outras palavras, toda vez que se define algo se dá um passo a mais em direção à compreensão – idealmente, ao menos – de algo e, assim sendo, parece mais coerente assumir a posição de que a definição desempenha um papel epistemológico fundamental. Acredita-se que esta função não pode ser a ela negada.

Aristóteles, por exemplo, não afirmou nada muito distinto disto. É o que aparece em Le Blond:

> Assim, definições, embora sejam rigorosamente indemonstráveis podem, no entanto, figurar como meta da ciência; pois um dos objetivos da ciência é mover de

[10] GÖDEL, 1981.
[11] Este tópico será apresentado no terceiro capítulo desta tese. Ver-se-á, também, o quanto a posição de Russell pode tornar-se facilmente alvo de críticas. Afinal, Russell assumiu uma espécie de realismo platônico – ao lado de Frege – no que concerne à existência matemática e, por outro lado, defendeu, junto de Poincaré, o uso de definições predicativas.

uma apreensão não articulada da existência a um conhecimento racional da essência (Le Blond, 1979, p. 77).

1.3. Tipos de Definição

Convêm distinguir a natureza das definições, os métodos de definir e os tipos de definição. Algumas pessoas confundem-se no que diz respeito ao emprego dos termos "análise" e "síntese" quando estes estão relacionados ao processo definicional. Uma coisa é dizer que se pode definir de um modo analítico ou que definições formuladas a partir do método sintético são mais ou menos adequadas; outra coisa é discutir a natureza das definições: se elas são nominais ou reais em conformidade com aquilo que se apresenta enquanto objeto de definição. Neste momento, serão deixados de lado os dois primeiros aspectos. O terceiro – que diz respeito aos tipos de definição – não é, para esta investigação, de menor importância. É oportuno que se faça uma apresentação dos tipos de definição que podem ser empregados na matemática, principalmente e, também, nas ciências de modo geral.

1.3.1. Definição: Nominal X Real e Lexical X Estipulativa

Uma maneira de apresentar este tópico é principiando pelo esquema apresentado por Robinson, quem considera a distinção entre definições nominais e reais como base para a classificação dos tipos de definições. Em realidade, Robinson refere-se a tal distinção enquanto propósitos de definição, ou seja, o propósito de toda definição nominal, por exemplo, seria apresentar ou estabelecer o significado de um símbolo. O propósito das definições reais, por sua vez, seria expor o significado de uma coisa. Mas após a observação detalhada da ramificação por Robinson apresentada – tomando como base a distinção supracitada – ver-se-á que se trata, em realidade, de um elenco de alguns tipos de definição. Contudo, não deixam de figurar aí, também, características fundamentais da natureza das definições.

Como já foi dito, parte-se da distinção real – nominal. Robinson, então, distingue entre definição real ou definição coisa-coisa e definição nominal. A definição nominal pode ser do tipo palavra-palavra ou palavra-coisa. A definição real coisa-coisa é aquela que já foi mencionada: trata-se de estabelecer o "significado" de uma coisa[12]. A definição nominal palavra-palavra instaura o significado de um símbolo afirmando que uma palavra significa o mesmo que outra palavra. Já a definição nominal palavra-coisa estabelece um significado afirmando que uma palavra significa uma dada coisa. Esta última sofre outra divisão, qual seja, pode ser do tipo lexical ou estipulativa. Antes de tratar desta dicotomia convém apresentar exemplos. No caso da definição nominal palavra-palavra, um bom exemplo, conforme Robinson, seria este: se alguém diz que a palavra "red" (em inglês) significa o mesmo que a palavra "vermelho" (em português) está oferecendo uma definição nominal palavra-palavra. Agora, se alguém procura o significado da palavra "red" em um dicionário e então diz que ela significa uma cor, está apresentando uma definição nominal palavra-coisa.

O tipo de definição palavra-coisa admite outra divisão, qual seja, pode ser do tipo lexical ou estipulativa. A definição lexical reporta-se à história, ou seja, estabelece o que certas pessoas querem dizer quando fazem referência ao significado de uma determinada palavra num determinado período. Em outras palavras, uma definição lexical diz respeito ao uso da palavra. É conveniente observar o que afirma Robinson: "Dicionários, no entanto, em geral não nos dão casos muito puros de definição lexical. No melhor dos casos, eles quase sempre tentam somente nos dar verdadeiras definições lexicais do vocabulário de uma dada classe" (Robinson, 1954, p. 38). As definições de dicionário são, por sua vez, definições estipulativas[13]. Agora, não se trata mais de uma descrição histórica da palavra, mas do significado que se atribui à palavra atualmente.

