

Conclusão

Em sua reconstrução da teoria cantoriana dos números transfinitos, Shaughan Lavine enfatizou que a intenção de Cantor, com sua teoria, era a de contar ou bem ordenar os conjuntos infinitos. Tal *contar* o infinito teria de ser feito de uma forma intuitiva, a ponto que a distinção que há entre números finitos e transfinitos fosse razoavelmente pequena. Sob tal perspectiva, os números transfinitos de Cantor consistem em uma *idealização* dos números naturais finitos para o âmbito do infinito. A fim de que tenhamos um tratamento aritmético do infinito tão próximo quanto possível da aritmética ordinária dos números finitos, surge a aritmética transfinita de Cantor, com leis e princípios o mais *finitistas* possível. Lavine nos diz:

A teoria original de Cantor não era nem ingênua nem sujeita a paradoxos. Ela cresceu sem remendos de uma única e coerente idéia: conjuntos são coleções *que podem ser contadas*. Ele tratou as coleções infinitas como se elas fossem finitas, a tal ponto que o mais sensível historiador do trabalho de Cantor, Michael Hallett, escreveu sobre o “finitismo” de Cantor (LAVINE, [1997], p.3).

Lavine, na citação acima, remete-se a Michael Hallett e à sua interpretação da teoria de Cantor como *finitista*. Segundo Hallett,

Há dois sentidos em podemos tomar a obra de Cantor como ‘finitista’. Em primeiro lugar, [a teoria de Cantor] expressa uma certa atitude ‘finitista’ em relação aos conjuntos (objetos matemáticos), a qual dá unidade a teoria. Claramente, conjuntos são tratados como simples objetos, não importando se são finitos ou infinitos. Em segunda lugar, todos os conjuntos têm [*as mesmas propriedades básicas*] dos conjuntos finitos (HALLETT, [1997], p.32).

Hallett chama a atenção para dois aspectos essenciais do pensamento de Cantor que autoriza o uso do adjetivo *finitista* para designá-lo. Primeiramente, Cantor não faz distinção entre finito e infinito quanto ao caráter *objetual* dos conjuntos. Tanto os conjuntos finitos ou infinitos são objetos determinados, passíveis de ser tratados matematicamente. Dito de outra maneira, os conjuntos finitos ou infinitos, em Cantor, são tratados como objetos *completos, atuais*. Eis então um dos pontos mais originais e controversos da teoria cantoriana: *os conjuntos*

infinitos podem ser intuídos como um todo completo. Em segundo lugar, Hallett acentua que o infinito em Cantor tem as mesmas propriedades básicas do finito que se quer dizer com isto é que, para Cantor, os conjuntos finitos e infinitos são *aumentáveis*, no sentido de que sempre admitem que *elementos novos possam ser adicionados a eles, formando-se conjuntos maiores*. A possibilidade de aumento como propriedade essencial dos conjuntos finitos é claramente expressa por Cantor em uma carta a Hilbert de 2 de outubro de 1897. Nesta carta, Cantor diz quais seriam, em seu entendimento, os *axiomas fundamentais* da aritmética finita:

[Dois] *axiomas* são fundamentos *necessários* e *suficientes* para [...] a teoria dos números finitos:

- I. *Existem coisas* (isto é, objetos de nosso pensamento). (Sem este axioma, o conceito de 1 seria impossível. [...]).
- II. Se V é uma multiplicidade *consistente* de coisas e d é uma coisa não incluída como parte de V , então a multiplicidade $V + d$ é uma multiplicidade *também consistente*.

Estes *dois axiomas* fornecem-me a seqüência ilimitada de números cardinais

1,2,3,4,...

e todas as suas leis podem ser *provadas sem o auxílio de axiomas adicionais* (CANTOR, [2000], p.930).

