

5

Os números ordinais transfinitos como uma extensão dos números naturais para o infinito

5.1

Os axiomas de Lavine: Cantor interpretado sem a “hipótese teológica”.

Como já foi aqui abordado, o filósofo norte-americano Shaughan Lavine sustenta a tese de que, para Cantor, a noção de conjunto se reduz ao conceito de uma multiplicidade que pode ser contada. Segundo Lavine, existe de forma bem clara na teoria cantoriana dos conjuntos – em especial naquela que se depreende dos *Grundlagen*, de 1883 – a tese de que a condição necessária e suficiente para que um agregado qualquer admita ser tomado como conjunto é a existência de uma bijeção entre os elementos deste agregado e uma parte ou segmento próprios da totalidade W de todos os ordinais. Além desta caracterização de conjunto como qualquer classe ou agregado que admita ser bem ordenado ou contado por um segmento próprio de W , Lavine também postula que haja uma espécie de *axiomatização*¹ tácita na obra de Cantor, como neste trabalho já foi abordado. Partindo de certas afirmações de Cantor, assim como de demonstrações de algumas proposições cruciais para a teoria cantoriana dos conjuntos, Lavine apresenta nove postulados que, segundo ele, ao lado da definição de conjunto como qualquer multiplicidade que tenha seus elementos em bijeção com um segmento próprio de W , teriam acompanhado Cantor na elaboração de sua teoria dos conjuntos e dos números transfinitos, tal qual esta se delineou nos *Grundlagen*. A título de recapitulação, eis os postulados de Cantor, segundo interpretação de Lavine (LAVINE, [1998], p.80-82):

- 1) *Os números ordinais estão linearmente ordenados por $<$.*
- 2) *Há um menor número ordinal 0.*
- 3) *Todo número ordinal α tem um sucessor imediato $\alpha + 1$.*

¹ Aqui, pela expressão “axiomatização”, entende-se a apresentação de postulados ou condições destinados a expor as propriedades essenciais de um domínio de objetos. Pouca ou talvez nenhuma relação tem, no contexto do pensamento de Lavine, a expressão “axiomatização” com a apreciação formalista, iniciada pelo matemático alemão David Hilbert, na qual *axiomatizar* é, *grosso modo*, a apresentação de expressões cujo sentido é definido por regras gramaticais de cunho finitário, mas que não se destinam, em princípio, a caracterização de um domínio específico de objetos. Sobre o formalismo hilbertiano, ver HILBERT, *The Foundations of Geometry*, [1971] e CURRY, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, [1979].

- 4) Há um número ordinal ω tal que $0 < \omega$, para todo ordinal $\alpha < \omega$ tem-se que $\alpha + 1 < \omega$; para qualquer número ordinal $\alpha < \omega$ tal que $\alpha \neq 0$, há um número ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$;
- 5) Conjuntos com os mesmos elementos são iguais (*Extensionalidade*).
- 6) Todo conjunto de ordinais tem um mínimo limite superior
- 7) Para todo número ordinal α está associado um conjunto (α) denominado de “número de classe” de α , tal que um ordinal β está em (α) se e somente se o conjunto de predecessores de β está em correspondência bijetiva com os predecessores de α
- 8) Para qualquer número ordinal α , há um número ordinal $\beta > \alpha$ tal que o conjunto de predecessores de β não está em correspondência bijetiva com os predecessores de α
- 9) Seja S um conjunto de conjuntos e seja F uma função cujo domínio sejam os predecessores de um dado ordinal α , tal que, para qualquer membro λ de S , tem-se que $F(\gamma) = \lambda$, tal que $\gamma < \alpha$. Então, há uma função binária $H(\gamma, \beta)$, sendo β um ordinal, tal que $H(\gamma, \phi) = \kappa$ tal que $\kappa \in F(\gamma)$, para todo $\phi < \beta$.

Dentre todos estes postulados, o único que se mostra algo novo em relação ao que já foi visto aqui em relação à teoria cantoriana dos conjuntos é o 9). Bem resumidamente, tal postulado nos diz que, se há um conjunto S de conjuntos, então existe uma bijeção entre todos os elementos de S e um segmento próprio de W ; daí a existência de uma função bijetiva F cujo domínio sejam os predecessores γ de um ordinal α , e cujo conjunto imagem sejam os conjuntos λ que pertencem a S . Assim sendo, temos agora que nos assegurar que os elementos λ de S são, de fato, conjuntos. Para tanto, é necessário postular uma função H que, para cada λ associado a um e somente um $\gamma < \alpha$, haja um número ordinal β tal que os seus predecessores ϕ estejam em bijeção com os elementos κ de λ . Em síntese, o postulado 9) assegura que conjuntos legítimos possam ser compostos a partir de conjuntos legítimos.

Entretanto, conforme o próprio Lavine nos diz:

O axioma 10 [no texto original de Lavine, o axioma 9 aparece como o décimo, dado que a definição de conjunto como qualquer multiplicidade que pode ser bem ordenada aparece listada juntamente com os axiomas como a proposição de número 5] é o mais difícil de ser defendido [como implícito na teoria cantoriana], posto que Cantor nunca

afirmou nada parecido em lugar nenhum. Várias formulações alternativas podem ser tão apropriadas quanto a que apresento (LAVINE, *ibid*, p.88).

Obviamente, não passou de maneira despercebida a Lavine que o axioma **9**, assim como a definição de conjunto como uma multiplicidade que pode ser bem ordenada conforme os segmentos próprios de W , estão em íntima conexão com o axioma da escolha. Como o próprio Lavine nos diz, “na moderna teoria dos conjuntos, as contrapartidas da definição [de conjunto como uma multiplicidade que é contável] e o axioma 10 [o postulado **9**] são equivalentes – eles são variantes do axioma da escolha”(LAVINE, *op. cit*, p.88). Por conseguinte, pairando sobre a interpretação que Lavine faz de Cantor, estão a seqüência W dos ordinais – com seus três princípios de formação, como definidos por Cantor –, a noção de conjunto com uma coleção contável e o axioma da escolha.

Entretanto, Lavine parece ignorar, em seus postulados, a importância que os números naturais finitos têm no contexto dos números transfinitos ordinais de Cantor. Mais do que isso, Lavine não leva em conta, para a sua interpretação de Cantor, que toda a teoria de Cantor dos números transfinitos é uma tentativa de apresentar os números, em sua totalidade, como dados na mente de Deus. Isto significa, em linhas gerais, considerar que a totalidade dos ordinais está atualmente dada no pensamento divino. Somando-se a isto, temos também que Lavine não incorporou em sua interpretação de Cantor a *hipótese teológica: os conjuntos são multiplicidades bem ordenadas ou contadas pelo pensamento divino*. Antes de ser meramente um detalhe metafísico da obra de Cantor – e, como tal, ter pouca ou nenhuma influência no desdobramento técnico e conceitual que a teoria dos números transfinitos possa ter –, a hipótese teológica pode ser bem útil a uma interpretação da teoria cantoriana que se pretenda original e consistente com os aspectos gerais do pensamento de Cantor. Isto porque, com a hipótese teológica, é introduzido um *sujeito contante* e, com isto, a ênfase que é dada aos números transfinitos ordinais, como objetos determinados, é diminuída, passando a ter relevância o *ato de contar como tal*. Analisando-se detidamente os postulados de Lavine, vê-se que eles surgem naturalmente do que é dito por Cantor nos *Grundlagen*. Pode-se mesmo afirmar que, em síntese, o que Lavine apresenta como os postulados cantorianos encontram-se aqui e ali na obra de Cantor como sugestões do caminho a seguir a bem compreender a teoria dos

números transfinitos. O próprio Lavine apresenta textualmente as passagens de Cantor que legitimam um a um os postulados acima listados, com exceção do postulado 9 (LAVINE, *op. cit.*, pp. 83-88). Também a definição de conjunto como um “agregado passível de boa ordenação” é aduzida por meio de inúmeros trechos em que Cantor parece apresentar o conceito de conjunto como tal. Entretanto, em nenhum instante Lavine se deteve nos não raros momentos em que Cantor, explicitamente, associa intimamente a sua teoria dos transfinitos com o pensamento divino. Ciente da importância que Deus tem na obra de Cantor, J. W. Dauben mostra-se um tanto quanto admirado com a falta de interesse, por parte dos estudiosos em fundamentos da matemática, em relacionar mais profundamente a teoria cantoriana dos números transfinitos com aspectos teológicos. Segundo Dauben:

Cantor acreditava que seu estudo do *Transfinitum* poderia estimular e aperfeiçoar um entendimento adequado de Deus. [...] Em vista da ligação fundamental que há entre a própria percepção de matemática de Cantor e [sua compreensão de Deus], é surpreendente que sua profunda convicção religiosa tenha recebido tão pouca atenção na discussão sobre o desenvolvimento de sua teoria dos conjuntos. A antiga literatura que trata da vida e obra de Cantor contém menções esporádicas de sua religiosidade, mas nada que se refira à sua importância. Cantor não só encontrou encorajamento e suporte de sua fé em Deus, como também acreditava que estava destinado a colocar o seu saber a serviço de um maior conhecimento de Deus e da natureza (DAUBEN, [1979], p.232).

Pelas palavras de Dauben, fica claro que uma adequada compreensão de Cantor passa necessariamente por um diálogo entre a teoria dos números transfinitos e a profunda convicção religiosa de Cantor. Tal diálogo pode acontecer de maneira natural, se admitirmos a tese de que, para Cantor, conjunto é tudo aquilo que pode ser contado por Deus. Para contar tais conjuntos, o pensamento divino dispõe da totalidade \aleph dos ordinais – totalidade esta incompreensível para a inteligência humana – e da capacidade de intuir cada objeto de maneira única e distinta; em síntese, para contar o infinito, o intelecto divino tem à sua mão os números ordinais, em toda a sua compleição, e a capacidade de associar univocamente um número a um e somente um objeto a ser contado.

Mas aqui surge uma questão: haveria uma diferença fundamental entre a contagem humana, realizada no âmbito do que é finito, e a contagem divina, esta extensiva ao infinito? Se há tal diferença, em que sentido ela ocorre? Para que tais perguntas sejam respondidas a contento, vale a pena analisarmos a contagem vista à luz do que é estritamente *finito*. Para tanto, surge a estrutura dos números naturais, como compreendida por Richard Dedekind.

Em 1888, como resultado de uma reflexão detida sobre o conceito de número e sobre a natureza da aritmética, o matemático alemão Richard Dedekind trouxe à tona a obra *Was sind und was sollen die Zahlen*, na qual buscava apresentar a aritmética – que, na concepção dedekindiana, engloba também a álgebra e a análise – como fundamentada na *lógica ou nas leis do pensamento*. Em síntese, a intenção de Dedekind, ao falar das leis do pensamento ou da lógica como base da aritmética, é assegurar que os conceitos e proposições aritméticos não têm sua origem ou validade em pressupostos intuitivos; para Dedekind, o mundo espaço-temporal em nada contribui para a aquisição das noções e princípios aritméticos. Conforme nos diz Dedekind:

Ao falar que considero a aritmética (álgebra, análise) como uma parte da lógica, quero dizer com isto que tomo o conceito de número inteiramente independente de nossas intuições de espaço e tempo; julgo-o como resultado imediato das leis do pensamento (DEDEKIND, [1964], p.31).

Segundo Dedekind, os números são inteiramente independentes do mundo físico ou sensorial. Para a aquisição da noção de número, Dedekind postula como fundamental as leis do pensamento. Mas a quais leis do pensamento se refere Dedekind como essenciais à presença da noção de número na razão humana? Em que sentido é possível dizer que os números e aritmética não dependem dos objetos sensíveis, mas somente das leis do pensamento? Para responder a isto, é interessante a citação seguinte, retirada do prefácio da primeira edição dos *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Se analisarmos detidamente o que é feito no ato de contar um agregado ou número de coisas, somos levados a considerar a capacidade humana de relacionar coisas a coisas, de fazer uma coisa corresponder à outra, uma capacidade sem a qual nenhum pensamento é possível. Em minha opinião, toda a ciência dos números está

estabelecida sobre este fundamento único e absolutamente indispensável (DEDEKIND, *ibid*, p.31).