Um modo de distinguir definições estipulativas e lexicais é, conforme Robinson, através do fato de que a primeira delas representa a adoção de determinados signos e usos enquanto a definição lexical é uma espécie de relato

[12] Robinson esclarece que tal "coisa" pode ser, também, um símbolo.
[13] Este tipo de definição é conhecido também como definição verbal, conforme Robinson.

destes usos. As definições estipulativas, como o próprio termo estabelece, estipulam significados novos e, por isso, nada tem a ver com o uso da palavra no passado. Uma definição lexical, por sua vez, está longe de ser uma definição adequada porque as palavras, no uso cotidiano, têm muitos significados e este tipo de definição deve relatar o máximo possível destes significados a fim de ser fiel à história. Isto não ocorre no caso da definição estipulativa porque “ela não tenta reportar a variedades infinitas de uso atual mas tenta, antes, substituí-los por um só uso não ambíguo” (Robinson, 1954, p. 62). Mas a distinção principal entre elas talvez seja esta:

> Definições lexicais têm um valor de verdade mas definições estipulativas não têm. Uma definição lexical é uma asserção onde certas pessoas usam certa palavra de certo modo; é, por isso, ou verdadeira ou falsa. Uma definição estipulativa, no entanto, não é uma asserção em absoluto. Por isso, uma vez que asserções são as únicas sentenças que têm um valor de verdade, esta não tem valor de verdade (Robinson, 1954, p. 62)[14].

1.3.2. Construtiva X Convencional, Explícita X Implícita, Recursiva

Mesmo que a distinção mais visada, no decorrer da história da teoria das definições, seja aquela entre nome e coisa, há outras que merecem atenção. Por exemplo, a definição causal – que em Aristóteles pode ser vista como definição real[15] – na qual o *definiens*[16] expressa a causa que produz o *definiendum*[17]. Pode-se ilustrar a definição causal através deste exemplo: “toxoplasmose $=_{df}$ infecção, congênita ou adquirida, causada pelo protista *Toxoplasma gondii* e que incide em numerosos animais e no homem”[18].

---

[14] A arbitrariedade e a ausência de valor de verdade são, como bem lembra Robinson, freqüentemente afirmadas em relação às definições de um modo geral.

[15] Este tópico é tratado com ênfase na primeira parte do segundo capítulo. Mas convém, desde já, elucidar que a definição real é, para Aristóteles, aquela que expressa a essência do objeto definido e, muitas vezes, a essência é dada pela causa que o produz ou que lhe dá origem. É este o único tipo de definição ao qual Aristóteles concede legitimidade.

[16] Expressão onde reside a definição.

[17] Palavra, conceito ou coisa a ser definida.

[18] Pode-se discordar que seja esta uma definição causal pelo fato de que ela parece estar apenas fixando uma terminologia. Contudo, não deixa de ser uma definição causal quando se considera a noção de causa aristotélica.

Este tipo de definição é, por vezes, conhecido como definição genética. Porém, o nome de definição genética[19] é com freqüência concedido a um certo tipo de definição matemática: àquela que fornece uma regra para a formação da entidade designada pelo nome que está sendo definido[20]. Um exemplo de definição genética, em matemática, pode ser este: “parábola $=_{df}$ curva obtida pela seção de um cone por um plano”. A mesma curva admite uma definição que não diz como gerar ou construir uma curva tal: “parábola $=_{df}$ curva eqüidistante a uma reta e um ponto fixos”.

As definições genético-causais são diretamente opostas às definições convencionais. Afinal, ou as definições revelam a “realidade” do conceito ou são artifícios que convêm utilizar em determinados contextos. A distinção entre definição genético-causal – ou real – e definição convencional – ou arbitrária – é ilustrada através da seguinte passagem exposta por Peruzzi:

> A revolução científica do século XVII revela, seja uma retomada do interesse pelas definições genético-causais dos conceitos, seja a uma crescente insistência sobre o caráter convencional das definições. Estes dois modos de interpretar o papel da definição são antitéticos. Vêm, portanto, determinar uma polarização que se sobrepõe àquela entre racionalistas e empiristas: os primeiros animados por uma propensão a buscar o fundamento das definições na estrutura racional do mundo, os segundos decididos a liberar as definições de toda hipoteca metafísica. Assim, entre os séculos XVII e XVIII se desenvolve uma verdadeira querela: as definições são somente cômodos artifícios ou podem revelar profundas verdades? (Peruzzi, 1997, p. 35)[21].

Esta distinção pode ser exemplificada pelas teorias de Leibniz e de Hobbes que, no que diz respeito às definições, contrapõe-se radicalmente. Leibniz defende a primazia das definições reais e, portanto, essenciais, num sentido nem sempre compatível com o sentido aristotélico. Para Hobbes, ao contrário, toda definição não passa de uma mera convenção estabelecida com o intuito de adequar-se a determinado propósito.