Os *axiomas* de Cantor para a aritmética dos cardinais finitos são notáveis pela simplicidade. Para que a aritmética do finito surja em todo o seu alcance, Cantor acredita que somente basta a tese de que há objetos de nosso pensamento, assim como o princípio de que os conjuntos finitos são consistentemente aumentáveis. Entretanto, por trás destes dois axiomas tão simples, há um compromisso implícito com os números naturais em sentido ordinal, vistos como objetos propiciadores da própria boa ordem dos cardinais finitos. Se analisarmos o axioma I, vê-se que ele afirma que há uma correspondência entre qualquer objeto que tomemos arbitrariamente em nosso pensamento e o número 1, a tal ponto que tal objeto pode ser indexado ou marcado com o índice 1; sem a especificação de um primeiro objeto, não há como surgir os cardinais sucessivos, compostos de dois, três, ..., etc, objetos. O segundo axioma de Cantor diz que, sendo dado um conjunto consistentemente reunido em um todo finito de unidades, então podemos adicionar mais um objeto neste conjunto, formando-se um novo conjunto

consistentemente reunido de unidades¹. O que está sendo dito aqui, por meio da idéia de “multiplicidade consistente”, é que dado um conjunto com n objetos, sempre é possível estender tal conjunto pela introdução de $(n + 1)$ –ésimo objeto, *distinto dos demais objetos presentes no conjunto*; a totalidade dos números ordinais finitos é infundável, o que implica que o processo de formação de conjuntos a partir de uma bijeção com tais ordinais é ilimitado. Neste sentido, pode-se afirmar que o enfoque cantoriano, mesmo que implicitamente, privilegia os ordinais em detrimento dos cardinais.

O conjunto dos números naturais, condição de boa ordenação de qualquer conjunto finito, foi detidamente estudado por Dedekind, que percebeu que o fundamental para a caracterização precisa dos naturais é precisar condições sobre o ato de associar objetos. Para Dedekind, o pensamento humano dispõe da faculdade de associar objetos: dado um objeto qualquer a , posso fazê-lo corresponder a outro objeto b . O ato de associar objetos é traduzido na matemática pelo conceito de função ou transformação. Determinar as condições que devem ser impostas ao ato de associar objetos a fim de que esta associação identifique-se com a contagem dos conjuntos finitos foi a tarefa a que se propôs Dedekind no *Was sind und was sollen die Zahlen?* Traduzido matematicamente, o ato contar é uma função ϕ similar (para quaisquer a e b , se $a \neq b$, então $\phi(a) \neq \phi(b)$), definida em um conjunto S , de tal forma que $\phi(S) \subset S$ e que *exista somente um elemento* δ de S que não pertence ao conjunto-imagem de S –isto é, $\delta \notin \phi(S)$. Estas definições, por si sós, já determinam que o conjunto S tem de ser infinito; isto implica que o *ato de contar* não tem fim. Mas falta ainda garantir que o *ato de contar* se limite a contar as coleções finitas, isto é, que qualquer subconjunto de S seja finito. Para tanto, Dedekind impôs a condição de que $S = \delta$, isto é, S é o menor conjunto ao qual δ pertence e no qual $\phi(S) \subset S$. Se tudo isto é satisfeito, S é denominado um sistema simplesmente infinito.

Mas não é só isto. É necessário ainda demonstrar que existem sistemas simplesmente infinitos. Dedekind faz isto utilizando-se da *totalidade de todas as*

¹ Em uma carta a Dedekind de 28 de agosto de 1899, Cantor afirma que “mesmo para as multiplicidades finitas, uma ‘prova’ de sua consistência não pode ser dada. Em outras palavras, a ‘consistência’ das multiplicidades é uma verdade simples e que não se demonstra; é o ‘O axioma da aritmética (no velho sentido da palavra [axioma])’”(CANTOR, *ibid*, p.937). O *axioma* de que as multiplicidades finitas são consistentes é, de fato, um corolário do princípio de que ser conjunto é ser contável, no caso em que a contagem restringe-se ao que é finito.

coisas pensáveis, demonstrando, de uma forma polêmica, que existe um sistema simplesmente infinito como subconjunto da classe das coisas pensáveis. Este sistema simplesmente infinito que faz parte do rol dos pensamentos, *visto abstratamente*, se identifica com o conjunto dos números naturais. Por conseguinte, os números naturais são um domínio *a priori* de objetos, pertencendo à razão humana na qualidade de responsáveis pela contagem dos conjuntos finitos: contar um conjunto finito nada mais seria do que indexar os seus elementos com os números sucessivos, iniciando-se tal processo com o número *I*.