O fundamento sobre o qual Dedekind julga estar a aritmética assentada é a capacidade de relacionar objetos, quaisquer que estes possam ser. De fato, posto que a faculdade de relacionar coisas é um princípio *a priori* da razão humana ou pensamento, a aritmética também seria de caráter apriorístico, dado que seu fundamento é puramente intelectual ou independente de sugestões empíricas. Além disso, Dedekind deixa claro que, sem tal faculdade relacional, nenhum pensamento é possível; deduz-se disto, portanto, que a capacidade de relacionar os objetos do pensamento é o próprio fundamento de qualquer ato intelectual e, por conseguinte, os números e a aritmética têm uma íntima associação com a própria natureza humana. A íntima relação entre aritmética e natureza humana pressuposta no pensamento dedekindiano é claramente exposta na seguinte passagem, extraída de um artigo intitulado *Zum Zahlbegriff*:

De todos os recursos que o espírito humano possui para a facilitação de sua vida (como no trabalho, por exemplo) nenhum é tão (...) intimamente ligado à sua natureza como o conceito de número. A aritmética, cujo único objeto é tal conceito, ainda é vista como uma ciência das extensões incomensuráveis, o que não trará dificuldades sérias ao seu desenvolvimento ulterior; pois também é incomensurável o campo de suas aplicações, dado que qualquer ser humano, mesmo que não seja fluente na manipulação da aritmética e de suas leis, é um ser aritmético (DEDEKIND in: DUGAC, [1976], p.315).²

Como se vê, para Dedekind há uma relação muito próxima entre a própria noção de humanidade e de “ser aritmético”. A razão ou o pensamento humanos tem em si o princípio fundamental do qual toda a aritmética depende: *a capacidade de associar objetos uns com os outros*. É somente por conta desta faculdade que o conceito de número e suas leis garantem a sua legitimidade. Mais precisamente, o conceito de número e as proposições aritméticas estão

² Von Allen Hilfsmitteln, welche der menschliche Geist zur Erleichterung seines Lebens, d.h. der Arbeit, in welcher das Denken besteht, ist keines so folgenreich und so untrennbar mit seiner innersten Natur verbunden, wie der Begriff der Zahl. Die Arithmetik, deren einziger Gegenstand dieser Begriff ist, ist schon jetzt eine Wissenschaft von unermesslicher Ausdehnung und es ist keinem Zweifel unterworfen, dass ihrer ferneren Entwicklung gar keine Schranken gesetzt sind; ebenso unermesslich ist das Feld ihrer Anwendung, weil jeder denkende Mensch, auch wenn er dies nicht deutlich führt, ein Zahlen-Mensch, ein Arithmetischer ist (DUGAC, p.315, [1976]).

intimamente ligados ao pensamento humano, de tal forma que se torna pertinente afirmar que, na abordagem dedekindiana, os números exercem o papel de reguladores da experiência sensível, *qualquer que esta possa ser*. Não é à toa que o filósofo Philip Kitcher nos diz que:

Dedekind acredita que todos nós que pensamos [...] devemos ter certas propriedades em virtude das quais conceitos aritméticos são inevitavelmente aplicáveis à nossa experiência. Além disso, as proposições aritméticas também são verdadeiras em qualquer mundo de que possamos ter experiência –ou de fato, em qualquer mundo que possamos conceber. Em outras palavras, em consequência de nossa condição de pensantes, nossa experiência está inevitavelmente estampada com uma estrutura aritmética. Se o livro da natureza está escrito em uma linguagem matemática, é porque nós formulamos os termos nos quais o livro está escrito (KITCHER, [1986], p.317).

De forma bem clara, Kitcher aponta para o *caráter regulador* que a aritmética desempenha no pensamento de Dedekind: toda e qualquer experiência sensível que se possa conceber está embebida por um universo aritmético; este universo aritmético garante, por assim dizer, a inteligibilidade destas experiências concebíveis. De uma certa maneira, os números desempenham em Dedekind o papel de ordenadores da experiência, posto que servem como “um meio para apreender mais fácil e precisamente as diferenças entre as coisas”(DEDEKIND, *op.cit*, p.31).

Facilmente se explica esta função ordenadora que os números – inteiros, diga-se de passagem – têm na compreensão dedekindiana, quando percebemos que o fundamento da contagem numérica é o ato de relacionar coisas; e, sendo este ato de natureza fundamental para qualquer pensamento, também os números gozariam de uma atribuição sobremaneira importante na ordenação e intelecção da experiência. Em uma passagem sobre a natureza da aritmética, Dedekind afirma que:

Eu vejo a aritmética, em sua inteireza, como, no mínimo, um imprescindível e natural efeito do mais simples ato aritmético [ou relacional]. Sobre os números –e o contar- vejo-os como nada mais do que a criação sucessiva da série infinita dos números inteiros positivos, na qual cada indivíduo é definido através do antecessor imediato. O

ato mais simples [aí considerado] é a passagem de um indivíduo já criado a um novo que lhe segue imediatamente (DEDEKIND in: MARTIN, [1956], p.125)³

Segue-se que, para bem entender o que são os números inteiros em Dedekind, é fundamental primeiramente esclarecer a concepção de contar. De uma certa maneira, como indicado pela citação acima, o *contar* em Dedekind associa-se estreitamente à faculdade humana de associar objetos. Portanto, antes de precisarmos a natureza da contagem dedekindiana, é pertinente buscar nos *Was sind und Was sollen die Zahlen* os correlatos conceituais das noções de relacionar objetos e de totalidade de objetos a serem relacionados. Primeiramente, cabe apresentarmos a noção dedekindiana de “sistema”, a qual se aproxima muito da noção cantoriana de “agregado”:

Muito freqüentemente, acontece que diferentes coisas a, b, c, \dots podem por alguma razão ser consideradas e associadas, na mente, sob um ponto de vista comum. Neste caso, podemos dizer que elas formam um sistema S . As coisas a, b, c, \dots são chamadas de elementos do sistema, estando contidos no sistema S . Conversamente, S consiste nestes elementos. Tal sistema S (um agregado, um pluralidade, uma totalidade), sendo objeto de nosso pensamento é, igualmente, uma coisa (DEDEKIND, *ibid*, p.44).

Como se vê, o próprio Dedekind toma agregado ou pluralidade como sinônimo de sistema. De forma geral, um sistema dedekindiano se assemelharia a uma multiplicidade em que todos os seus elementos - ou “coisas” - estão visto sob um mesmo ponto comum. Em princípio, tal visão poderia indicar que o sistema dedekindiano seria a extensão de um conceito ou propriedade determinada. Mas isto não parece ser o caso. Frege, em uma observação sobre o trabalho de Dedekind, aponta para um quê de psicologismo na concepção que Dedekind tem de sistema. Segundo Frege, a noção de *sistema* estaria contaminada pela idéia de uma mente que intui os objetos como um todo; sem a definição de uma propriedade ou o conceito que legitime o sistema como objetivo ou lógico,

³ Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigsten natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zahlens, an, und das Zahlen selbst nichts anderes als die sukzessive Schöpfung der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird; der einfachsten Akt is der Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauffolgendem neu zu erschaffenden (DEDEKIND in: MARTIN, p.156, [1956]).

independente do postulado de uma mente que o intua com uma totalidade, o sistema dedekindiano constrói-se na vagueza dos termos. Segundo Frege:

Aqui, na [expressão “associadas sob um ponto de vista comum”] há um pressentimento de verdade; mas, em relação à [expressão “associadas e relacionadas na mente”], não há uma característica objetiva. Pergunto: em que mente? Se [as coisas] são postas em [conjunto] em uma mente e não em outra, elas ainda formam um sistema? O que é pressuposto para estar associado e relacionado em minha mente, tem de estar sem dúvida na minha mente: então, as coisas fora da minha mente não forma um sistema? Um sistema é algo subjetivo na alma de alguém? Neste caso, a constelação de Orion é um sistema? E quais são seus elementos? As estrelas, as moléculas ou os átomos? (FREGE in: GILLIES, [1982], p.52).

Se o sistema é a contrapartida da noção de totalidade de objetos na obra de Dedekind, cabe ao conceito de *transformação* traduzir para a linguagem matemática a capacidade humana de relacionar objetos. Segundo Dedekind:

Por uma transformação ϕ (...) de um sistema S entendemos uma lei consoante a qual para todo elemento determinado s de S pertence uma determinada coisa que é denominada a *transformação* de s e denotada por $\phi(s)$; dizemos então $\phi(s)$ *corresponde* ao elemento s , que $\phi(s)$ *resulta* ou é *produzido* de s pela transformação ϕ (DEDEKIND, [1964], p.50).

Na definição de transformação apresentada por Dedekind, existe a menção a uma lei que associa um objeto determinado a outro. A princípio, isto parece sugerir que a concepção de transformação – ou função – em Dedekind tem o caráter de uma expressão bem definida que faz corresponder a um dado objeto, por meio de uma série de operações bem determinadas, um outro objeto. Mas isto não é o que de fato se depreende do *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Bem ao contrário, o que se entende por transformação na obra de Dedekind é uma correlação geral entre objetos - uma definição de função algo parecido com a noção de correspondência funcional apresentada por Dirichlet, isto é, uma mera relação unívoca entre um objeto determinado e outro também determinado (HAO WANG, [1970], p.75). Em nenhum momento o artigo de Dedekind sugere ou insinua que o conceito de transformação seja compreendido de outra forma que não como uma relação genérica entre objetos. Nesta mesma linha de análise da

noção de função, posiciona-se o matemático R. Baire, contemporâneo de Dedekind:

Há uma *função* quando há uma correspondência entre alguns números, considerados como grandezas de uma variável y , e outros números, completamente distintos, considerados como grandezas de uma variável x . Sobre esta definição, pode-se indagar a respeito dos meios pelos quais tal correspondência pode se estabelecer. A noção de uma função, assim entendida, está inteiramente contida na noção de *determinação*; este ponto de vista é oposto àquele que consiste em começar com algumas funções simples, e considerar expressões formadas destas funções simples, reservando ao termo função para as expressões assim obtidas (BAIRE in: MADDY, [1998], p.372).

A partir da definição de transformação – entendida como uma correspondência unívoca qualquer entre objetos - e de sistema, Dedekind pôde então passar para o conceito de número natural. Todavia, antes de os números naturais serem definidos, é fundamental que Dedekind defina o que é um conjunto infinito. Além de definir o infinito, Dedekind também precisa demonstrar que tal infinito existe de forma lógica ou independentemente do mundo sensível; a partir deste infinito, os números naturais surgem como a sua menor parte infinita. Mas, antes do conceito de infinito ser definido e demonstrado como existente no âmbito das noções de razão, Dedekind necessita dos conceitos de *transformação similar*, *transformação inversa* e *sistemas similares*:

Uma transformação ϕ de um sistema S é *similar* ou *distinta*, quando para diferentes elementos a, b do sistema S sempre correspondem diferentes elementos $a' = \phi(a)$ e $b' = \phi(b)$. Desde que, neste caso, [...] de $s' = t'$ temos que $s = t$, então todo elemento do sistema $S' = \phi(S)$ [$\phi(S)$ é a notação dedekindiana para o conjunto-imagem de uma transformação ϕ que tem por domínio o sistema S] é transformação s' de um único, perfeitamente determinado elemento s do sistema S , e podemos, portanto, relacionar a transformação ϕ de S uma transformação *inversa* do sistema S' , denotada por ϕ^{-1} , que consiste em que, para cada elemento s' de S' , sempre há a transformação $\phi^{-1}(s') = s$ e, obviamente, tal transformação é também similar (DEDEKIND, *op. cit*, p.53).

Os sistemas R , S são *similares* quando há uma transformação similar ϕ de S tal que $\phi(S) = R$ e, portanto, $\phi^{-1}(R) = S$ (DEDEKIND, *ibid*, p.55). O que Dedekind denomina de *transformação similar* é o que se acostumou chamar, na teoria das funções, de *função injetiva*; com o conceito de transformação *inversa*, Dedekind apresenta a noção de *função sobrejetora*. Sendo injetiva e sobrejetora ao mesmo tempo, a função ϕ é uma *bijeção* entre o sistema S e R : para cada elemento de S , há um e somente um elemento de R associado por ϕ , para cada elemento de R , há um e somente um elemento de S associado por ϕ^{-1} . A partir daí, a noção de *sistemas similares* aparece naturalmente como dois sistemas quaisquer entre os quais há uma correspondência bijetiva.

De posse da noção de *sistema similar*, Dedekind fica em condições de apresentar a sua definição de um conjunto infinito que, segundo ele mesmo nos diz, no prefácio da segunda edição do *Was sind und was sollen die Zahlen?*, de 1893, “já fôra apresentada antes de mim por G. Cantor [...], assim como por Bolzano”.(DEDEKIND, *ibid*, p.41). Eis, então, a definição de *sistema infinito* dada por Dedekind:

Um sistema S é *infinito* quando é similar a uma parte própria de si mesmo; caso contrário, é *finito* (DEDEKIND, *ibid*, p.65).