Uma classe de definição que se vincula com as definições de tipo genético-causal é a denominada definição operacional, ainda que vise essencialmente conceitos empíricos. Uma definição operacional é aquela que diz como o conceito

---

[19] Tanto Kant quanto Leibniz fizeram uso desta terminologia. Portanto, o tipo de definição denominado “genética” será discutido também na última seção do segundo capítulo.
[20] É, portanto, atualmente conhecida como “definição construtiva”.
[21] Os racionalistas privilegiaram o papel das definições enquanto ferramentas destinadas a capturar a estrutura racional do mundo, em particular as definições construtivas. Os empiristas, por sua vez, não levaram em conta esta distinção, considerando as definições como meras convenções.

se aplica. Assim sendo, uma definição operacional fornece uma regra no sentido de verificação. Por exemplo: "ouro $=_{df}$ elemento que se dissolve em água régia" é uma definição operacional. Uma definição de ouro em termos de sua composição química não seria uma definição de tal tipo. Mas tanto na definição que fornece uma regra quanto naquela que apresenta os elementos que constituem a natureza do definido, poder-se-ia afirmar que há um caráter convencional em tais definições?

A classe de definições denominada "operacional" tem relação direta com o desenvolvimento das ciências pois, conforme Carnap, as definições operacionais ou operativas conduzem ao conhecimento de termos científicos impossíveis de serem desvendados antes que tal tipo de definição seja aplicado[22]. Peruzzi afirma que:

> Segundo Rudolf Carnap "somente quando foram inventados os termômetros o conceito de temperatura assumiu um significado preciso"; não podemos dizer que conhecemos o significado de uma grandeza g até que seja fornecida uma definição operativa (ou operacional) que permita medir g. Devem-se especificar as regras que uma definição operativa deve respeitar; e estas regras serão distintas para a grandeza g extensiva (como o comprimento), que satisfazem $g(a \oplus b) = g(a) + g(b)$, e para aquelas que não o são (como a temperatura), onde o símbolo $\oplus$ indica uma oportuna operação física. Os procedimentos de medida são livremente escolhidos, mas alguns são mais eficazes que outros (Peruzzi, 1997, p. 78).

Retornando à pergunta anterior, as definições operacionais podem ser consideradas arbitrárias? A resposta dependerá, sempre, do ponto de vista ontológico que se assume. Um neo-empirista como Carnap, por exemplo, assume a convencionalidade das definições científicas – ou operacionais – porque para ele a definição escolhida deve ser sempre aquela que torna mais simples a descrição complexa dos fenômenos.

Como bem lembra Peruzzi, dizer que a água congela a 0 grau e que seu ponto de ebulição é 100 graus, evidentemente é uma convenção visto que há, por exemplo, a escala Fahrenheit que confere 32 graus para o ponto de congelamento e 212 graus para o ponto de ebulição. Porém, é difícil aceitar que as regras através das quais uma definição operacional seja formulada sejam totalmente arbitrárias pelo simples fato de que tais definições estão fundadas em conhecimentos

[22] Este tipo de definição está diretamente conectado à questão da explicação científica discutida por Carnap em *The Logical Foundations of Probability* e este tópico é tratado no último capítulo desta tese.

factuais: que a temperatura de toda água fervente dependa da pressão não é uma convenção. E todas estas variantes constituem uma definição operacional. Acredita-se que este argumento de Peruzzi seja mais convincente. Portanto, torna-se difícil defender a arbitrariedade das definições ditas operacionais[23].

Não somente no período moderno – mas certamente nele com maior ênfase – surge o problema das definições ditas "convencionais". Afinal, se a idéia aristotélica da definição como reveladora da essência continuasse sendo aceita sem contestações, não haveria motivo para se falar em convencionalismo. A possibilidade de admitir definições convencionais opõe-se a concepção das definições reais, aquelas que revelam a essência e são, portanto, necessárias.

Um exemplo de interessante duplicidade é o de Poincaré. Ele atribui às definições um papel privilegiado no que diz respeito às ciências de um modo geral. Afinal, para Poincaré são as definições que "criam" os objetos matemáticos. Poincaré não falava da matemática de um modo geral. O papel primordial das definições fica reservado, conforme Poincaré, ao âmbito da aritmética. Na geometria tudo é diferente. Segundo Poincaré, os princípios sobre os quais se baseia a geometria não são nem sintéticos *a priori* – como são os da aritmética – nem de natureza puramente lógica e, por fim, nem oriundos da experiência. Eles são meras convenções lingüísticas.

O axioma geométrico "por um ponto não se pode traçar mais do que uma paralela a uma reta" é, conforme Poincaré, uma definição disfarçada. Mas porque se trata de uma definição disfarçada? Pelo simples fato de que todos os axiomas da geometria são definições disfarçadas. E por que "disfarçada"? Ora, porque são convenções. E definições convencionais não seriam autênticas definições[24]. Deste modo, tanto a geometria euclidiana quanto as não-euclidianas podem ser aceitas. Adota-se a geometria euclidiana pelo simples fato de que ela é mais "cômoda".