Em Dedekind, o ato de contar fica restrito ao que é finito, sendo que o domínio dos números naturais é o expediente racional à elaboração dos conjuntos finitos. Fica então a pergunta: a função sucessor, como definida por Dedekind, de fato serve a contento para a ordenar os conjuntos finitos? Não poderia haver um número finito que tivesse um comportamento desviante do que é esperado para um número finito, isto é, um número *x* tal que o sucessor de *x* fosse igual a *x*? Para demonstrar que isto nunca é o caso, Dedekind demonstra no *Was sind und was sollen die Zahlen?* Um teorema que garante que *todo número finito sempre é distinto do seu sucessor* (DEDEKIND, *ibid*, p.79). A demonstração de Dedekind se faz pelo princípio de indução completa². O princípio de indução completa afirma que, se uma propriedade qualquer vale para o número *I* e se da afirmação de que tal propriedade vale para o número *n*, inferimos que ela também vale para o sucessor de *n*, então *todos os números têm a propriedade* em questão. Partindo deste princípio, que em Dedekind é um teorema geral da teoria das cadeias, Dedekind primeiramente verifica que para *n = I*, a proposição que se quer demonstrar se verifica, posto que $I \notin \phi(N)$. Admitindo-se um número *k*, tal que $\phi(k) \neq k$, então, uma vez que ϕ é similar, então para números distintos *a* e *b*, temos que $\phi(a) \neq \phi(b)$. Como $\phi(k) \neq k$, então $\phi(\phi(k)) \neq \phi(k)$. Então, por indução completa, prova-se que *todo número natural finito é diferente de seu sucessor*.

² O princípio de indução completa em Dedekind tem o estatuto de um teorema. A indução completa é o teorema 59 do *Was sind und was sollen die Zahlen?*, sendo uma condição que assegura que uma cadeia A_0 esteja contida em um sistema *S*. Segundo Dedekind, para que tal inclusão ocorra, é suficiente mostrar que (DEDEKIND, *ibid*, p.61).

a) $A \subset S$

b) *Para todo x, se $x \in \cap\{A_0, S\}$, então $\phi(x) \in S$.*

Coube a Cantor com seus números ordinais transfinitos estender a contagem para os domínios infinitos. Assim como na análise de Dedekind, o pensamento humano dispõe dos números inteiros para contar o finito, Cantor postula a seqüência *W* de todos os ordinais como *acervo de números que contam as coleções infinitas*. Tais números se dispõem na mente de Deus, e é com eles que o intelecto divino pode bem ordenar o infinito. Entretanto, os números ordinais transfinitos são introduzidos com as propriedades mais próximas possíveis das propriedades dos números finitos. Portanto, também em Cantor há um compromisso com a contagem, por assim dizer, intuitiva dos conjuntos. Na teoria dos números transfinitos, o *mesmo* ato de contar intuitivo é adaptado às exigências do infinito; admite-se mais de um elemento sem antecessor imediato, justamente para indicar o *ato intelectual de Deus de intuir como um todo completo um número infinito de elementos*.

Mas há um elemento distintivo do pensamento de Cantor: *o princípio de boa ordem*. Para os conjuntos finitos, o princípio de boa ordem reduz-se a um teorema a cuja demonstração são suficientes as noções de sucessor e de cadeia.³ Entretanto, somente com tais noções, não se demonstra o princípio em geral para quaisquer conjuntos. O que Cantor fez para tornar o infinito o mais *parecido* possível com o finito foi expandir a boa ordenação - que para os números naturais é uma conseqüência lógica do comportamento da função sucessor - para os conjuntos infinitos. O princípio de boa ordem, em Cantor, é fruto da própria perspectiva teológica que perpassa a obra de Cantor: os conjuntos, quaisquer que estes sejam, estão bem ordenados no pensamento de Deus e, mesmo que a razão humana não compreenda como se dá tal boa ordenação, ela existe desde sempre na mente divina.