Em síntese, o que Dedekind apresenta como a essência dos conjuntos infinitos é o fato de haver uma correspondência bijetiva entre tal conjunto e, pelo menos, uma de suas partes próprias. Nesta definição de infinito, não se faz menção alguma a aspectos ordinais que possam envolver a noção de infinitude; o infinito é apresentado como um agregado, uma totalidade de elementos que tem, por assim dizer, o *mesmo tamanho de uma de suas partes próprias*. Se este infinito é bem ordenado ou não, ou se está dado embebido em uma relação de ordem estrita ou parcial entre seus elementos, nada disto entra em questão na caracterização de sua infinitude. De fato, o que Dedekind apresenta como a propriedade diferencial dos conjuntos infinitos é uma espécie de *condição mínima* que assegura a infinitude de um agregado ou sistema, sem que, para tanto, haja qualquer apelo a noções alheias a uma teoria intuitiva de conjuntos, acrescida do conceito de transformação.

Mas resta provar que existem conjuntos infinitos – ou, pelo menos, um infinito básico do qual os outros, como o infinito dos naturais, surgiriam. – no escopo

daquilo que pode ser objeto do pensamento ou da razão. Mais precisamente, é necessário mostrar que o conceito de infinito não encerra contradições internas. Como nos afirma Dedekind, em uma carta destinada ao matemático Hans Kefferstein, de fevereiro de 1890:

Existe, afinal de contas, tal sistema [infinito] no domínio de nossas idéias? Sem uma prova lógica desta existência permaneceria sempre duvidoso se tal noção está realmente livre de contradições internas (DEDEKIND in: VAN HEIJENOORT, [1981], p.101).

Ao demonstrar que o infinito é um conceito que pode ser demonstrado logicamente como existente, Dedekind quer se assegurar que não há na noção de infinitude, como definida por ele, nenhuma impropriedade formal que leve à inconsistências. Para tanto, Dedekind apresenta uma demonstração de que o *conjunto das coisas que podem ser objeto de meu pensamento é infinito*. Partindo de um argumento formalmente idêntico ao que Bolzano usara para demonstrar que o conjunto das *proposições e verdades em si é infinito*⁴, Dedekind passa à tese de que o âmbito das coisas que podem ser pensadas é infinito; o domínio dos meus pensamentos – sendo “pensamento” aqui tomado em sentido lógico, e não psicológico ou mentalista – é de extensão infinita. Para demonstrar isto, o que Dedekind precisa provar é que a condição suficiente e necessária de infinitude é satisfeita pelo domínio de meus pensamentos, isto é, que há uma bijeção entre tal conjunto e, pelo menos, uma de suas partes próprias. Apresentado como o teorema 66 do *Was sind und was sollen die Zahlen?*, a prova da existência lógica da infinitude de *meus pensamentos* é assim expressa por Dedekind:

O domínio de meus pensamentos – isto é, a totalidade S de todas as coisas que podem ser objetos de meu pensamento – é infinito. Suponhamos que s signifique um elemento de S ; então s' , que significa o pensamento de que s pode ser objeto de meu pensamento, é também objeto de S . Se analisarmos isto como uma transformação $\phi(s)$ de um elemento s , então a transformação ϕ de S tem [...] a propriedade de transformar S em si mesmo; e, certamente, S' é parte própria de S , posto que há elementos de S – como o meu próprio eu - que são diferentes de tais pensamentos s' e, por conseguinte, não estão contidos em S' . Finalmente, fica claro que se a, b são diferentes, então as

⁴ A demonstração de Bolzano, idêntica em seus aspectos formais a de Dedekind, encontra-se nos *Paradoxien des Unendlichen* de 1851, § 13, assim como na *Wissenschaftlehre* de 1837, parte I, seção 32 (ver BOLZANO, [1993] e [1972]).

suas transformações a' e b' também diferentes e, por isso, a transformação ϕ é distinta (similar).[injetiva]. Portanto, S' é infinito, como que queria demonstrar (DEDEKIND, *op. cit.*, p.64).

Dedekind *demonstra* que o conjunto de meus pensamentos é infinito. Entretanto, tal conjunto de meus pensamentos é, em si, contraditório. Isto porque tal conjunto compõe uma multiplicidade inconsistente, no sentido de Cantor, sendo similar, no sentido dedekindiano visto acima, à totalidade de todos os números ordinais; esta, por sua vez, no pensamento de Cantor, coincide com a totalidade dos pensamentos de Deus, sendo *absolutamente incompletável*. De fato, dado um elemento a de S , uma vez que a é objeto de meu pensamento, então o pensamento a' que “ a é um objeto de meu pensamento” também é um objeto de S . Assim sendo, S não está em correspondência bijetiva com nenhum segmento próprio de W , posto que, se houver um segmento κ que bem ordena S em sua compleição – dado que S é bem ordenado –, então podemos considerar o segmento determinado pelo pensamento S' que “ S é objeto de meu pensamento”, ao qual corresponderia o ordinal λ . Obviamente, como $S' \in S$, então S' determina um segmento próprio de S , então $\lambda < \kappa$. Mas λ é o ordinal associado à transformação $\phi(S)$, sendo, portanto, igual a $\kappa + 1$, o que implica que $\lambda = \kappa + 1 > \kappa$ e $\lambda < \kappa$, o que é contraditório. Por conseguinte, S não está enumerado por nenhum ordinal de W , consistindo em uma *multiplicidade absolutamente infinita*, segundo terminologia cantoriana.

Por partir de uma multiplicidade contraditória em sua natureza, a demonstração de Dedekind da existência de um conjunto infinito não é considerada confiável, uma vez que prova a infinitude de um conjunto que não pode ser tomado como um todo completo e atual. O *infinito dos meus pensamentos* - que Dedekind julgara ser o infinito lógico que garantiria o caráter *a priori* e não empírico da aritmética - é da mesma natureza do infinito composto de *todos os conjuntos* ou aquele composto pela totalidade W dos números ordinais; em síntese, tais infinitos não podem ser vistos como totalidades completas, como unidades acabadas no pensamento humano. Como o próprio Cantor veio a advertir Dedekind, em 1899, a totalidade das coisas pensáveis é uma multiplicidade inconsistente e, como a totalidade dos ordinais, não poderia ser concebida como uma unidade acabada,

completa no pensamento, sob pena de engendrar contradições à luz do entendimento humano. Eis o que diz Cantor a Dedekind:

Se começamos da noção de uma multiplicidade definida (um sistema, uma totalidade) de coisas, é necessário, como descobri, distinguir dois tipos de multiplicidades (por isto eu sempre tenho em mente multiplicidades *definidas*).

Porque uma multiplicidade pode ser de tal tipo que a hipótese de que *todos* os seus elementos ‘estão reunidos’ leva a uma contradição, de tal forma que é impossível conceber tal multiplicidade como uma unidade, como ‘algo terminado’, tais multiplicidades eu denomino de *absolutamente infinitas* ou de *multiplicidades inconsistentes*.

Como prontamente se vê, a ‘totalidade de tudo que é pensável’, por exemplo, é uma multiplicidade deste tipo (CANTOR, [2000], p.931-932).

Diante da natureza contraditória do infinito composto das coisas que são objetos do pensamento, Dedekind se portou de maneira reticente. Ciente do caráter inconsistente deste infinito pilar para a construção da aritmética, Dedekind desconfiou até da própria racionalidade do pensamento humano. Após a segunda publicação dos *Was sind und was sollen die Zahlen?* em 1893, Dedekind intentara uma terceira edição a ser publicada o mais rápido possível. No entanto, após a advertência de Cantor, esta terceira publicação só veio a aparecer em 1911, posto que o fundamento sobre o qual Dedekind edificaria a aritmética – o infinito lógico dos meus pensamentos – mostrara-se débil (RECK, [2003], p.414; DUGAC, [1976], p.89). O matemático Felix Bernstein, amigo de Dedekind, atesta o incômodo efeito que a natureza inconsistente do infinito teve sobre Dedekind, o qual chegou mesmo a duvidar do caráter racional do pensamento humano:

Dedekind não chegara a uma posição final acerca da antinomia [relativa ao infinito do que é pensável]; e ele me contou que, considerando tal antinomia, ele quase chegou a duvidar que o pensamento humano fosse totalmente racional (BERNSTEIN in: RECK, [2003], p.414).

Entretanto, mesmo partindo de noções conjuntísticas inconsistentes – como a totalidade S dos pensamentos -, é primordial a Dedekind definir os números naturais, dado que estes são resultantes do mais simples ato de relacionar os objetos. Antes de definir os naturais propriamente ditos, é fundamental apresentar o conceito de *cadeia módulo ϕ* .

K é denominada uma *cadeia* [em relação a uma transformação ϕ] quando $K' \subset K$ [isto é, quando $\phi(K) \subset K$] (DEDEKIND, *op. cit.*, p.57)

Após o conceito de cadeia módulo ϕ ter sido definido, surge então a definição 44 dos *Was sind und was sollen die Zahlen?*, fundamental para a definição do domínio dos naturais:

Se A é qualquer parte de [um sistema] S , então denominamos de A_0 a intersecção de todas as cadeias [...] das quais A é parte (DEDEKIND, *ibid.*, p.58).

As duas definições acima são essenciais para a caracterização dos números naturais vistos como uma seqüência. Para que os números naturais sejam definidos, é necessário que tenhamos um conjunto N , uma transformação ϕ e que, em N , especifiquemos um elemento I . Assim, dada a tripla $\langle N, \phi, I \rangle$, podemos definir os *conjuntos simplesmente infinitos* como aqueles que satisfazem as quatro condições seguintes (DEDEKIND, *ibid.*, p.67):

- 1) $\phi(N) \subset N$
- 2) $N = I_0$
- 3) $I \notin \phi(N)$
- 4) ϕ é similar – *Sim ϕ*

Analisando estas quatro condições, vemos que as condições 1), 3) e 4) garantem que N seja infinito, porquanto asseguram que há uma parte própria de N , a saber $\phi(N)$, que está em bijeção com N por meio da transformação ϕ . Mas somente estas três condições não servem para caracterizar unívoca e adequadamente a seqüência infinita dos números naturais. De fato, estas três condições só nos asseguram que N é infinito, mas nada nos diz sobre a *natureza deste infinito*. Portanto, algo mais precisa ser acrescentado às condições 1), 2) e 4) para que os *conjuntos simplesmente infinitos* sejam bem definidos.

Neste sentido, é interessante analisarmos a correspondência de fevereiro de 1890 entre H. Kefferstein e Dedekind. Em uma resenha do *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Kefferstein fez algumas críticas a maneira como Dedekind define os números naturais. Em síntese, Kefferstein toma a definição de Dedekind como um quanto artificial, e propõe uma caracterização completa dos números

naturais a partir da compreensão intuitiva que os números naturais são aqueles números que bem ordenam os agregados finitos, isto é, são os números *por excelência* da contagem seqüencial de tudo que é finito. Tendo isto em mente, Kefferstein apresenta os seguintes postulados para os números naturais, *definitivos*, em sua concepção, para caracterizar de forma inequívoca a sucessão dos números naturais finitos (VAN HEIJENOORT, *op. cit.*, p.98-99):

A seqüência N dos naturais finitos consiste em um conjunto no qual está distinguido um elemento arbitrário 1 e no qual está definida uma transformação ϕ de tal forma que as seguintes condições são satisfeitas:

- 1) $\phi(N) \subset N$
- 2) $(\forall x \in N) (x \notin \phi(N) \leftrightarrow x = 1)$
- 3) *Sim ϕ*

Ciente da forma como Kefferstein definira a seqüência dos naturais, a resposta de Dedekind se deu na já aludida carta a Kefferstein, de fevereiro de 1890. Nesta carta, Dedekind afirma o seguinte:

Estas condições [Dedekind aqui se refere às condições expostas por Kefferstein para definir os números naturais] acima mencionadas estão longe de nos oferecer uma caracterização completa e precisa da seqüência N [e de qualquer sistema simplesmente infinito] Todas estas condições se verificariam em qualquer sistema S que, além da seqüência N , contivesse um sistema T , composto de elementos adicionais e arbitrários t , ao qual a [transformação ϕ] poderia ser [estendida], permanecendo similar e satisfazendo a [$\phi(T) = T$]. Entretanto, tal sistema é bem diferente de nossa seqüência N , e, em assim sendo, poder-se-ia escolhê-lo tal que, dificilmente, nem um simples teorema da aritmética nele se preservaria. [...] [U]m elemento n pertence à seqüência N se, e somente se, começando com o elemento 1 e contando uniformemente – isto é, através de um número finito de iterações da [transformação ϕ] – alcança-se efetivamente o elemento n em algum instante. Entretanto, mediante este procedimento, nunca se alcançaria um elemento t que se situasse fora da seqüência N . Todavia, esta maneira de caracterizar a distinção entre os elementos t que devem ser eliminados de S e os elementos n que devem permanecer é, certamente, sem utilidade para o nosso propósito. Ela conteria, em última instância, o mais incômodo e óbvio círculo vicioso. [...] Portanto, como posso fundamentar, lógica e inequivocamente, a distinção entre os elementos n e t , sem pressupor qualquer terminologia aritmética prévia? Mediante a

consideração das *cadeias* [...] consegue-se isto de forma simples e completa ! [...] [U]m elemento de S [S sendo qualquer sistema infinito] pertence à seqüência N se, e somente se, n é um elemento de qualquer parte K de S que possua as seguintes propriedades: (i) O elemento 1 pertence a K e (ii) a imagem $[\phi(K)]$ é uma parte de K . Em minha linguagem técnica, N é a intersecção I_0 [...] de todas as cadeias, em S , às quais o elemento 1 pertence. Só assim a seqüência N é caracterizada de maneira definitiva (DEDEKIND in: VAN HEIJENOORT, *op. cit.* p.101-102).