---

[23] Não é possível apresentar detalhadamente todo o desenvolvimento do que se conhece hoje por "operacionalismo". Cabe somente ilustrar que foi Bridgman quem desenvolveu a idéia segundo a qual o significado de todo conceito científico é definido por uma série de operações concretas. Tais operações é que seriam as responsáveis pela introdução do conceito e pela sua aplicação correta. Em outras palavras, conforme Bridgman, são os procedimentos experimentais que fixam o significado dos conceitos.

[24] Pode ser que Poincaré estivesse querendo dizer outra coisa com a expressão "definição disfarçada". Mas parece que não há outra interpretação plausível para esta expressão que não a de que uma definição convencional não é, genuinamente, uma definição.

A leitura que faz Peruzzi desta questão é bastante profícua uma vez que ele procura mostrar como o convencionalismo opõe-se à idéia de verdade necessária. É esta abordagem que se quer aqui destacar:

> Em um primeiro sentido, isto conflui na doutrina lingüística da verdade *a priori*, segundo a qual as verdades necessárias que não são meras verdades lógicas são tais em virtude do significado dos termos (*ex vi terminorum*), e este significado é especificado por definição. A necessidade é uma questão semântica mas, sendo convencionais as definições, a necessidade não é mais absoluta, e sim relativa à linguagem adotada. Revisar o status de um enunciado considerado analiticamente verdadeiro (como "Os solteiros são homens não casados"), sem que seja um simples exemplo de verdade lógica (como "Os solteiros são solteiros"), é possível sem contradizer-se: se pode sair de uma linguagem (com o seu aparato semântico) para entrar em uma outra, redefinindo a noção de "solteiro". O status das definições muda conforme as consideramos no interior ou no exterior da moldura lingüística que elas contribuem para formar. No interior são verdades necessárias, no exterior são convencionais (Peruzzi, 1997, pp. 74-75).

Anteriormente definiu-se o elemento ouro como aquele que se dissolve em água régia. Mas tal elemento poderia ser definido, também, deste modo: "ouro $=_{df}$ elemento químico de número 79". Como já foi dito, esta não é mais uma definição operacional. Com esta definição o *definiendum* simplesmente pode ser substituído pelo *definiens* ao longo de toda sentença em que aparecer, sem modificar o restante dela. A este tipo de definição denomina-se "explícita". Toda definição explícita permite que o *definiens* seja usado no lugar do *definiendum* sem que haja prejuízo de informação. Um exemplo trivial de definição é este: "$10 =_{df} 9 + 1$". Portanto, um símbolo, palavra ou coisa definida de modo explícito é, obviamente, eliminável visto que o *definiendum* pode ser sempre substituído pelo *definiens*.

Além disso, caso se possa concordar com Peruzzi, as definições explícitas são as únicas que Aristóteles aceitaria como legítimas definições uma vez que elas são um caso particular de definição por gênero e diferença específica. Conforme Peruzzi:

> Um conjunto de enunciados T define explicitamente um predicado P se e somente se existe já na linguagem de T uma fórmula A que exprime P, isto é, é possível demonstrar de T(P) que $P(x1, ..., xn) \leftrightarrow A(x1, ..., xn)$, onde A não contém P (é o tipo mais comum de definição e é um caso particular daquela *per genus et differentiam*) (Peruzzi, 1997, p. 112).

Novamente, há um tipo de definição que se contrapõe a este. Na impossibilidade de fornecer definições explícitas, poder-se-ia dispor de definições implícitas, tanto em matemática quanto em qualquer outro ramo do conhecimento. Matematicamente falando, uma definição implícita não é mais do que um conjunto de postulados – axiomas – que define implicitamente os termos primitivos nele, isto é, que delimita suas denotações a objetos e relações que o satisfazem[25].

As críticas que este tipo de definição recebeu não foram poucas[26]. No momento, é importante observar o que diz Pap a respeito das definições implícitas:

> Vejamos mais de perto o conceito de definição implícita. Quando o termo "definição implícita" se usa em relação a sistemas postulacionais formais, se refere a um conjunto de postulados formais, ou seja, postulados cujos termos extra lógicos, os "primitivos" do sistema, são não interpretados. Se diz que tal conjunto define implicitamente os termos primitivos extra lógicos que contém. Assim, de um postulado como "para quaisquer dois pontos distintos em um plano há exatamente uma linha reta que contém ambos", como se apresentaria, digamos, em uma reconstrução formal da geometria plana euclidiana, se diz que constitui, junto com os outros postulados, uma definição implícita dos termos primitivos "ponto", "linha reta", "plano", "contém" (Pap, 1970, p. 215).

