4
Sobre a boa ordenação do infinito enumerável no pensamento de Deus

4.1
O problema da contagem do infinito

O matemático e eclesiástico tcheco Bernard Bolzano, um dos pioneiros no estudo matemático do infinito, era enfático ao dizer que o infinito não admite uma enumeração. Segundo Bolzano, admitir que uma pluralidade infinita[1] possa ter um número, é admitir que o infinito tem um último termo, tal como as pluralidades finitas. O índice de tal termo, nas pluralidades finitas, seria o número de tal pluralidade; para as pluralidades infinitas, no entanto, não há tal índice, posto que não há um último termo. Por conseguinte, uma pluralidade ou conjunto infinito de unidades não admite um número ou uma enumeração. Em sua *Wissenschaftlehre*, de 1837, Bolzano, partindo do conceito de *seqüência composta de unidades arbitrárias*, determina que somente as pluralidades finitas têm um número, sendo que as infinitas são ditas *incontáveis*. Segundo Bolzano:

> Considere uma seqüência que é formada tomando-se uma unidade de uma espécie arbitrária *A* como seu primeiro elemento e na qual todo membro adicional é uma soma que é derivada adicionando-se uma nova unidade a uma coisa que é igual ao número imediatamente predecessor. Todo membro desta seqüência eu chamarei de um *número*, tendo-se o cuidado de pensá-lo conforme o conceito que indica o modo como ele foi derivado. Vê-se facilmente que qualquer pluralidade finita pode ser representada por um número, na medida em que sua quantidade é determinada, mas nenhum número pode ser dado para uma pluralidade *infinita*, a qual eu chamo de *incontável* (BOLZANO, §87.4, [1972]).

Pela própria natureza de uma pluralidade infinita – isto é, pelo fato de ser uma pluralidade maior que *qualquer pluralidade finita* -, a sua enumeração é impossível. Se para enumerar necessitamos da totalidade atual dos *números finitos*, uma pluralidade que é maior que qualquer pluralidade finita de unidades

[1] Segundo Bolzano, uma pluralidade é um conjunto de unidades de uma espécie ***A***, isto é, um conjunto de objetos subsumidos a um conceito ***A***. Em linhas gerais, uma pluralidade, na acepção bolzaniana, é o que se entende, usualmente, pela extensão de um conceito ou propriedade ***A***(ver BOLZANO, [1993], p.60).

não pode ser enumerada. Se, como Bolzano o faz, entendemos por número uma *pluralidade finita* composta de unidades arbitrárias, a enumeração ou a contagem de uma pluralidade infinita é impossível; não há *números em estoque* suficientes para contar o infinito.

Entretanto, podemos pressupor que há mais números adequados à contagem ou à enumeração do que os considerados por Bolzano para tal fim. Posto que Bolzano parece tomar como os números da contagem os ordinais finitos, podemos introduzir números *não finitos* que sejam capazes de estender a contagem, tal como ela ocorre no âmbito das pluralidades finitas, para as pluralidades infinitas. Desta maneira, qualquer conjunto infinito terá seus elementos bem ordenados ou enumerados: enquanto o infinito se apresentar como *potencial*, sua enumeração se dará com os ordinais finitos; a partir do ponto em que o infinito é tomado como completo, *atual*, a enumeração se estenderá com estes novos números inteiros.