Na longa citação acima, fica claro que Dedekind quer restringir à seqüência N aos números que são finitamente alcançáveis por iterações com a transformação ϕ . De fato, os *sistemas simplesmente infinitos* são os menores infinitos bem ordenados que existem; para bem defini-los, portanto, é necessário estipular uma condição que seja equivalente ao fato de todo conjunto simplesmente infinito ser a menor parte de um infinito bem ordenado e maior. É isto que Dedekind procura fazer com a condição 2): tal condição restringe os elementos de um sistema simplesmente infinito àqueles elementos que podem ser alcançados em passos finitos pela transformação ϕ , a partir de um elemento inicial I .

Facilmente, vê-se que os postulados de Kefferstein não reduzem a seqüência N ao que é *finitamente alcançável*. Como o próprio Dedekind nos alerta, as condições de Kefferstein não excluem um sistema T , tal que $\phi(T) = T$. Tal sistema T , conjuntamente com a seqüência N , forma um sistema S , tal que $S = N \cup T$. Todos os elementos de T têm um antecessor imediato, dado que $\phi(T) = T$. Assim, S seria um conjunto que satisfaz as condições de Kefferstein, com elementos ordinalmente *infinitos*, uma vez que não há como alcançar qualquer $t \in T$, a partir de um elemento finito k . Em síntese,

$$S = \{1, 2, \dots, k, k + 1, \dots\} \cup \{\dots, t, t + 1, \dots, t + k, \dots\}.$$

Desta maneira, o corte N/T realizado em S determina uma *lacuna*, o que é indesejável, posto que a seqüência dos naturais é intuitivamente composta somente de *saltos*. Portanto, é necessário retirar estes “elementos intrusos t ”, aos quais nunca se chega mediante iterações finitas de ϕ . Consegue-se tal proeza impondo um *tamanho máximo* dos conjuntos que satisfazem os postulados de Kefferstein, determinando-se que os conjuntos ou sistemas aptos a ser *modelos*⁵

⁵ Passou desapercibidamente a Kefferstein que seus postulados permitiam o surgimento de *modelos indesejáveis da aritmética*. Uma vez que os postulados de Kefferstein sejam aceitos

dos postulados aludidos por Kefferstein sejam a intersecção de todos os conjuntos para os quais valem as supracitadas condições *1*), *2*) e *3*). Se isto é introduzido como uma condição fundamental da seqüência *N*, definimos de imediato um conjunto simplesmente infinito, desde que tenhamos outros postulados que assegurem que *N* é infinito; e é justamente isto que fazem as *quatro condições de Dedekind*: garantem que *N* seja infinito e, além disto, o *menor infinito bem ordenado possível*.

Dado um conjunto simplesmente infinito qualquer, os números naturais surgem por um processo de abstração análogo ao que Cantor estipulou para definir os tipos ordinais a partir de agregados definidos. Conforme Dedekind:

Se na consideração de um sistema simplesmente infinito [...], negligenciarmos por completo a natureza específica dos elementos, simplesmente retendo sua distinguibilidade [...], então estes elementos são chamados de *números naturais* ou *números ordinais* ou simplesmente *números* [...] Com referência a esta independência de qualquer outro conteúdo dos seus elementos (abstração), justifica-se o fato de chamarmos os números de uma livre criação do pensamento (DEDEKIND, [1964], p.67-68).

Dedekind toma os números naturais como “livre criação do pensamento”. Por esta expressão, não se deve entender algo com conotação psicologista, mas sim que os números não devem ser interpretados como este ou aquele conjunto simplesmente infinito particular; os números são a *estrutura ordinal abstrata*⁶ que

como definidores dos números naturais, muitos conjuntos contra-intuitivos passariam como exemplificações dos naturais. Embora no contexto da correspondência entre Dedekind e Kefferstein seja um anacronismo falarmos de teoria dos modelos, algo que só veio a aparecer como tal na década de 30, é interessante observarmos como o pensamento dedekindiano já se posicionara de forma avançada, uma vez que intuiu que a mera exposição intuitiva do que seria o ato de contar levava a instanciações indesejadas dos números naturais. Tais instanciações indesejáveis dos números naturais, tratadas como *modelos não standard* da aritmética de primeira ordem, foram apresentados pela primeira vez por Thoralf Skolem, em 1934 (ver HODGES, [1983] e SKOLEM, [1934]).

⁶ Não se está afirmando aqui que o conceito de “estrutura”, no contexto dedekindiano, é equivalente ao sentido usual e corriqueiro que tal termo tem na teoria dos modelos, como, por exemplo, em Hodges ([1997], p.2). Para Hodges, em linhas gerais, uma estrutura é um objeto *A* com os seguintes *ingredientes*:

- (1) Um conjunto chamado domínio de *A*;
- (2) Um conjunto de elementos de *A* denominado de constantes de *A*;
- (3) Para cada inteiro positivo *n*, um conjunto de relações *n*-ádicas sobre o domínio de *A*;
- (4) Para cada inteiro positivo *n*, um conjunto de operações *n*-ádicas sobre o domínio de *A*.

Para Hodges, e em geral em qualquer autor que se dedica à teoria dos modelos, uma estrutura é definida a partir de uma teoria de conjuntos e de uma linguagem na qual se definem relações e operações *n*-ádicas. A partir desta definição, por assim dizer, *algébrica* de estrutura, entram em

se depreende de qualquer conjunto simplesmente infinito. Por “estrutura ordinal abstrata” entende-se aqui, como sugerido por Dedekind na citação acima, os aspectos puramente ordinais que estão em voga nos sistemas simplesmente infinitos; qualquer outra propriedade dos sistemas simplesmente infinitos, como a natureza dos seus elementos ou mesmo o estatuto metafísico destes sistemas, não é levada em conta na análise dos números naturais. Esta posição diante dos números naturais, Reck denomina de *estruturalismo metodológico*:

Como o termo “estruturalismo metodológico” sugere, esta posição tem mais a ver com o *método* metodológico, do que com questões semânticas ou metafísicas [...] A fim de entender o que o estruturalismo metodológico leva em conta, tomemos o exemplo da álgebra abstrata moderna, a qual inclui a teoria dos grupos, dos anéis, dos corpos, etc. O que o algebrista moderno faz é estudar vários *sistemas de objetos*, tanto de natureza matemática quanto física (estes últimos, pelo menos, de maneira indireta), que satisfazem certas condições gerais: os axiomas que definem os grupos, anéis, módulos, corpos, etc. Mais precisamente, tais sistemas [são estudados] *enquanto* satisfazendo estas condições, isto é, como grupos, anéis, etc.[...]

Como descrito, um matemático que seja um estruturalista metodológico não estará preocupado com a identidade ou natureza dos objetos nos vários sistemas estudados. [...] Este é o sentido em que o estruturalista metodológico toma o termo *abstração*. Aqui, abstração diz respeito apenas à questão de precisar quais aspectos de um dado

cena as relações entre estruturas tais como *homomorfismo* e *isomorfismo*, que nada mais é, este último, que um homomorfismo bijetivo entre estruturas. Não é à toa que C.Chang e J.Keisler, ao definirem a teoria dos modelos, definem-na como *álgebra mais lógica* (HODGES, *ibid*, vii).

No caso da afirmação de que os números naturais, em Dedekind, são a estrutura ordinal abstrata de qualquer conjunto simplesmente infinito, o que se quer dizer com isto é que qualquer sistema simplesmente infinito, quando ignoramos a natureza dos elementos que o constitui, atendo-nos *apenas a suas inter-relações de ordem*, reduz-se a uma seqüência tipo ω , consistindo, portanto, na forma abstrata e geral de qualquer seqüência enumerável; qualquer conjunto simplesmente infinito, *em seu esqueleto estrutural*, pode ser visto como uma exemplificação de uma seqüência cujos termos seriam algo como *puramente posições ordinais*.

Entretanto, uma atitude claramente algébrica está presente em Dedekind. Apesar de não se preocupar em especificar uma linguagem por meio da qual relações lógicas de segunda pudessem ser definidas, Dedekind opera intuitivamente com o conceito de isomorfismo entre os sistemas simplesmente infinitos. Dentro de uma teoria intuitiva de conjuntos, Dedekind demonstra que as relações presentes nos sistemas simplesmente infinitos são intercambiáveis entre si, uma vez que consistem em traduções de relações e operações que têm a mesma *forma lógica*. De fato, o parágrafo 134 do *Was sind und was sollen die Zahlen* consiste, em sua essência, em uma demonstração de que há um isomorfismo entre os sistemas simplesmente infinitos (DEDEKIND, *ibid*, p.95).

Sobre uma discussão detalhada e filosófica sobre o conceito de estrutura e a posição estruturalista, ver BOURBAKI, [1948], RESNIK, [1998] e SHAPIRO [1997].

sistema são estudados e quais são ignorados quando vistos sob tal perspectiva [metodológica].(RECK, *op. cit.*, 371).

Como o próprio Reck atesta, Dedekind, ao considerar os números naturais como o que resulta de qualquer sistema simplesmente infinito quando abstraímos a natureza de seus elementos, atendo-nos somente às relações de ordem que neles se verificam, porta-se como um estruturalista metodológico (RECK, *ibid.*, p.378-380). Entretanto, além deste caráter metodológico, o estruturalismo de Dedekind – estruturalismo este que se justifica em Dedekind pelo fato de ele definir *sistema simplesmente infinito* como qualquer conjunto que satisfaça as condições *1)*, *2)*, *3)* e *4)* – também apresenta o aspecto *ante rem*. Por “estruturalismo *ante rem*” entende-se uma posição estruturalista que compartilha do princípio de que há uma estrutura fundamental, independente das coisas sensíveis, que é instanciada por domínios de objetos específicos. Nesta perspectiva, a estrutura que é instanciada comporta-se como uma *forma platônica*, existente por si e cujo estatuto ontológico é indiferente ao fato de haver ou não sistemas de objetos sensíveis ou reais que a exemplifiquem. No estruturalismo *ante rem*, a estrutura a ser instanciada ou exemplificada comporta-se como um *universal*, do qual as suas instanciações são casos particulares (SHAPIRO, [1997], p.84).

No caso de Dedekind, tem-se claramente a impressão de que os números naturais N formam uma seqüência privilegiada, cuja existência independe de qualquer outro fator que não a existência do mundo dos *meus pensamentos*. De fato, dado o mundo dos meus pensamentos ou de tudo que é pensável, em sentido lógico, a seqüência N consiste na menor parte deste infinito, aquela justamente que satisfaz as condições *1)*, *2)*, *3)* e *4)*. Uma vez abstraindo a natureza específica dos elementos de N – isto é, ignorando o fato de N ser, por assim dizer, um *segmento de pensamentos* -, temos os números propriamente ditos, que Dedekind denominou de sistema \mathcal{A} , composto dos elementos σ - os números em si mesmos. Entretanto, com o intuito de oferecer uma notação a mais conveniente possível, Dedekind não menciona a distinção entre \mathcal{A} e N , deixando que N possa ser livremente denominada de seqüência dos números. Conforme nos diz Dedekind:

Como a abstração transforma os elementos n de N em novos elementos $[\sigma]$, [...] (e N em um novo sistema $[\mathcal{A}]$), justifica-se dizer que a existência dos números é devida a um ato de livre criação do pensamento humano. Entretanto, notacionalmente, é mais

conveniente referir-se aos números como se eles fossem os elementos originais do sistema N , simplesmente ignorando a transição de N para $[A]$ (DEDEKIND in: RECK, *op.cit*, p.405)⁷.