Apesar desta ênfase no princípio de boa ordem não se encontrar em Dedekind, há um *núcleo comum* nas abordagens cantoriana e dedekindiana sobre os números inteiros – finitos, para Dedekind; transfinitos, para Cantor - que vale a pena realçar. Assim como Dedekind, Cantor introduziu em sua teoria dos números transfinitos a função sucessor como fundamental para a compreensão dos números

³ O princípio de boa ordenação, para os números finitos no contexto dedekindiano, é equivalente ao teorema de que, dado qualquer subconjunto *A* dos números naturais, existe um $m \in A$, tal que, para todo $x \in A$, então $x_0 \subset m_0$. No *Was sind und was sollen die Zahlen?*, o princípio da boa ordem aparece como o teorema 96 (DEDEKIND, *ibid*, p.74-75).

transfinitos. *As mesmas propriedades básicas que a função sucessor tem na abordagem de Dedekind sobre os números naturais preserva-se em Cantor.* De fato, como se viu em Dedekind, são as propriedades básicas da função sucessor que garantem a infinitude dos números naturais. Da mesma forma, é por meio destas mesmas propriedades que se tem a garantia da infinitude de qualquer segmento determinado por um ordinal limite.

Mas o que é mais importante: também em Cantor a função sucessor se comporta de maneira intuitiva, isto é, *todo número transfinito é distinto de seu sucessor.* Em Dedekind, isto é um teorema, como aqui foi mostrado; em Cantor, isto é um *postulado tacito*. Para os números finitos, esta propriedade básica da função sucessor é intuitiva, isto é, quando contamos uma coleção finita, é de se esperar que o $(n + 1)$ -ésimo elemento contado seja distinto de todos os n elementos contados anteriormente. Dedekind, com seu aguçado espírito de lógico⁴, demonstrou que tal expectativa de fato se realiza na aritmética dos números finitos por força de uma demonstração que tem por base o princípio de indução completa. Mas para os conjuntos infinitos, tal comportamento intuitivo ou normal da função poderia não se dar. No entanto, Cantor estendeu este comportamento intuitivo da função sucessor para o infinito, e é neste sentido que sua teoria dos números transfinitos se revela essencialmente *finitista*, como bem observou Hallett. Este *finitismo* de Cantor explica-se quando temos em vista que os números transfinitos ordinais são o expediente para contar os conjuntos infinitos, sendo que estes, *tal qual os conjuntos finitos, podem ser indefinidamente aumentados*; ao se postular um conjunto que não pode ser aumentado – como a totalidade de todos os conjuntos, ou a totalidade de todas as coisas pensáveis - a teoria de Cantor convive com a contradição, já que ela não foi elaborada para lidar com conjuntos que não podem aumentar de tamanho. Multiplicidades *absolutamente infinitas* pressupõem o esgotamento da capacidade enumeradora de Deus, o que, para Cantor, só pode levar a paradoxos.

Devido as semelhanças entre os pensamentos de Dedekind e de Cantor, torna-se viável uma interpretação dos conceitos cantorianos na teoria de Dedekind sobre os números naturais. Quando se faz tal interpretação, fica claro o compromisso de

⁴ Este aguçado espírito de lógico em Dedekind é superlativamente expresso na máxima que inicia o prefácio da primeira edição do *Was sind und was sollen die Zahlen?*, de 1888: “Na ciência, tudo que é provável não deve ser aceito sem uma prova” (DEDEKIND, *ibid*, p.31).

Cantor com aspectos intuitivos do ato de contar, aspectos estes que são derivados das relações existentes entre os conjuntos finitos. A própria contradição a que se chega na teoria de Cantor quando se postula a compleição de todos os ordinais, uma vez traduzida para o universo de conceitos dedekindianos, revela o seu caráter essencial: *não é possível, em Cantor, concebermos um conjunto que não possa ser ordinalmente aumentado pela função sucessor*. Em síntese, o *finitismo* de Cantor, mencionado por Hallett, torna-se bem mais claro quando o conceito de número ordinal transfinito é interpretado, dentro do que é possível, como uma extensão dos números naturais, tal como estes foram definidos por Dedekind.