Além de exemplos extraídos da geometria, podem ser encontrados, também, exemplos de definições implícitas na aritmética e, inclusive, no que diz respeito às operações mais elementares que a constituem. Talvez o exemplo mais citado seja aquele da definição dos símbolos de operações, tais como a soma, "+", que são definidos pelo que se conhece como "definição recursiva". Caso seja definido recursivamente, o símbolo de operação não será eliminável, visto que esta é uma condição própria das definições explícitas. Conforme dito anteriormente, são as definições explícitas que permitem que o *definiens* substitua o *definiendum*.

Agora, o que é uma definição recursiva? Definições recursivas são muito utilizadas na definição de funções matemáticas, expressões algébricas, etc. e geralmente são constituídas de duas partes: caso base e passo recursivo. Considere-se, por exemplo, a operação +. A questão é especificar, em primeiro lugar, o procedimento que consiste em somar 0 (zero) a um número qualquer x, isto é, o próprio x. É este o passo base da recursão. Depois, dado que qualquer número natural é ou 0 ou sucessor de algum outro, é necessário especificar a soma x + s(y) como s(x + y). Com esta caracterização e as definições de 1, 2, 3 e 4 pode-se, por exemplo, verificar "2 + 2 = 4" da seguinte maneira: uma vez definido 1 = *s*0 e 2= *s*1, 3 = s2 e 4 = s3 tem-se:

---

[25] Esta caracterização de definição implícita pode ser encontrada em Pap, 1970, p. 433.

[26] Ver-se-á na primeira seção do terceiro capítulo que foi Frege quem reprovou, severamente, este tipo de definição contrapondo-se, assim, à posição de Hilbert.

$2 + 2 = 2 + s1$

$2 + 2 = s(2 + 1)$

$2 + 2 = s(2 + s0)$

$2 + 2 = s(s(2 + 0)$

$2 + 2 = s(s2)$

$2 + 2 = s3$

$2 + 2 = 4$

Trata-se de um processo no qual todo passo recorre ao anterior. Conforme Pap, uma definição recursiva é uma "regra para eliminar o *definiendum* em um número finito de transformações simbólicas, a partir de expressões nas quais se apresenta junto com argumentos constantes (por exemplo, '+' a partir de '3 + 2')" (Pap, 1970, p. 434). Porém, o símbolo "+" já não é eliminável quando os argumentos são variáveis. Trata-se, portanto, de uma definição também "implícita".

1.3.3. Definições Indutivas, Circulares e Ostensivas

Russell considerava o processo de indução a própria definição de número natural e não, como queria Poincaré, o princípio fundamental da aritmética. Na resenha que Russell[27] apresenta da obra de Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, não concorda que a indução seja um princípio matemático que permite passar do particular ao geral. Conforme Russell:

> (...) é simplesmente um meio de passar de uma proposição geral a outra. Nossas premissas são: primeira, que determinada propriedade pertence a 0; podemos admitir que esta premissa é particular; segunda, que *todo* número finito *n* é tal que, se *n* tem a propriedade citada, também a tem *n+1*; esta premissa é geral. A conclusão é que todo número finito tem a propriedade citada; mas esta conclusão tem exatamente o mesmo grau de generalidade que nossa segunda premissa. O aparente passo do particular para o geral é sugerido pelo esquecimento de nossa segunda premissa (Russell, 1910, p. 101).

[27] RUSSELL, 1910.

Não obstante, o que importa destacar é que, para Russell, a indução matemática é simplesmente o que se utiliza para definir os números naturais. Eles são definidos a partir da indução matemática pelo fato de que, se uma dada propriedade pertence ao número 0 e também ao sucessor imediato de qualquer número que tenha a propriedade em questão, pertencerá a todos os números naturais. Portanto, a referência de número natural e de número indutivo é a mesma, ou seja, são usadas duas expressões diferentes para designar um mesmo conceito.

Porém, é necessário que se esclareça que tal definição é válida somente no caso de números finitos. Conforme Russell, falar em número natural é o mesmo que falar em número finito. Mas porque somente os naturais podem ser definidos indutivamente? Primeiro, pelo fato de que o ato de adicionar um número a outro, em conformidade com a seguinte definição de sucessor "O sucessor do número de termos da classe *a* é o número de termos da classe que consiste de *a*, juntamente com *x*, em que *x* é qualquer termo que não pertence à classe"[28], não pode ser repetido *ad infinitum*, segundo Russell. Em outras palavras, é impossível alcançar a cadeia dos números até o infinito através da operação de adicionar um número a outro. Esta a explicação, porém, é bastante elementar.

Uma segunda – e mais forte – justificativa, pode ser oferecida: os números irracionais, por exemplo, não são encontrados por meio da indução matemática pelo simples fato de que o ato de adicionar 1 a qualquer número inteiro, gera sempre um novo número que também é inteiro. Deste modo, conforme Russell, não é o caso que a indução seja a responsável pela fertilidade da matemática, uma vez que do infinito ela não pode tratar.