Como aqui já foi reiterado, a intenção de Dedekind é apresentar como o conceito de número natural é independente de qualquer consideração ou sugestão de ordem empírica. Os números – isto é, a seqüência A , como Dedekind acima denomina os números em si mesmos – estão fundamentados em noções e conceitos puramente racionais. Por conseguinte, como a seqüência A dos números naturais surge da abstração feita em um conjunto determinado N , é natural postularmos que N seja um conjunto simplesmente infinito *privilegiado*, composto somente de elementos definidos *a priori* e racionalmente; daí a totalidade das coisas pensáveis ter um papel essencial no estruturalismo dedekindiano: é a partir de tal multiplicidade – inconsistente, que se diga – que podemos retirar uma seqüência N que, desconsiderando a natureza de seus elementos, se identifica com a estrutura *em si* dos naturais, isto é, o conjunto A .

Assim, se o infinito dos meus pensamentos ou das coisas pensáveis existe de forma *a priori*, como um conceito da razão, então a sua menor parte, desconsiderando a natureza de seus elementos, é a própria seqüência N dada atualmente e fundamentada somente em pressupostos racionais. Desta menor parte infinita do *conjunto dos meus pensamentos ou das coisas pensáveis*, adquirimos os números *em si* A , mediante um processo de abstração; temos, então, as posturas estruturalista metodológica e *ante rem* atuando de mãos dadas. Embora aqui não se postule a seqüência A como uma forma platônica substantivada em um mundo hiper urânico, admite-se que A existe *a priori* no pensamento humano e se porta como um *universal* do qual os outros sistemas simplesmente infinitos são instanciações. A percepção de que a seqüência A é um objeto singular e determinado na análise dedekindiana também é compartilhada por Geoffrey Hellman:

De fato, Dedekind está usando “ N ” [conforme a convenção de Dedekind, mencionada na citação acima, tanto “ N ” como “ A ” são símbolos que podem ser usados com o

⁷ No texto original, Dedekind, para referir-se aos elementos do sistema que surge de N por abstração, assim como para designar tal sistema, utiliza-se de símbolos góticos um tanto quanto exóticos. A fim de facilitar a digitação do texto, tais símbolos foram arbitrariamente substituídos, respectivamente, pelos símbolos gregos “ σ ” e “ A ”.

mesmo sentido] e “ ϕ ”[símbolo para se referir à função sucessor] como constantes, como nomes para um sistema particular de objetos e para uma relação particular neste sistema, respectivamente (HELLMAN, [1996], p.13).

Também no *Was sind und was sollen die Zahlen?*, há um teorema que indica claramente que a seqüência dos números naturais é um conjunto simplesmente infinito arquetípico, do qual os demais seriam exemplares. Este é o teorema 132:

Todos os sistemas simplesmente infinitos são similares à seqüência N [ou \mathcal{A}] e, conseqüentemente, [...] são similares entre si (DEDEKIND, [1961], p.92).

As quatro condições de Dedekind definem uma classe de sistemas simplesmente infinitos, todos eles similares entre si. Dentre todos estes sistemas, a seqüência N destaca-se por ser aquela que existe *a priori*, como um conceito da razão humana. Mesmo que não houvesse nenhum objeto exterior ao pensamento humano, mesmo que postulássemos a extravagante hipótese do homem existir confinado ao seus pensamentos, dentro de uma *cápsula solipsista*, haveria os números com um domínio bem definido e determinado.

Em linhas gerais, ao se referir aos números naturais como um domínio estritamente lógico, Dedekind parece crer que os números são o expediente da razão para formar conjuntos finitos quaisquer, sendo estes conjuntos finitos compostos de objetos físicos, sensoriais, ou não. É por intermédio da estrutura dos naturais, dada *a priori* e atualmente na razão humana, que o ser humano adquire a capacidade inata de contar, de bem ordenar os objetos que estão em seu redor. Contudo, esta capacidade de enumerar ou de bem ordenar está limitada ao que finito, ao que é bem ordenado por um número finito. Para que a boa ordenação ou contagem alcance também os domínios infinitos, os postulados de Dedekind devem ser modificados e adaptados. Eis a hora de introduzirmos os números transfinitos de Cantor, entendidos à luz de conceitos dedekindianos.

5.2

O primado dos conjuntos no pensamento de Cantor

No pensamento dedekindiano, os números naturais se apresentam como uma estrutura *a priori* da razão que permite ao homem ordenar a sua experiência. Além

disso, os números naturais permitem à razão construir os *conjuntos finitos*⁸. A partir dos segmentos da seqüência N , uma classe ou agregado finito surge como sendo aquelas multiplicidades que são similares a estes segmentos de N ; dada *a priori* na mente humana, a seqüência N – ou, melhor dizendo, os seus segmentos – permite que qualquer agregado cujos elementos sejam reunidos *um a um* tenha uma enumeração, um número ordinal que representa a sua boa ordenação. O ato de contar um a um, em Dedekind, é algo factível por conta da inerente capacidade humana de relacionar cada objeto selecionado no ato da contagem a uma *posição* da seqüência N

Entretanto, a contagem humana, como entendida por Dedekind, restringe-se ao que é finito, ao que é passível de correspondência bijetiva com algum segmento da totalidade dos ordinais finitos. Em nenhum momento, no *Was sind und was sollen die Zahlen?*, cogita-se a possibilidade de estender a contagem aos conjuntos infinitos. Se o ato de bem ordenar ou enumerar é estendido ao infinito, a análise dedekindiana de número ordinal não nos fornece um aparato instrumental a contento para tal extensão ao infinito; essencialmente, o trabalho de Dedekind consiste em definir a estrutura numérica necessária à boa ordenação dos conjuntos finitos.

Como neste trabalho já foi reiteradamente enfatizado, a enumeração do infinito encontra suporte na teoria de Cantor dos números transfinitos. Com os seus números transfinitos – em especial os ordinais transfinitos -, Cantor pôde introduzir um método bem determinado de prosseguir a contagem, tal qual esta se dá no finito, para os domínios infinitos. Para tanto, o que é necessário salientar na obra de Cantor é que seus números transfinitos ordinais são o *recurso divino para bem ordenar qualquer multiplicidade, de qualquer extensão ou tamanho, sendo estas finitas ou infinitas*. Assim como a razão humana dispõe da seqüência N para enumerar o finito, o pensamento divino tem ao seu dispor à totalidade W dos números ordinais, sendo que, desta totalidade W , a seqüência N consiste na menor parte infinita. Mas surge então uma interessante questão: é possível interpretar os conceitos cantorianos à luz das noções aludidas por Dedekind para sua definição dos números inteiros finitos e de suas relações?

⁸A este respeito, o matemático francês Jean Dieudonné diz que “a idéia original de Dedekind não consiste tanto em definir os números naturais, mas os conjuntos *finitos*” (DIEUDONNÉ in:DUGAC, *op.cit*, p.92).

Como se verá mais tarde, a resposta a esta questão aqui é dada no sentido positivo. De fato, o que se pretende demonstrar nas linhas que se seguem é que a teoria cantoriana dos números transfinitos ordinais pode perfeitamente ser interpretada como uma extensão, para o infinito, da estrutura que Dedekind apresentou como o fundamento da contagem dos agregados finitos.

Aparentemente, tal aproximação entre Cantor e Dedekind soaria como artificial, principalmente por que Cantor introduz os seus números ordinais limites sem antecessores imediatos, o que é frontalmente contrário à exigência imposta por Dedekind de que todo número, com exceção do elemento-base *I*, tem um antecessor imediato. Entretanto, apesar desta divergência – aparente, como se verá mais tarde-, tanto Dedekind como Cantor partem da mesma intuição básica para a elaboração de seus respectivos números: *a enumeração ou boa ordenação de conjuntos* – em Dedekind, conjuntos finitos; em Cantor, infinitos. Como exemplo desta atitude conjuntística em Cantor, similar a que Dedekind apresenta no *Was sind und was sollen die Zahlen?*, temos a crítica que Cantor destinou a uma teoria rival à sua: a teoria dos números infinitos do matemático italiano Giuseppe Veronese.

Em 1894, Veronese publicara uma versão em alemão de seus *Fondamenti di Geometria*. Neste trabalho, o matemático italiano apresenta uma teoria sobre números *infinitamente grandes*. Ao tomar conhecimento da obra de Veronese, Cantor logo tratou de atacá-la. Em especial, Cantor percebeu que Veronese apresenta a definição de igualdade numérica a partir da noção geral de desigualdade, o que constitui, para Cantor, uma *petitio principii* inaceitável, posto que só se pode definir uma desigualdade quando se tem a definição precisa de igualdade (DAUBEN, *op.cit.*, p.234). Desta forma, uma vez levada à tona a vagueza conceitual com que opera Veronese,

[N]ão é de surpreender a falta de rigor com que ele [Veronese] opera com seus pseudo-números transfinitos, e com a qual ele atribui propriedades aos mesmos, os quais não podem nem mesmo existir, pelo simples fato que, como imaginados por ele [Veronese], tais números só são existentes no papel (CANTOR, *ibid.*, p.234).

Outra crítica veemente que Cantor direciona à teoria dos números infinitamente grandes de Veronese é o fato de que, na análise de Veronese sobre os números infinitos, também os números infinitamente pequenos- os infinitesimais - são

tomados como legítimos. Para Cantor, os infinitesimais são “fantasmas e quimeras” (CANTOR, *ibid*, p.235). Segundo Cantor, os números infinitesimais não podem existir, posto que admitir a sua existência é incorrer em contradição. Para demonstrar a não-existência dos infinitesimais, Cantor apela para o *axioma de Arquimedes*, para o conceito de grandeza linear e à totalidade W dos números ordinais transfinitos. Em uma carta a Felix Goldscheider, de 13 de maio de 1887, a demonstração de Cantor sobre a impossibilidade dos infinitesimais está dada como se segue:

Suponho uma grandeza linear ξ tão pequena que seu múltiplo ξn é, para *qualquer número inteiro n arbitrariamente grande n* , menor que a unidade. Parto do conceito de grandeza linear e sirvo-me de certas proposições da teoria dos números transfinitos para estabelecer que ξv também é menor que *toda grandeza finita arbitrariamente pequena*, quando v designa qualquer ordinal transfinito [...] arbitrariamente grande, de uma classe tão grande quanto se queira. Mais isto significa que ξ , mesmo multiplicado por um infinito atual tão grande quanto se queira, não resultará uma grandeza finita, portanto ξ não pode certamente ser um elemento [do conjunto] das grandezas finitas. Assim, minha hipótese [da existência de uma grandeza linear ξ infinitamente pequena] contradiz o conceito grandeza linear, segundo o qual toda grandeza linear é parte integrante de outras grandezas, em especial das grandezas lineares finitas (CANTOR in: BOLZANO,[1993]).

Para Cantor, dada uma grandeza linear m – isto é, uma grandeza tal que a justaposição de um número finito ou infinito dela mesma resulta em uma outra grandeza linear-, então se $m < k$, sendo k também uma grandeza linear, então existe um inteiro n , *finito ou transfinito*, tal que $m.n > k$ - o axioma de Arquimedes, enriquecido com a teoria dos números transfinitos. Ao postular uma grandeza linear ξ infinitamente pequena, temos que $\xi v < g$, sendo uma g qualquer grandeza linear finita e v qualquer número transfinito – de fato, a essência dos infinitesimais é que eles continuam infinitesimais mesmo depois de multiplicá-los por um número tão grande quanto se queira⁹. Mas, se assim for, a intersecção

⁹ Embora razoável, a argumentação de Cantor baseada na afirmação de que, dada uma grandeza infinitesimal qualquer, esta continua infinitesimal após ser multiplicada por qualquer número inteiro, sendo este finito ou transfinito, esbarra na moderna teoria das medidas. Pela moderna teoria das medidas, um conjunto finito ou enumerável de pontos, pontos estes de dimensão zero, tem medida zero. Entretanto, o contínuo, também composto de pontos adimensionais, tem medida diferente de zero, justamente porque não é enumerável. Pela tese acima exposta na argumentação

entre os conjuntos das grandezas lineares infinitesimais e as grandezas lineares finitas é vazia, o que é *impossível*, posto que as grandezas lineares, quaisquer que estas sejam, mantêm entre si relações de ordem baseadas na inclusão própria. Portanto, se os infinitesimais lineares ξ são menores que as grandezas lineares finitas g , é porque o conjunto E dos ξ está contido no conjunto G dos g - $E \subset G$ - o que implica que $E \cap G \neq \emptyset$. Tratando-se de um conceito contraditório em si mesmo, os infinitesimais não merecem o mesmo estatuto ontológico dos números transfinitos.