Se há o pressuposto de que a contagem realiza-se no infinito *da mesma maneira como ocorre no finito,* estamos permitidos a inferir que, dado um elemento de uma pluralidade infinita, enumerado com o ordinal não-finito γ, existem dois elementos desta pluralidade enumerados com os ordinais $(\gamma - 1)$ e $(\gamma + 1)$. Obviamente, tais ordinais são, como o ordinal γ, não-finitos. De fato, se a contagem no infinito se dá *tal e qual* ela ocorre no finito, qualquer elemento de um conjunto infinito ao qual seja atribuído um número terá um antecessor e um sucessor imediatos. Mas aí surge a questão: em que ponto deste conjunto infinito há a separação entre os domínios finito e infinito? Tomando-se um conjunto infinito para contagem e iniciando esta com o ordinal 1, em que ponto da contagem há a *passagem* propriamente dita entre o finito e o infinito? Em outras palavras, em que etapa da contagem passamos de um ordinal finito para o seu *sucessor infinito*? Obviamente, quando se dá esta passagem, não podemos pressupor que a mesma se dê de *forma imediata*, isto é, por intermédio da passagem de um ordinal γ ao seu sucessor $(\gamma + 1)$, posto que, se γ é infinito, também o será $(\gamma + 1)$; se γ é finito, então $(\gamma + 1)$ também é finito. Para possibilitar uma contagem do infinito que faça uso de uma passagem entre o finito e o infinito, é fundamental introduzir uma *ruptura* na totalidade dos números inteiros, sendo estes finitos ou infinitos. Dada uma extensão *completa* dos números inteiros, isto é, uma seqüência K da qual a seqüência $N = \{1, 2, 3,..., n, n + 1,...\}$ é uma parte própria, podemos introduzir um número inteiro δ, tal que, para qualquer ordinal finito k, vale a desigualdade $k < \delta$. Por conseguinte, δ não tem um antecessor imediato finito, embora admita sucessores não finitos do tipo δ, $(\delta + 1)$, $(\delta + 2)$, ..., $(\delta + n)$, $[\delta + (n+1)]$,... Temos assim a sucessão Σ de ordinais não-finitos: $\{\delta, (\delta + 1), (\delta + 2), ..., (\delta + n), [\delta + (n + 1)], ...\}$. Obviamente, temos que $N \cup \Sigma = K$ e $N \cap \Sigma = \varnothing$, além de que, para quaisquer m e γ, pertencentes a N e Σ, respectivamente, temos $m < \gamma$. Portanto, a introdução do número δ determina uma *secção* no domínio dos inteiros, finitos ou infinitos; e, a partir deste número δ, a contagem ou enumeração pode ser estendida naturalmente ao infinito, visto como uma totalidade completa.

Diante do problema de estender a contagem ao infinito, a solução de Cantor foi a de introduzir uma secção no infinito: o seu primeiro ordinal transfinito ω *divide o infinito entre o finito e o transfinito*. Assim como um número irracional - como $\sqrt{2}$, por exemplo - opera uma divisão na totalidade dos números racionais, introduzindo limites bem definidos de seqüências de racionais, o primeiro ordinal transfinito ω secciona o infinito, dividindo-o entre a totalidade dos números finitos e o domínio transfinito, o qual se inicia com ω, da mesma forma como os irracionais preenchem *os buracos* deixados nos racionais quanto à passagem aos limites de seqüências de racionais, o primeiro número transfinito ω, *limite de qualquer seqüência de números finitos*, *preenche*, por assim dizer, o hiato entre o finito e o infinito. Sobre a analogia entre a introdução dos irracionais como limites e a definição de ω, Cantor diz:

> ω é o menor número transfinito que é maior que do que a *todos* os números finitos; exatamente da mesma forma que $\sqrt{2}$ é o limite de uma certa variável, [que tem por escopo números racionais crescentes] ω é o limite dos números finitos, com uma diferença: a diferença entre $\sqrt{2}$ e estas frações aproximativas torna-se tão pequena quanto queiramos, enquanto $\omega - v$ [sendo v números inteiros finitos] é sempre igual a ω. Mas tal diferença não impede que vejamos ω tão definido e atual quanto $\sqrt{2}$, e, de forma alguma, altera o fato que ω é tão distinto dos números v que a ele tendem quanto $\sqrt{2}$ é distinto de suas frações aproximativas. Os números transfinitos são, em um certo sentido, *novas irracionalidades* e, de fato, ao meu ver, o melhor método para definir os números irracionais *finitos* é o mesmo, em princípio, utilizado para definir meus números transfinitos [ordinais]. Podemos mesmo dizer que os números transfinitos e os

números irracionais finitos, em sua mais profunda natureza, são similares, pois ambos são, marcadamente, modificações do infinito atual (CANTOR, [1941], p.77).

Pelo o que Cantor afirma, os números transfinitos são como os números irracionais, definidos como limites bem definidos de certos tipos de seqüências – no caso dos irracionais, seqüências de racionais crescentes; para o caso dos transfinitos, em especial o primeiro ordinal transfinito $\boldsymbol{\omega}$, seqüências de números finitos que também crescem em magnitude. Mas, na qualidade de limites bem definidos de números que lhe são menores, tanto os irracionais como os transfinitos determinam secções nos seus respectivos domínios de definição, posto que dividem tais domínios em duas classes disjuntas, sendo que qualquer elemento de uma das classes é sempre menor que qualquer elemento da outra.