Poincaré, por sua vez, não admitia que o princípio de indução matemática[29] pudesse ser considerado a definição de número. Para Poincaré, o princípio de indução é um juízo sintético *a priori* e, portanto, é o responsável pela criatividade própria da matemática[30]. Em outras palavras, o princípio de indução, enquanto

[28] Definição esta encontrada em Russell (1981, p. 29).

[29] Princípio de Indução Matemática: "Se uma dada propriedade pertence a 0 e também ao sucessor imediato de qualquer número que tenha a propriedade em questão, pertencerá a todos os números naturais".

[30] "Em um dos capítulos de *La Science et l'Hypothèse*, eu tive a ocasião de estudar a natureza do raciocínio matemático e eu mostrei como este raciocínio, sem deixar de ser absolutamente rigoroso, poderia nos elevar do particular ao geral por um procedimento que eu chamei de 'indução matemática'" (Poincaré, 1932, p. 30).

juízo sintético *a priori*, encontra seu fundamento na intuição e é ele que permite que a matemática seja construtiva, partindo de leis particulares até alcançar leis gerais[31]. E o princípio de indução se aplica, quando se aplica, sobre conjuntos cujos elementos são definidos por recursão, como, por exemplo, os naturais obtidos pela operação de sucessor.

Merece destaque, nesta discussão, o fato de que os logicistas, enquanto tomam a indução matemática como sendo uma definição dos números naturais necessitam, primeiro, demonstrar sua validade e, segundo, tal demonstração deve ser feita em termos estritamente lógicos. Já no caso de Poincaré, pelo fato de que nega a identidade entre lógica e matemática, considera a indução um princípio matemático e, além disto, o resultado de uma intuição. Portanto, neste caso não há necessidade lógica de comprová-lo[32].

Os elogios que Poincaré tece ao princípio de indução aparecem no decorrer de toda a sua obra. É evidente que a indução tem um papel importante para qualquer ramo do conhecimento, não somente para os raciocínios matemáticos. Peruzzi, por exemplo, tenta mostrar sua importância para as ciências, de um modo geral, oferecendo exemplos de raciocínios indutivos na matemática, na biologia,... Além disso, Peruzzi relaciona definições indutivas com definições explícitas e circulares. Segundo Peruzzi:

> Uma definição indutiva não é explícita, na medida em que o próprio símbolo de definir comparece seja à direita seja à esquerda de =, como quando se escreve x + sy = s (x+y). Já nos damos conta que a definição não é circular; além disso, a definição pode tornar-se explícita explorando os instrumentos da teoria dos conjuntos. Podemos, de fato, conceber as funções como conjuntos e a definição indutiva de uma função como um modo de especificar (ou gerar) os membros de um conjunto. Na linguagem conjuntística é exprimível o conceito de intersecção, portanto podemos definir explicitamente uma função f, dada por indução, dizendo: f é a intersecção, isto é, o mínimo, entre todos os conjuntos que satisfazem as condições expressas na base e no passo (esta, porém, é uma definição impredicativa) (Peruzzi, 1997, p. 129).

Ora, e o que é uma definição impredicativa? A resposta mais elementar é que se trata de uma espécie de definição circular[33]. É necessário lembrar desde já que nenhum tipo de definição foi mais criticado do que aquele que utiliza, no

---

[31] Este assunto é discutido com mais detalhes no terceiro capítulo desta tese.
[32] KNEALE, 1968, p. 473.
[33] Definições impredicativas e circulares não são sinônimas. A impredicativa é apenas uma variante de definição circular.

definiens, o próprio *definiendum*[34]. As definições circulares foram já censuradas por Aristóteles e, ainda no final do século XIX e início do XX, continuaram sendo excluídas, mesmo que então com uma denominação específica: as definições impredicativas e as circulares tornaram-se, contemporaneamente, o "calcanhar de Aquiles" da matemática. Supunha-se que uma definição impredicativa – ou não-predicativa – poderia colocar em risco todo sistema até aí já elaborado:

> ... as definições... não-predicativas... apresentam este tipo de círculo vicioso escondido que assinalei acima; as definições não-predicativas não podem ser substituídas pelo termo definido. Nestas condições a Logística não é mais estéril, ela conduz à antinomia. É a crença no infinito atual que tem dado nascimento a estas definições não-predicativas. Eu me explico: nestas definições aparece a palavra "todos", ... a palavra "todos" tem um sentido bem claro quando se trata de um número finito de objetos; para que ela tivesse ainda um, quando os objetos são em número infinito, seria necessário que houvesse ali um infinito atual. De outro modo, estes objetos não poderão ser concebidos como colocados anteriormente as suas definições e então se a definição de uma noção N depende de todos os objetos A, ela pode ser considerada como círculo vicioso, se entre os objetos A há um que não pode ser definido sem fazer intervir a noção do próprio N. Não há infinito atual; os Cantorianos têm se enganado e eles têm caído em contradição (Poincaré, 1906a, p. 316)[35].