Além da inconsistência resultante da hipótese da existência de grandezas lineares infinitesimais, outro fator aponta para a não-realidade das grandezas infinitamente pequenas. Os números transfinitos surgem como a boa ordenação ou enumeração dos conjuntos infinitos. Estes, por sua vez, tanto existem na natureza - como acreditava Cantor-, como de maneira ilimitada na mente de Deus. Mas o que dizer dos infinitesimais? Há, de fato, objetos reais ou idéias que sejam infinitamente pequenos? A resposta de Cantor a tal questão está intimamente associada ao conceito de conjunto: *não existem ideal ou realmente objetos infinitesimais simplesmente porque não há conjuntos infinitesimais*. Para Cantor, ao contrário do que ocorre com os números transfinitos, atrelados em sua mais íntima essência ao conceito de conjunto, os infinitesimais não admitem uma fundamentação em noções conjuntísticas. Dado um agregado qualquer, ou bem ele é finito ou infinito, não havendo um terceiro caso que seria o dos *conjuntos infinitamente pequenos*. Embora a noção de infinitesimal não exclua o caso de conjuntos cuja distância entre seus elementos seja infinitamente pequena, ao se abstrair de um conjunto as inter-relações métricas - o que é um processo perfeitamente aceitável na teoria de conjuntos de Cantor -, o que resta são elementos tomados um a um, sem qualquer entorno no qual possa ser definida uma função distância. Nestas condições, torna-se impossível abstrair do conjunto em questão números ou grandezas infinitesimais, já que estas estão

de Cantor, as grandezas infinitesimais, de dimensão *quase-zero*, mesmo que as ajuntemos um número contínuo de vezes, continuariam com dimensão *quase-zero*, quando, conforme a teoria das medidas, seria de se esperar que a dimensão do compósito de infinitesimais fosse maior que a dimensão dos infinitesimais tomados individualmente. Sobre a medida do contínuo a partir de pontos adimensionais, O.Chateaubriand diz que "it is only because Cantor 's distinction of infinite powers that in modern measure theory we can define a measure on the continuum, which assigns measure zero to points, and to any finite or denumerably infinite set of them, but that can assign non-zero measures, in a reasonable and consistent way, to sets of the same cardinality as the continuum itself"(CHATEAUBRIAND, [2005], p.456).

acidentalmente conectadas ao conjunto devido a aspectos métricos. Visto em sua natureza mais íntima, um conjunto só admite predicacões numéricas que envolvam noções de ordinalidade e cardinalidade e, sob tais perspectivas, um conjunto só pode ser finito ou infinito. Sobre a falta de uma fundamentação conjuntística para os infinitesimais, no pensamento cantoriano, eis o que nos diz J. Dauben:

[Cantor] acusava os infinitesimalistas de falar coisas sem sentido, dado que no campo das coisas que são possíveis (que Cantor acreditava englobar tudo que existe na natureza, em um sentido bem amplo), não *há* entidades infinitamente pequenas. Cantor afirmava que [...] a veracidade de seus números transfinitos está associada a *idéias reais* produzidas diretamente de *conjuntos* e, uma vez, desafiou Veronese a mostrar qualquer *idéia real* correspondente aos supostos infinitesimais [...]

Ao contrário dos números transfinitos, cuja natureza e propriedades poderiam ser tiradas de *conjuntos*, não *há* conjuntos dos quais os infinitesimais podem ser diretamente abstraídos, como é o caso dos números transfinitos ω e \aleph_0 (DAUBEN, *op. cit.*, pp. 235-236).

Assim como Dedekind relaciona o conceito de número inteiro finito ao de conjunto finito, Cantor compreende que os seus números transfinitos estão ancorados na idéia de conjunto infinito. De fato, os números transfinitos são o instrumento conceitual para a boa ordenação dos agregados infinitos. Em sua essência, o *Transfinitum* consiste em uma extensão dos números inteiros finitos para o infinito. Por conseguinte, da mesma maneira como a boa ordenação do finito se dá com a estrutura dos naturais, também a enumeração do infinito ocorre tendo como *estruturas arquetípicas* os segmentos próprios transfinitos da totalidade W dos números ordinais. Apresentar os postulados que definem os segmentos próprios de W , a partir de conceitos oriundos de uma teoria dos conjuntos intuitiva, implícita na análise dedekindiana de número natural, é o intuito da seção seguinte.

5.3

A tradução do conceito de ordinal transfinito de Cantor para noções dedekindianas

Posto que Dedekind utilizou a seqüência N como fundamento da boa ordenação dos conjuntos finitos, é pertinente avaliarmos como os segmentos próprios de N se prestam a tal papel de ordenadores das coleções finitas. Para tanto, é fundamental que apresentemos o conceito dedekindiano de *sistema* Z_n .

Se n é qualquer número [finito], então denotaremos por Z_n o sistema [conjunto] de todos os números que *não são maiores que n* [...]. (DEDEKIND, *op.cit.*, p.75)¹⁰

A definição de Dedekind para Z_n é, por assim dizer, o equivalente dedekindiano à noção de número finito como entendido por Cantor, isto é, em sentido propriamente cardinal. De fato, Cantor compreende os números finitos como agregados de unidades, da mesma forma como os sistemas Z_n devem ser entendidos. Além disso, a existência de uma bijeção entre um sistema qualquer Σ e algum sistema Z_n é a condição necessária para que Σ seja finito (DEDEKIND, *ibid.*, p.109). Por conseguinte, à finitude de Σ está associado um número n , número este que indica *quantos* objetos há em Σ , isto é, a *propriedade cardinal* de Σ . Se os segmentos de N são usados nesta acepção, então eles deixam de significar posições bem definidas em N – ordinalidade-, passando a ter o significado de

¹⁰ Dedekind define a relação de ordem estrita entre dois números m e n mediante o conceito de cadeia, a saber: “o número m é menor que o número n e, ao mesmo tempo, n é maior que m quando a condição $n_0 \subset m_0$ é satisfeita” (DEDEKIND, *ibid.*, p.73). A partir desta definição de ordem estrita, naturalmente surge a caracterização de ordem parcial entre dois números a e b - $a \leq b$ -, como $b_0 \subset a_0$. (DEDEKIND, *ibid.*, p.74). Entretanto, para o domínio dos números transfinitos, entendidos como a coleção dos números que lhes são antecessores, tal redução do conceito de ordem para relações entre intersecção entre cadeias não vale. A definição de Dedekind para a relação de ordem entre os números finitos baseia-se em uma compreensão de número finito como *posições em uma seqüência*, e não como *totalidades de unidades*; neste sentido, Dedekind claramente privilegia aspectos ordinais em detrimento da natureza cardinal dos números finitos. Tomemos a desigualdade $a < b$, sendo a e b finitos. Segundo Dedekind, isto implica que $b_0 \subset a'_0$. Mas se tomo b como igual a b unidades reunidas e a como a unidades tomadas em conjunto, então $b_0 = a_0 = I_0$. A condição necessária e suficiente para que a desigualdade entre os números finitos, como definida por Dedekind, se verifique consiste em tratar os números finitos como espécie de lugares na seqüência N .

Se os números não são compreendidos como posições em uma seqüência – como é o caso dos números transfinitos -, então a relação de ordem estrita entre eles se dá mediante a inclusão própria dos segmentos definidos por tais números; dizer que $a < b$ é o mesmo que afirmar que o segmento determinado por a está contido propriamente no segmento determinado por b . Em Cantor, este é o enfoque utilizado para definir a relação de ordem estrita entre os números ordinais.

totalidades de unidades, totalidades estas que mantêm entre si relações de boa ordem. Conforme nos diz Dedekind:

Se Σ é um sistema finito, então [...] existe um único número n ao qual o sistema Z_n , similar ao sistema Σ , corresponde; este número n é chamado de *número* de elementos contidos em Σ (ou também o *grau* do sistema Σ) e dizemos também que Σ consiste de um sistema de n elementos, ou que o número n mostra *quantos* elementos estão contidos em Σ . Se os números são usados para expressar acuradamente esta propriedade dos sistemas finitos, eles são chamados *números cardinais* (DEDEKIND, *ibid*, p.111)

Como é sabido, Dedekind não trabalhou com a noção de número transfinito, nem em sentido ordinal, muito menos em sentido cardinal. Entretanto, como foi visto anteriormente, Dedekind, para demonstrar a existência de um sistema simplesmente infinito, usou a totalidade *absolutamente infinita* das coisas que são passíveis de ser pensadas; a seqüência N surge deste infinito das coisas que são objeto do pensamento por meio dos quatro postulados de Dedekind, os quais retiram do que é absolutamente infinito o menor infinito bem ordenado que há, isto é, a seqüência N . Assim, de um infinito similar à seqüência W , surgem os números naturais finitos vistos abstratamente como posições em uma seqüência.

Sem dúvida, muitos paralelos entre as seqüências N dos naturais e W de todos os ordinais transfinitos podem ser traçados. A primeira é o recurso que a razão humana dispõe para bem ordenar as coleções finitas; a segunda consiste no estoque de números na razão divina para a contagem de quaisquer agregados, tanto finitos quanto infinitos; neste sentido, ambas as seqüências consistem em domínios *a priori* de objetos. Como já se viu, a seqüência N é o tipo abstrato de qualquer conjunto *simplesmente infinito*: dado qualquer conjunto que satisfaça as condições de Dedekind, retirando-se a natureza de seus elementos, temos N . Desta maneira, N consiste no *arquétipo estrutural* dos menores conjuntos infinitos e bem ordenados. Qualquer conjunto que satisfizer as condições postuladas por Dedekind como definidoras de N instancia o padrão de menor conjunto bem ordenado. Além, disso, todo e qualquer conjunto bem ordenado maior que um conjunto simplesmente infinito consiste em uma instanciação de um segmento próprio de W . Cabe aqui então uma pergunta: é possível interpretar tais segmentos próprios de W – e mesmo W – a partir de conceitos presentes em Dedekind? Em

outras palavras, até que ponto a noção de número transfinito ordinal permite ser *traduzida* para o universo dedekindiano? A pertinência destas questões deduzem-se da própria natureza que os números ordinais transfinitos têm no pensamento de Cantor: *eles consistem na continuação para o infinito do ato de contar, tal qual este se dá no finito*. Posto que Dedekind matematizou a contagem do que é finito com a definição dos sistemas simplesmente infinitos, por que não haveria uma maneira de adaptar esta matematização dedekindiana para o universo dos números transfinitos de Cantor? Entretanto, cabe sempre lembrar, em Cantor o *sujeito contante* é Deus e, por conta disto, é natural pressupormos que tal contagem ou boa ordenação do infinito não se dê de forma exatamente igual à contagem do que é finito; no pensamento de Deus, o infinito é intuído como uma *totalidade acabada e pronta*. Daí que o surgimento dos ordinais limites em Cantor é explicado como o resultado numérico da intuição divina de uma totalidade infinita, de qualquer extensão ou cardinalidade, em que *todos os seus termos estão numerados*; os ordinais limites de Cantor representam a *totalização* da enumeração de todos os termos de um conjunto infinito em face do pensamento de Deus. Por conseguinte, o primeiro passo para uma tradução dos conceitos cantorianos para noções dedekidianas é estabelecer uma forma de apresentar os ordinais limites *em geral* somente com o aparato conceitual de Dedekind.