Já em 1872, como vimos, Cantor se interessara pelo melhor método de definir os números irracionais, de tal forma que tal método não contivesse nada que não fosse estritamente aritmético, isto é, que fosse dado somente com operações e conceitos que pudessem ser reduzidos a noções e operações realizadas com os números racionais, dados em sua compleição. Nos seus *Grundlagen,* de 1886, Cantor retoma o problema da definição de um número irracional, apresentando-o como o limite de seqüências fundamentais de números racionais. Partindo da totalidade completa dos números racionais, Cantor define uma seqüência $\boldsymbol{a_v}$ de racionais como fundamental se, e somente se, para qualquer numero racional $\boldsymbol{\varepsilon}$, tão pequeno quanto queiramos, tal seqüência satisfazer a equação

$$|a_{v+m} - a_v| < \varepsilon,$$

para $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{m}$ pertencentes aos números naturais finitos e tão grandes quanto queiramos (CANTOR, [2000], p.899). Uma vez que tal seqüência satisfaça a tal desigualdade, dizemos que

$$\lim_{v \to \infty} (a_{v+m} - a_v) = 0.$$

Para cada seqüência fundamental bem definida, Cantor associou um número $\boldsymbol{b}$, o qual pode ser igual a zero, maior que zero ou menor que zero, conforme se dêem os seguintes casos, respectivamente (CANTOR, ibid, p.899):

(a) para valores suficientemente grandes de v, tem-se $|a_v| < \varepsilon$, sendo ε número racional tão pequeno quanto se queira;

(b) para valores de v maiores que um dado k, tem-se $a_v > p$, sendo p um número racional maior que zero;

(c) para valores de v maiores que um dado k, tem-se $a_v < p$, sendo p um número racional negativo.

Se $\boldsymbol{b}$ é o número determinado por uma seqüência fundamental, conforme as propriedades exclusivas (**a**), (**b**) e (**c**), ele será, então, $b = 0$ ou $b > 0$ ou $b < 0$. De posse do número adequadamente associado a uma seqüência fundamental, pode-se demonstrar que tal número é o limite desta seqüência (CANTOR, ibid, 900). Obviamente, duas seqüências fundamentais a_v e b_v podem ter o mesmo limite e, por conseguinte, estarem associadas ao mesmo número $\boldsymbol{b}$. Partindo deste fato, Cantor introduz os números reais, tanto racionais ou irracionais, como limites de seqüências fundamentais, de tal forma que, para qualquer número real $\boldsymbol{c}$, estão associadas todas as seqüências fundamentais que têm $\boldsymbol{c}$ por limite (CANTOR, ibid, p.900-901).

Enquanto a introdução de Cantor dos números baseia-se nas noções de limite e de seqüência fundamental, a apresentação do domínio dos reais de Dedekind, aduzida em 1872 no livro *Stetigkeit und irrationalen Zahlen*, está ancorada na noção de corte. Dedekind define tal conceito no domínio $\boldsymbol{R}$ dos números racionais da seguinte maneira:

> [Todo] número racional a opera uma separação de sistema R [dos racionais] em duas classes, tais que todo membro a_1 da primeira classe A_1 é menor que qualquer membro a_2 da segunda classe A_2; o número a é tanto o maior número da classe A_1 como o menor da classe A_2. Se, agora, qualquer separação do sistema R em duas classes A_1, A_2 for dada com esta propriedade característica, a saber, que todo número a_1 de A_1 é menor que todo número a_2 de A_2, então [...] denominamos tal separação de um corte e designamo-la por (A_1, A_2). Podemos dizer que todo número racional a produz um corte ou, estritamente falando, dois cortes, os quais, entretanto, não podem ser vistos como essencialmente distintos; este corte possui, além disto, a propriedade que tanto entre os números da primeira classe há um maior elemento, como um menor nos números da segunda classe. E, conversamente, se um corte possui tal propriedade, então ele pelo seu maior número, ou pelo seu menor (DEDEKIND, [1964], p.12-13).