No que diz respeito às definições impredicativas, o que se pretende, com esta reflexão, é mostrar que sua aceitação ou rejeição depende, em última instância, da ontologia que se defende. Trata-se de pontos de vista distintos, em decorrência de assumir uma postura platonista, construtivista ou intuicionista:

> A questão tem um direto significado filosófico. Quem adota o ponto de vista platônico pensa que a matemática é uma ciência que estuda um mundo de entidades ideais, de maneira que toda demonstração de um teorema é uma descoberta, assim como a descoberta da América, e toda definição de um conceito é uma caracterização de uma propriedade objetiva: não introduz um novo construto, mas individua qualquer coisa de pré-existente. Quem, pelo contrário, como um intuicionista, não pensa assim, tende a pressupor somente aquilo que postula como intuitivamente dado ou, com base em construções precedentes, tem demonstrado que existe – e temos apenas visto como isto diz respeito também às definições (Peruzzi, 1997, p. 118)[36].

---

[34] Tradicionalmente estas foram consideradas definições circulares.

[35] A rejeição de Poincaré provém, explicitamente, de um ponto de vista ontológico oposto ao dos logicistas. Para Poincaré, o infinito é sempre potencial e tal potencialidade é oriunda de uma regra de construção que permite criar entidades sempre que possível. Este tópico será debatido no terceiro capítulo desta tese.

[36] Afinal, como afirma também Peruzzi, Chwistek e Ramsey mostraram que para evitar os paradoxos é suficiente uma teoria simples dos tipos sem necessidade de exigir a predicatividade das definições (Peruzzi, 1997, p. 124). Este tópico pode ser analisado também a partir de leituras como a de Chateaubriand Filho (2002), Chihara (1973) ou Heinzmann (1985). Na dissertação de mestrado de Engelmann (2002) encontra-se, também, uma exposição detalhada da teoria dos tipos, simples e ramificada.

Para finalizar esta seção é importante apresentar ainda outros tipos de definição que ganham destaque na literatura a respeito do tema. Por exemplo, as definições ostensivas. Uma definição ostensiva é aquela que oferece a explicação do significado de um termo indicando exemplos denotados por ele ou, ainda, induzindo à experiência deles. Como bem lembra Pap – comentando Kant – os conceitos puros do entendimento não são passíveis de definição ostensiva. Justamente pelo fato de que são *a priori* não podem ser exemplificados ou mostrados. Porém, segundo Kant, para os conceitos *a priori* matemáticos isto é possível. Justamente, o termo utilizado por Kant é construção ostensiva.

No que diz respeito à análise dos conceitos matemáticos *a priori* em Kant, "linha reta" é um bom exemplo de conceito, segundo Pap, que não pode ser ostensivamente definível. Afinal, "Kant diria que na percepção sensorial ('intuição empírica') não é possível dar nenhum exemplo de uma linha reta perfeita; segue-se disto que a definição ostensiva esteja excluída..." (Pap, 1970, p. 56). Ora, Pap certamente está equivocado como intérprete de Kant, para o qual os conceitos geométricos não são instanciados na intuição empírica, senão na intuição pura[37].

Mas há uma espécie de termo que pode ser facilmente compreendido enquanto definível ostensivamente e que não está limitado pelas fronteiras da matemática. Trata-se dos termos usados para indicar as cores[38]. Quando uma criança pergunta a um adulto "o que é verde?" tal pergunta, a princípio, pode ser perturbadora. Por fim, dificilmente outra resposta é oferecida que não aquela que aponta para um objeto de cor verde. Deste modo, a resposta dada a uma criança é uma definição ostensiva. Os exemplos, para utilizar a terminologia de Kant, instanciam somente conceitos empíricos.

Neste sentido, verde é a grama, ou as folhas das árvores, ou parte da bandeira do Rio Grande do Sul. É claro que verde pode ser definido também como "a cor que corresponde à sensação provocada na visão humana pela radiação monocromática cujo comprimento de onda é da ordem de 492 e 577

---

[37] A terminologia é contemporânea. Kant, por sua vez, falava de "definição através de exemplos". O termo "ostensivo", quando aparece em Kant, deve ser entendido como "aquilo que pode ser construído".

[38] As cores – que só podem ser definidas ostensivamente – são o que Locke denominou "idéias simples" ou o que Leibniz e Kant chamaram idéias "não analisáveis". De fato, se são não analisáveis é porque são simples.

nanômetros", mas esta definição não é mais uma definição ostensiva e sim operacional.