Os ordinais limites de Cantor são o tipo ordinal de um conjunto S tal que um conjunto simplesmente infinito esteja contido em S como sua menor parte infinita, além de S não conter um último elemento e ser bem ordenado. No caso de S ser ele próprio um conjunto simplesmente infinito, então o tipo ordinal de S é ω , o menor ordinal limite que existe. Assim sendo, as condições de Dedekind definidoras de um sistema simplesmente infinito podem ser adaptadas de tal forma que, nesta adaptação, fique claro que o menor conjunto a ter um ordinal limite como seu número é um sistema simplesmente infinito. A partir disto, chega-se a quatro postulados que só podem ser satisfeitos por qualquer multiplicidade ou agregado S que tenha por número ordinal um ordinal limite. Em síntese, dada uma tripla $\langle S, \preceq, \phi \rangle$, diz-se que S é um *conjunto ordinal limite* ($\text{Lim } S$) se, e somente se, satisfizer os seguintes postulados:

$$(1) \text{ Sim } \phi$$

$$(2) \phi(S) \subset S$$

$$(3) (\exists \gamma \in S)(\gamma \notin \phi(S))$$

$$(4) (\forall X)[(X \subset S \wedge X \neq \emptyset) \rightarrow (\exists! y \in S)(y \in X \wedge (\forall z \in S)(z \in X \rightarrow y \leq z))]$$

Qualquer conjunto S que satisfaça os quatro postulados acima ou bem será um conjunto simplesmente infinito, como definido por Dedekind, ou então um conjunto similar a qualquer segmento transfinito da totalidade W dos ordinais definido por um ordinal limite¹¹, ou mesmo similar à *totalidade W inteira, dada em sua compleição*. O postulado de número (1) define o carácter injetivo da função sucessor. Conjuntamente com os postulados (2) e (3), garante que S seja infinito. Além disso, (3) nos diz que S tem no mínimo um elemento sem antecessor imediato. O postulado (4), de segunda ordem, define S como um conjunto bem ordenado, uma vez que garante que qualquer subconjunto não vazio de S tenha um primeiro elemento – a título de observação, cabe ressaltar que Dedekind não operou com o conceito de conjunto vazio no *Was sind und was sollen die Zahlen* (DEDEKIND, *op.cit*, p.45).

Facilmente se demonstra que um conjunto S , uma vez sendo limite, satisfaz à identidade $S = S_\theta$. Como para os conjuntos ordinais limites vale $\phi(S) \subset S$ e como S_θ é a intersecção de todas as cadeias que contém S , então $S = S_\theta$. Para todos os conjuntos infinitos e bem ordenados K que não são ordinais limites, vale a desigualdade $K \neq K_\theta$. De fato, se K é infinito e bem ordenado e não tem por tipo ordinal um ordinal limite, então K tem um último elemento k . Assim sendo, K_θ será diferente de K , uma vez que é igual a $K \cup \{\phi(k), \phi(\phi(k)), \dots\}$. A partir da desigualdade $K \neq K_\theta$, pode-se caracterizar os conjuntos infinitos e bem ordenados que não são ordinais limites. Mas, para tanto, faz-se pertinente a apresentação de um conceito dedekindiano pilar na teoria intuitiva de conjuntos que permeia o *Was sind und was sollen die Zahlen?*, a saber, o de *sistema composto*, conceito este equivalente à noção de união entre conjuntos. Segundo Dedekind,

Por *sistema composto* pelos sistemas A, B, C, \dots , a ser denotado por $M(A, B, C, \dots)$, entendemos o sistema cujos elementos são determinados pela seguinte regra: uma

¹¹ Se a é um ordinal limite, o segmento C_a determinado por a consiste de todos os ordinais x , tais que $x < a$. Mais simplesmente, seguindo sugestão de Von Neumann, podemos tomar $a = C_a$, posto que “Todo ordinal é o tipo [de ordem] do conjunto de todos os ordinais que o precedem”(VON NEUMANN in: HALLETT, [1997], p.271). No caso de $a = 1$, temos que $C_1 = \{\emptyset\}$, já que o zero é definido na teoria de Von Neumann como o conjunto vazio $C_0 = \emptyset$ e, para qualquer ordinal $\alpha \geq 0$, $\phi(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

coisa é considerada um elemento de $M(A,B,C,...)$ se, e somente se, [tal coisa] é elemento de algum dos sistemas $A,B,C,....$, isto é, quando é elemento de A , ou de B , ou de C ,(DEDEKIND, *op.cit.*, pp. 46-47)¹²

A ênfase que Dedekind coloca no conectivo disjuntivo “ou” tem por intuito deixar clara a distinção entre o conceito de *sistema composto* (união entre conjuntos) e o de *comunidade entre conjuntos* (intersecção entre conjuntos), que Dedekind vem a apresentar logo em seguida como o sistema $G(A, B, C, ...)$ composto dos elementos g tais que g pertence a A , e g pertence a B , e g pertence a C , etc (DEDEKIND, *ibid.*, pp. 48-49)¹³.

A partir da noção de sistema composto, e com o auxílio da intersecção entre conjuntos, os conjuntos bem ordenados e infinitos, mas que não têm por tipo ordinal um limite, podem ser caracterizados como os conjuntos K , tais que:

$K = M(S, \Sigma_n)$, sendo $LimS$ e Σ_n um conjunto similar a um sistema Z_n , com n sendo um número finito, tal que $\cap\{S,K\} = S$.

Se um conjunto K satisfaz a propriedade acima, então dizemos que ele é um conjunto sucessor de S ($SucK_s$). Para todo conjunto ordinal limite S , em princípio, existem conjuntos K com a propriedade acima descrita; os conjuntos K representam a continuação do ato de contar para além de qualquer limite; em um certo sentido, os conjuntos ou sistemas K são a tradução para o universo dedekindiano do princípio norteador da teoria dos números transfinitos de Cantor: *o ato de contar, na mente de Deus, é absolutamente infindável, sendo estendível para além de qualquer limite concebível*. Isto sugere um pressuposto regulador da legitimidade dos conjuntos limites:

Se $LimS$, então existe um conjunto K , tal que $SucK_s$.

Facilmente se verifica que, se $SucK_s$, então $K \neq K_0$. Tal propriedade tem o caráter de distintiva entre os conjuntos infinitos e bem ordenados que não são limites e os que são. Além do mais, o fato de $K \neq K_0$ servirá como fio condutor da demonstração, com noções dedekindianas, da impossibilidade de termos a

¹² No texto original, o símbolo utilizado para se referir a *sistema composto* é a letra “M” do alfabeto gótico. Para facilitar digitação, utiliza-se aqui o “M” do alfabeto latino.

¹³ A mesma observação feita em relação ao símbolo referente a *sistema composto* vale aqui em relação ao símbolo utilizado para designar *comunidade entre sistemas*.

compleição de todos os ordinais; a seqüência W , símbolo do absoluto poder de bem ordenar do pensamento de Deus, é essencialmente incompletável. Como bem entendeu Cantor, a hipótese de tomarmos *todos os ordinais como um conjunto completo* leva necessariamente à contradição. Tal contradição também pode ser deduzida nesta tradução dos conceitos cantorianos para o universo dedekindiano. Antes de tratar especificamente desta contradição, cabe um exame mais detalhado do *paradoxo de Burali-Forti*.

5.4 O caráter incompletável da seqüência W e o paradoxo de Burali-Forti.

Em toda a teoria dos números transfinitos de Cantor, perpassa a tese de que a seqüência W dos ordinais, assim como toda multiplicidade que lhe seja similar¹⁴ - isto é, as multiplicidades *absolutamente infinitas*-, não admite uma compleição, um fechamento. A seqüência W , assim como qualquer multiplicidade absolutamente infinita, seria essencialmente *incompletável*. Quando se postula um infinito, de tamanho absoluto, como terminado, completamente dado, *necessariamente* chegar-se-ia a contradições - daí os agregados absolutamente infinitos serem também denominados por Cantor de *multiplicidades inconsistentes* (CANTOR, [2000], p.932). Ao contrário do que ocorre com as multiplicidades consistentes ou conjuntos, as multiplicidades absolutamente infinitas não podem ser tomadas como um todo único, justamente porque nada pode estar fora do que é absolutamente infinito. Se os conjuntos infinitos admitem ser bem ordenados ou enumerados em toda a sua extensão, isto se dá por conta de que há objetos que estão fora de seus escopos; conjuntos ou multiplicidades consistentes de tamanho infinito têm, segundo metáfora de Fraenkel, “um muro fechado que os separa do “mundo exterior””.(FRAENKEL in: HALLETT, [1997], p.203). Para Cantor, os conjuntos têm de ser tais que, uma vez admitindo-os como terminados, o processo de enumeração mediante a função sucessor, *a partir do ordinal que enumera o*

¹⁴ Cantor usa a noção de similaridade em um sentido mais estrito do que o Dedekind. Enquanto para Dedekind dois sistemas são similares quando entre eles há uma bijeção, para Cantor a similaridade entre dois conjuntos se verifica quando, além da bijeção entre os seus elementos, tal bijeção conserva o número ordinal dos elementos que estão em correspondência bijetiva (ver CANTOR, [2000], p.932).

dado conjunto, possa levar a números ordinais outros que não apareceram antes na boa ordenação do conjunto em questão; é como se o compromisso de Cantor, com a tese de que todo legítimo conjunto admite uma enumeração, seja mais com a contagem em si, *esta absolutamente infundável*, do que propriamente com a boa ordem do conjunto como tal. Assim como, em princípio, não podemos determinar que a contagem no âmbito do finito tenha um limite, também no domínio do transfinito o ato de contar é essencialmente interminável.

Isto tem as suas razões de ser quando compreendemos que W representa o absolutamente infinito poder enumerativo de Deus. Como tal, qualquer multiplicidade que seja similar a W representará o absoluto poder de Deus instanciado não como capacidade de bem ordenar ou contar, mas como um domínio em que esta capacidade divina de enumerar foi utilizada em todo o seu alcance. É o caso, por exemplo, do conjunto de todas as coisas pensáveis. Tal multiplicidade, se tomada como completa, pressupõe que tudo que é pensável está dentro dela. Assim sendo, mesmo o que é possível somente no pensamento de Deus, estaria contido neste conjunto. Obviamente, se atribuirmos um número ordinal a cada um dos pensamentos aí presentes, bem ordenaríamos *todo o pensamento de Deus*. Mas isto é tirar de Deus a sua absoluta indeterminação perante o intelecto humano: por mais que a razão humana tente, o pensamento de Deus não pode ser fechado ou limitado, *mesmo que de forma arbitrária*, por nenhum ato intelectual; insistir nisto é comprometer-se, *em princípio*, com a contradição. Por conseguinte, qualquer conjunto que seja definido a partir da hipótese tácita ou explícita de um esgotamento do *poder de expansão do intelecto divino*, como é o caso do conjunto de todos os ordinais- a seqüência W inteira – ou do conjunto de todos os conjuntos ou de todas as propriedades, leva necessariamente a paradoxos. No caso da compleição de W , a contradição que daí surge é o famoso *paradoxo de Burali-Forti*, já apresentado rapidamente nesta tese.

Em 1897, o matemático italiano Cesare Burali-Forti, em um artigo intitulado “Una Questione sui numeri transfiniti”, propôs-se a estudar a questão da tricotomia dos ordinais, isto é, se era de fato o caso de, dados dois números ordinais quaisquer a e b , então necessariamente $a = b$, ou $a < b$, ou $a > b$, sendo, logicamente, tais relações excludentes entre si (BURALI-FORTI, [1981], p.105). Qual não foi a surpresa que Burali-Forti se deparou, ao chegar à conclusão de que, partindo-se da hipótese de que há a tricotomia dos ordinais,

temos uma contradição. Sem entrar nos meandros da demonstração de Burali-Forti – demonstração esta que parte de uma noção equivocada de conjunto bem ordenado, não equivalente à noção de Cantor¹⁵ –, pode-se dizer que Burali-Forti, por *reductio ad absurdum*, negou que o princípio de tricotomia fosse válido para os ordinais. Segundo Burali-Forti, se a tricotomia valesse para quaisquer ordinais, então o conjunto W seria um conjunto *perfeitamente ordenado*. Para Burali-Forti, um conjunto U é *perfeitamente ordenado* quando satisfaz às seguintes condições (BURALI-FORTI, *ibid*, p.106):

- (1) *Há um elemento de U que é o primeiro elemento;*
- (2) *Todo elemento de U que tem sucessores, tem um sucessor imediato;*
- (3) *Dado um elemento arbitrário x de U , ou bem x não tem um predecessor imediato, ou existe um predecessor y de x que não tem um predecessor imediato, tal que os elementos de U que são, ao mesmo tempo, sucessores de y e predecessores de x formam um conjunto finito.*

Na qualidade de um conjunto *perfeitamente ordenado*, W tem um número ordinal Ω , tal que, para todo $x \in W$, vale $x \leq \Omega$. Sem dúvida, sendo W um conjunto *perfeitamente ordenado* que contém *todos os ordinais*, Ω será um ordinal limite de W ($x < \Omega$) que, por força da definição de W como a classe de todos os ordinais, tem de estar em W , comportando-se tal qual um número ordinal *máximo* de W ($x = \Omega$) (BURALI-FORTI, *ibid*, p.110). Mas o que dizer do ordinal $\Omega + 1$? Para Burali-Forti, é um teorema a respeito de *qualquer ordinal a que $a < a + 1$* (BURALI-FORTI, *ibid*, p.110). Por conseguinte, $\Omega < \Omega + 1$. Entretanto, como $\Omega + 1 \in W$, temos que $\Omega + 1 \leq \Omega$. Portanto, temos que $\Omega + 1 \leq \Omega < \Omega + 1$, o que é uma contradição. Deste absurdo, Burali-Forti conclui que:

Portanto, se assumirmos a proposição A [o princípio de tricotomia para os ordinais], somos levados a um absurdo, e portanto torna-se rigorosamente demonstrado que existem pelo menos dois tipos de ordem a e b [números ordinais] [...] tais que a não é igual a b , nem maior que b , nem menor que b . (BURALI-FORTI, *ibid*, p.111).