Dado o domínio enumerável dos racionais, um corte, determinado por um número racional $\boldsymbol{a}$, nada mais é que uma secção (A_1, A_2) em tal domínio, de tal maneira que todos os elementos de $\boldsymbol{A_1}$ sejam menores que qualquer elemento de $\boldsymbol{A_2}$, além do que a intersecção entre os dois conjuntos que definem um corte seja igual a ***a***. A partir da noção de corte, Dedekind introduz os números reais como cortes específicos nos racionais. Alguns destes cortes, todavia, não são determinados por números racionais, como é o caso do corte ***(D, D')*** em que os membros de ***D'*** são números racionais cujas raízes quadradas são maiores que um número inteiro ***D*** que não é raiz quadrada de nenhum inteiro e, além disso, satisfaz a inequação

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2,$$

em que λ é um inteiro positivo (DEDEKIND, ibid, p.13). Para tais cortes, bem definidos no domínio dos racionais, mas que não encontram imagem racional, Dedekind associou os números irracionais, de tal forma que, para cada número real, existe um único corte associado e vice-versa.(*ibid*, p.15).

De posse dos números reais entendidos como cortes nos racionais, Dedekind pôde apresentar as propriedades fundamentais dos reais, visto como um domínio ordenado. Sendo ***a***, ***b*** e ***c*** números reais definidos por cortes nos racionais, temos (DEDEKIND, *ibid,* p.19-20):

1) ***Se a > b e se b > c, então a > c.***
2) ***Se a ≠ b, então existem infinitos números entre a e b.***
3) ***Seja d um número real. Então o domínio R dos reais pode ser divido entre dois domínios T e T', tais que d tanto pode pertencer a T ou a T', com a condição de que T ∩ T' = ∅; para quaisquer t e t' pertencentes a T e a T', respectivamente, tem-se t < d e d < t'.***
4) ***Se o domínio dos reais R é dividido entre duas classes T e T', tais que, para quaisquer t e t' pertencentes a T e a T' respectivamente, tem-se t < t', então existe um e somente um número real d que produz tal divisão.***

A propriedade ***4)*** dos números reais Dedekind denominou de *continuidade* (*ibid*, p.20). É por meio de tal propriedade que há a certeza de que nenhuma secção em ***R*** é feita em um lugar em que não há um número correspondente. Juntamente com propriedade ***3),*** a condição ***4)*** nos assegura uma biunivocidade entre os números reais e os cortes que podem ser efetuados nos reais: dado um número real ***a***, há um único corte nos reais que o define; dado um corte em ***R***, há sempre um e somente um número real ***a*** determinado por tal corte.

Ciente dos trabalhos de Dedekind sobre os números reais, Cantor aponta que a propriedade *4),* que Dedekind julga essencial para garantir a continuidade dos reais**,** não é exclusiva dos domínios ditos contínuos; ao contrário, os números naturais, paradigma de descontinuidade, também satisfazem tal critério de continuidade. Diz Cantor:

> A ênfase que Dedekind coloca [...] expressamente sobre a propriedade IV, como constituindo a essência da continuidade, não pode dar lugar a mal-entendidos? [...]. Esta propriedade também pertence ao conjunto de todos os números inteiros, que podem ser considerados como o protótipo da descontinuidade (CANTOR in: DUGAC, [1976], p.119).

Dada a totalidade dos números naturais finitos, qualquer secção que aí se realize conforme as indicações contidas na condição ***4)***, também será determinada por um e somente um número inteiro. Portanto, como propriedade essencial dos domínios contínuos, a propriedade ***4***) parece não servir a contento. Diante da observação de Cantor a este respeito, Dedekind aponta o fato que todos os domínios contínuos devem possuir, ao mesmo tempo, as propriedades ***1), 2), 3***) e ***4***); a propriedade ***4***), simplesmente, assegura que os domínios que possuem ***1), 2)*** e ***3***) – o que não é o caso dos naturais finitos, posto que lhes faltam as propriedades ***2)*** e ***3***) -, mas que não são contínuos, tornem-se contínuos pelo intermédio de ***4)*** (DEDEKIND, *ibid,* p.119). Confrontado com a réplica de Dedekind, Cantor mostrou-se convencido (*ibid*, p.119).