Ora, existem várias maneiras de apresentar os tipos de definições que podem ser encontrados nos mais diversos ramos científicos. Aqueles tipos que até o momento foram aqui explicitados são encontrados, principalmente, na obra *Semântica e Verdade Necessária* de Arthur Pap. Pap não faz uma apresentação sistemática dos tipos de definição, mas contextualiza-os no âmbito dos assuntos por ele tratados. Tal abordagem é muito distinta daquela que pode ser encontrada em Robinson. Em *Definition*, Robinson expõe os tipos de definição que considera relevantes. Apesar de sua obra ser dedicada exclusivamente ao tema que é tratado nesta tese, em relação aos tipos de definição Robinson tem menos a acrescentar do que tem a obra de Pap.

1.3.4. Definições Lingüísticas e Metalingüísticas

Peruzzi apresenta uma maneira mais genérica de classificar as definições: do mesmo modo que elas podem ser explícitas ou implícitas, podem ser, também, lingüísticas ou metalingüísticas. Conforme Peruzzi, as definições metalingüísticas:

> ... mencionam uma expressão da linguagem-objeto e consistem em equipara-la, mediante o símbolo $=_{df}$ (recentemente se difunde a notação ":="), a uma outra (que poderia não estar presente na linguagem-objeto), de modo que, em todo contexto enunciativo no qual uma comparece, pode ser substituída pela outra (Peruzzi, 1997, p. 107).

O exemplo que Peruzzi oferece de definição metalingüística no qual a expressão a definir é um termo singular é este: "1" $=_{df}$ "s(0)". Além de definições metalingüísticas de termos singulares (indivíduos) é possível obter definições metalingüísticas de predicados ("quadrado" $=_{df}$ "retângulo eqüilátero") ou, ainda, de enunciados inteiros ("se *p* então *q*" $=_{df}$ "não *p* ou *q*"). As definições metalingüísticas apresentam, conforme Peruzzi, uma grande vantagem pelo fato de que não modificam a linguagem e a teoria na qual são adicionadas. Em outras palavras, propriedades e objetos não dependem dos nomes que a eles são dados e é justamente isto o que mostra uma definição metalingüística. Por outro lado:

> As definições lingüísticas são obtidas introduzindo na própria linguagem-objeto novos símbolos para referir-se a indivíduos, propriedades ou estados de coisas, relativos a um domínio sobre o qual seja interpretável a linguagem. Em vez de $=_{df}$ se usa o símbolo simples = para definir um termo singular e o símbolo $\leftrightarrow$ (se e somente se) para definir uma forma enunciativa (Peruzzi, 1997, p. 109).

Conforme Peruzzi, as definições metalingüísticas são obtidas introduzindo na metalinguagem um símbolo – ou um nome – para operadores, termos ou predicados complexos da linguagem objeto. O símbolo "df", utilizado nestas definições, indica que as expressões ao seu lado estão em menção e não em uso. As definições metalingüísticas podem ser tanto sintáticas quanto semânticas. A vantagem deste tipo de definição é que ela não modifica em nada a análise da teoria que está em questão.

Agora, há um limite para este tipo de definição, qual seja, definições metalingüísticas são aplicáveis somente para definições explícitas. Por outro lado, tipos distintos de símbolos são suscetíveis de definição metalingüística como, por exemplo, um predicado ($\leq$), um símbolo de função (-n), uma constante (1) e um conetivo lógico ($\vee$).

Já as definições lingüísticas são obtidas introduzindo na linguagem objeto novos símbolos para entes ou construtos relativos ao domínio sobre o qual pode vir interpretada a linguagem. Além do problema tradicional de preservar a consistência – ou coerência – existe também o problema da não criatividade, ou seja, se uma teoria é não-contraditória e a definição introduzida não é criativa, então esta preserva a não-contraditoriedade da teoria. Resulta que as definições lingüísticas não podem ser criativas. Mas existe, também, o problema da eliminabilidade: se Φ contém o novo símbolo s, então s é eliminável se e somente se existe um Φ^* que não contém s e $\Phi^* \leftrightarrow \Phi\ (s)$.

As definições lingüísticas exigem que sejam respeitados três critérios, conforme Peruzzi. São eles: a) compatibilidade: se uma contradição for demonstrável em T′ então ela é já demonstrável em T, ou ainda, se T não é contraditória então T′ também não deverá ser; b) conservatividade: para todo enunciado A de LT (isto é, não contendo s) se A é demonstrável em T′ então A é demonstrável em T; c) eliminabilidade: para todo anunciado A de LT′, existe um enunciado A* que (1) não contém *s*, (2) é tal que em T′ se demonstra A $\leftrightarrow$ A* e (3) se A é demonstrável em T′ então A* é demonstrável em T.