¹⁵ A título de recapitulação, eis a definição cantoriana de conjunto bem ordenado: um conjunto F é bem ordenado se i) há em F um primeiro elemento, e se ii), sendo F' uma parte de F e se F tem um ou mais elementos maiores que qualquer elemento de F' , então há um elemento f' de F que se segue imediatamente após a totalidade dos elementos de F' , tal que não haja nenhum elemento de F que seja intermediário entre f' e a totalidade dos elementos de F' (CANTOR, [1941], pp.137-138).

Deste absurdo, o único fato que Burali-Forti conclui sobre a teoria dos números ordinais é que a seqüência W dos números ordinais não serve a contento como padrão ou arquétipo de conjunto perfeitamente ordenado, dado que não admite um critério de ordenação entre seus elementos, posto que em W não vale o princípio de tricotomia.(BURALI-FORTI, *ibid*, p.111). Nada mais é inferido por Burali-Forti a respeito da teoria cantoriana dos números ordinais. Nem mesmo Burali-Forti chegou a por em dúvida a consistência da teoria dos conjuntos subjacente no conceito de número transfinito; em nenhum momento, Burali-Forti acreditou ter chegado a um paradoxo que dizia respeito à estruturação conceitual da teoria de Cantor; o que Burali-Forti conclui de seu trabalho é que a seqüência W de todos os ordinais, pressuposto arquetípico da teoria de Cantor de multiplicidade perfeitamente ordenada, não podia se prestar a este papel. Portanto, Burali-Forti nunca se viu diante de um *paradoxo*. Como nos diz G.Moore e A.Garciadiego:

[...] Contudo, ele [Burali-Forti] nunca pensou ter encontrado algum paradoxo no trabalho de Cantor, mas, antes, ter mostrado que a teoria dos tipos ordinais de Cantor [mais propriamente, a teoria dos números ordinais de Cantor] continha uma limitação essencial. Embora, atualmente, seja fácil parafrasear o argumento de Burali-Forti em termos de conjuntos bem ordenados e assim gerar um paradoxo, Burali-Forti nunca fez isso. A única contradição, no seu trabalho, é aquela usualmente em qualquer prova por *reductio ad absurdum* (MOORE e GARCIADIEGO in: VIERO, [1997], p.117).

O que Burali-Forti teria demonstrado é que W não pode ser perfeitamente ordenado, uma vez que não satisfaz o princípio de tricotomia. A partir disto, dizer que o resultado de Burali-Forti possa ser visto como a descoberta de um paradoxo na teoria de Cantor é uma outra história.

Mas então qual é o verdadeiro alcance do *paradoxo de Burali-Forti*? Sem dúvida, a única conclusão a que se chega diante do trabalho de Burali-Forti é a seguinte: *se a seqüência W dos ordinais é perfeitamente ordenada, então em W não vale o princípio de tricotomia*. Analisado desta forma, o resultado de Burali-Forti de 1897 não repercute tão destrutivamente assim na teoria de Cantor dos números transfinitos. Em primeiro lugar, o que Burali-Forti compreende por classe perfeitamente ordenada não é equivalente ao conceito cantoriano de agregado bem ordenado. Embora todo conjunto bem ordenado, segundo definição

de Cantor de boa ordem, seja perfeitamente ordenado, há classes perfeitamente ordenadas que não são bem ordenadas. Ciente desta insuficiência em seu trabalho, Burali-Forti, em uma nota relativa à sua demonstração, enfatiza que o ele compreendia ser o conceito de boa ordem em Cantor não era de fato correto e, então, apresenta a definição correta de boa ordem tal como Cantor a havia pensado. Equivocadamente, Burali-Forti havia julgado que, em Cantor, bastava que um conjunto satisfizesse os postulados (1) e (2) de sua definição de conjunto perfeitamente ordenado para ser bem ordenado. Com isto, até mesmo conjuntos que têm um subconjunto de tipo ordinal ω^* entravam no rol dos conjuntos bem ordenados. A fim de lidar somente com conjuntos similares, em sentido cantoriano (ver nota 14), aos segmentos próprios da seqüência W dos ordinais, Burali-Forti introduz o conceito de classe perfeitamente ordenada, a qual seria uma classe que, além das condições (1) e (2) satisfaz uma terceira condição que, em princípio, reduziria os conjuntos com algum tipo de ordem aos conjuntos similares aos segmentos de W . Entretanto, isto não foi o caso. Apesar de todo segmento próprio de W ser uma classe perfeitamente ordenada, há classes perfeitamente ordenadas que não coincidem com nenhum segmento de W . Isto porque a condição (1), (2) e (3), embora satisfeitas por qualquer segmento de W , também o são por um conjunto como $T = \{a, a', a', \dots, d_n, b'_n, b''_{n\dots}, d_2, b'_2, b''_2\dots, d_1, b'_1, b''_1, \dots, d_0, c, c', c'', \dots\}$ que, apesar de perfeitamente ordenado, não corresponde a nenhum segmento de W e, por conseguinte, não é bem ordenado. Consciente de que sua definição de classe perfeitamente ordenada não equivalia à noção cantoriana de boa ordem, Burali-Forti, em 1905, escreve a Couturat dizendo que, devido a esta confusão conceitual, o paradoxo a que chegara em 1897 não teria os efeitos devastadores que então ele, Burali-Forti, julgara que tivesse (VAN HEIJENOORT, *ibid*, p.104). Sem dúvida, a única conclusão a que se é levado pelo trabalho de Burali-Forti é a de que a seqüência W dos ordinais, se perfeitamente ordenada, não obedece ao princípio da tricotomia.

Em relação à teoria dos números transfinitos de Cantor, o artigo de 1897 de Burali-Forti não tem o poder devastador que comumente é propalado. Entretanto, o próprio Cantor percebera que tal trabalho lançou uma questão que é capital para o entendimento da seqüência W como imagem da absolutamente infinita capacidade de Deus de enumerar ou contar: *haveria como tomar a seqüência W como um todo completo, isto é, há um número ordinal máximo que seria o limite*

da contagem transfinita. Na qualidade de símbolo ou representação do poder de bem ordenar da mente divina, a resposta de Cantor a esta questão é categórica: *não*. Para Cantor, W representa a mente divina e todas as possibilidades de enumerar que o intelecto divino dispõe. Qualquer tentativa de fechar ou limitar a mente divina, em seu poder de bem ordenar, está *necessariamente* comprometida com a contradição. Em uma carta a Dedekind, de 3 de agosto de 1899, o caminho ao *paradoxo*, a partir da completude de W , é claramente expresso por Cantor:

[O] sistema Ω [símbolo usado por Cantor para referir-se a W] quando naturalmente ordenado de acordo com a magnitude, forma uma seqüência. Se então adicionamos 0 a esta seqüência como um elemento [...], então obtemos a seqüência Ω'

$0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \gamma \dots$

na qual, como facilmente se vê, *todo* número é o tipo da seqüência de todos os elementos que o precede¹⁶ [...].

[...] Se Ω' fosse consistente [isto é, um agregado cuja hipótese de sua compleição não leva à contradição], então, desde que ela é bem ordenada, haveria um número δ maior que todos os números de Ω' ; mas o número δ também está em Ω' , porque [tal sistema] contém *todos* os números [transfinitos]; δ portanto seria maior que δ , o que é uma contradição (CANTOR, [2000], p.932-933)

A partir da contradição de que há um número transfinito maior que si mesmo, Cantor nega peremptoriamente a hipótese que teria levado a esta contradição: *a compleição da seqüência W* . Segundo Cantor, considerar que a totalidade dos ordinais transfinitos admite um fechamento é admitir que há um número ordinal que sucede imediatamente a todos estes ordinais. Mas, *em princípio*, tal ordinal também teria de ser transfinito, então é claro que este ordinal não pode existir, posto que um número não pode ser transfinito e maior que qualquer número transfinito. A contradição a que chega Cantor está baseada no fato de que a compleição de W implica no surgimento de um número que é maior que qualquer número de W , mas, *por força da compleição de W* , está presente em W ; é como se estabelecêssemos um limite para algo que, por força de sua natureza, não admite um limite.

¹⁶ Claramente vemos Cantor adotar aqui o enfoque que, posteriormente, seria retomado por Von Neumann na análise dos números ordinais: cada número ordinal é o tipo de ordem dos ordinais que lhe precede (ver nota 11).

Analisada no contexto da tradução de conceitos cantorianos para o universo de Dedekind, a contradição a que chegou Cantor toma uma natureza que diz respeito ao fato de ser W ser um conjunto ordinal limite. De fato, W satisfaz aos postulados de (1) a (4) que definem um ordinal limite. Dado que $\text{Lim } W$, então há um conjunto K tal que $\text{Suc } K_W$. Isto equivale a dizer que

$$K = M(W, \Sigma_n),$$

tal que $\cap\{K, W\} = W$. Além disso, $K \neq K_0$. Mas como W é a *totalidade dos ordinais*, então $K = M(W, \Sigma_n) \subseteq W$. Se $K \subset W$ (K é parte própria de W), então há algum x de W que não está em K . Mas isto é impossível, posto que $\cap\{K, W\} = W$. Então, temos que $K = W$. Mas neste caso, como $W = W_0$, uma vez que $\text{Lim } W$, temos $K = K_0$, o que está em contradição com a propriedade $K \neq K_0$, propriedade esta que tem de ser atribuída a K , posto que $\text{Suc } K_W$. Conclui-se disto, por redução ao absurdo, que $\sim\text{Lim } W$. Em outras palavras, W não é um conjunto ordinal limite. Mas isto não quer dizer que W não satisfaça aos postulados (1) – (5), mas que W não é um conjunto. De fato, a contradição a que se chega não vem da hipótese que $\text{Lim } W$, mas sim da tese de que W é a *totalidade completa dos ordinais*; da mesma forma, a contradição a que chegou Cantor não veio do fato de W ser bem ordenada, mas de uma *suposta compleição de W* .

Assim, quando se afirma que $\sim\text{Lim } W$, o que está sendo dito é que W não é um conjunto ordinal limite, *simplesmente porque W não é um legítimo conjunto*; para ser um autêntico conjunto, uma multiplicidade infinita e bem ordenada deve ser passível de aumento, isto é, *deve admitir algo que esteja fora de si, esperando para ser contado*. E, sem dúvida, esta não é o caso da seqüência W : tal seqüência representa a totalidade de tudo aquilo que é contável, não havendo nada fora dela capaz de contar ou enumerar W . Sobre a possibilidade de introdução de números que estivessem fora de W e que fossem capazes de contar o Absoluto, Hallett nos diz:

Admitamos que o Absoluto [a seqüência W] não possa ser contada na escala dos números transfinitos. Mas por que a contagem deve ser entendida como contagem na esfera do transfinito? [...] Por que Cantor toma o Absoluto como um máximo. Uma resposta que Cantor daria é que tentar matematizar o infinito seria simplesmente um erro categórico: tudo que é matematizável (ou numerável) já está no domínio do finito ou do transfinito, sendo o Absoluto simplesmente o que abarca todos estes [números

finitos ou transfinitos]. Não há números além do Absoluto, esperando para enumerar o Absoluto (HALLETT, [1997], p.211).

A totalidade W constitui a maior multiplicidade bem ordenada que satisfaz os postulados (1) – (4). Por conta disto, ela não pode ser um conjunto ordinal limite, *dado que não é conjunto*. Em Cantor, a noção de conjunto está essencialmente ligada a uma enumeração capaz de ser continuada; todo conjunto bem ordenado, limite ou não, é passível de ser aumentado. Esta é a intuição fundamental de Cantor a partir da qual a teoria dos números transfinitos se delineou. Tal intuição faz da concepção de Cantor da boa ordenação dos conjuntos infinitos algo muito próximo da contagem dos conjuntos finitos. Daí que uma reinterpretação da teoria dos números transfinitos de Cantor em conceitos presentes na teoria de Dedekind sobre os números finitos faça-se naturalmente: *a primeira nada mais seria do que uma extensão da segunda para domínios infinitos*.