Cantor, mesmo concordando com os pressupostos dedekindianos da continuidade, nunca aprovou a introdução dos números reais como adequada. Para Cantor, nos contextos da análise, os reais se apresentam, em sentido operacional, como limites de seqüências fundamentais e, por isso, tratá-los como cortes, nestes contextos, soa artificial. Eis o que Cantor diz, em seus *Grundlagen*:

> Esta definição [dos números reais como cortes] tem a grande desvantagem de que os números da análise nunca ocorrem como ‘cortes’, mas admitem ser postos nesta forma com grande dispêndio de artificialidade e esforço (CANTOR, [2000], p.899)[2].

---

[2] De fato, Dedekind não *identificou* os números reais com os cortes, mas associou o fenômeno dos cortes, nos números racionais, como causados pelos números reais. Em relação aos números irracionais compreendidos como algo relacionado a cortes nos racionais, Dedekind diz que “[os irracionais] são alguma coisa nova (distinta do corte), algo que corresponde ao corte e do qual, creio eu, é o causador” (DEDEKIND in: RECK, [2003], p.386).

Embora descartasse o conceito de corte como profícuo ao estudo dos reais, Cantor parece ter importado a noção de corte para sua teoria dos números transfinitos. De fato, os ordinais limites de Cantor são perfeitamente analisados à luz das noções de limite e de corte, sendo esta última tomada em sentido generalizado, não tão preso ao contexto dos números reais, como é o caso dos cortes dedekindianos. Para ver como isto se dá, primeiramente, é adequada a apresentação do conceito de série fundamental.

Nas *Beiträge*, Cantor nos diz que uma série a_v – ou, mais propriamente, uma seqüência – é fundamental quando seus índices podem tomar como valores somente números ordinais finitos, tomados em sua totalidade. Uma série fundamental será ascendente quando, para todo v, $a_v < a_{v+1}$; será descendente, quando, para todo v, $a_v > a_{v+1}$. Como exemplo arquetípico de uma série fundamental ascendente, está a sucessão dos números naturais em ordem crescente; como exemplo de uma série fundamental descendente, tomam-se os números inteiros negativos, ordenados conforme os seus valores decrescentes (CANTOR, [1941], p.129).

Dada uma série fundamental ascendente α_v, cujos termos são números ordinais, o limite de tal série é definido como

$$\mathbf{Lim}_{v \to \infty} \alpha_v = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_{v+1} - \alpha_v) + \dots,$$

sendo tal limite "[o] número que se segue, em ordem de magnitude, depois de [todos os números α_v]" (CANTOR, *ibid*, p.158). Para os ordinais finitos, tal número é o primeiro ordinal transfinito ω. Dada a totalidade dos números inteiros finitos $N = \{1, 2, 3,.., n, n + 1, ... \}$ com ω sendo o seu limite, temos que

$$\omega = 1 + 1 + 1 \dots 1 + 1 \dots$$

De fato, posto que ω é o número inteiro que se segue após todos os naturais finitos, temos que ω é o limite de qualquer série fundamental ascendente composta de números finitos.

Como já foi visto, a seqüência W de todos os ordinais tem como menor segmento infinito o intervalo $[1; \omega)$, denominado de números da primeira classe. A partir de ω, iniciam-se os números da segunda classe, os quais compreendem o intervalo $[\omega; \omega_1)$, sendo ω_1 o primeiro ordinal capaz de contar um conjunto não-enumerável. Se considerarmos o intervalo $[1; \omega_1)$, veremos que nele há uma infinidade de ordinais limites, sendo ω o primeiro deles. Todos estes ordinais limites são definidos da mesma forma que ω: dada uma seqüência fundamental ascendente b_v de números transfinitos quaisquer, o seu limite será o primeiro número transfinito γ maior que todos os b_v, em que v toma por valores todos os números inteiros finitos. Assim, temos que

$$\gamma = \mathbf{Lim}_{v \to \infty} b_v = b_1 + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_v - b_{v-1}) + \ldots,$$

e, portanto, o intervalo $[b_1; \gamma_j]$, *espécie de entorno do ordinal limite* γ, estrutura-se como uma seqüência cujo número ordinal é $\omega + (j + 1)$, isto é:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_v,\ b_{v+1},\ \ldots,\ \gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_{(j-1)},\ \gamma_j$$

Analisando tal entorno, comum a qualquer ordinal limite pertencente aos números da segunda classe, facilmente se vê que os ordinais limites determinam cortes no intervalo $[1; \omega_1)$. Para ver que este é o caso, cabe uma definição de corte mais ampla que a apresentada por Dedekind, mas que, no que é específico da definição dedekindiana, se mostra equivalente. Para tanto, faz-se propícia a definição de corte dada por Fraenkel (FRAENKEL, 1961, p.157):

Se K' e K'' são subconjuntos não vazios e disjuntos de um conjunto K, tais que K' $\cup$ K'' = K, então diz-se que K' e K'' determinam um corte em K – em símbolos, $(K'/K'')_K$.

Por disjunção lógica, há quatro possibilidades que se prestam para caracterizar o tipo de corte realizado em ***K:***

a) K' tem um último elemento e K'' tem um primeiro elemento;
b) K' tem um último elemento e K'' não tem um primeiro elemento;
c) K' não tem um último elemento e K'' tem um primeiro elemento;
d) K' não tem um último elemento e K'' não tem um primeiro elemento.

No caso ***a***), o corte determinado denomina-se um *salto;* em ***b)*** e ***c*)**, o corte é *contínuo;* e, em, ***d),*** denomina-se uma lacuna. Quando todos os cortes realizados em um conjunto bem ordenado são contínuos, o conjunto é dito contínuo (FRAENKEL, *ibid,* p.157).

Como vimos, em Dedekind todos os cortes possíveis de ser feitos nos reais são do tipo ***b)*** ou ***c).*** Isto garante que os reais formem um contínuo. Por sua vez, na seqüência dos números naturais finitos, qualquer corte aí realizado determina um salto. Nos racionais, os cortes tanto são contínuos quanto lacunas, sendo que estas ocorrem naqueles lugares que não correspondem a nenhum número racional, mas a números irracionais.

Pela definição de corte de Fraenkel, os ordinais limites de Cantor operam cortes de tipo ***c)*** no domínio dos números de segunda classe e, portanto, são contínuos. Por conseguinte, cada ordinal limite introduz na seqüência ***W,*** em especial nos números de segunda classe, *aspectos de continuidade;* se os números da segunda classe são as enumerações que se pode fazer no âmbito do que é infinitamente enumerável, isto se dá com a presença de pontos em que ***W*** é análoga aos números reais. Desta maneira, o já aludido paralelo mencionado por Cantor entre os ordinais limites e os números irracionais torna-se mais enfático ainda, posto que os ordinais transfinitos limites têm vizinhanças similares às dos irracionais, dado que, como estes, operam cortes contínuos na seqüência ***W.***

4.2
A passagem do enumerável para o não-enumerável: o teorema de 1891 e a perfeita intuição divina dos cardinais finitos

Como já foi visto, a segunda classe de números encerra todos os números transfinitos que se prestam à boa ordenação de um infinito enumerável completo, atual. Dados infinitos com potência maior que $\aleph_0$, para que as suas boas ordenações façam-se possíveis, é necessário apelarmos para os números da terceira classe de números, cujo primeiro número é ω_1. O intervalo de ***W*** que contém todos os números capazes de contar o não enumerável é $[\omega_1; \omega_2)$, sendo que ω_2 é o primeiro ordinal da quarta classe de números, isto é, os números que efetivamente contam um infinito de cardinalidade $\aleph_2$ (CANTOR, [2000], p.931-932).

Se nos limitarmos apenas às segunda e terceira classes de números, surge uma questão que o próprio Cantor, como já foi visto, colocou a Dedekind: como se faz a passagem entre o enumerável e o não enumerável, dado que é um teorema da teoria dos números ordinais que, qualquer seqüência de números da segunda classe, tem por limite um número da segunda classe? (CANTOR, ibid, p.911-912; p.875-876). De fato, o número ω_1 é definido como o número ordinal que se segue imediatamente após todos os números da segunda classe e, por conta disto, ele é tão postulado quanto ω; da mesma forma que não há um processo ou operação que, partindo de números finitos e em passos finitos, nos dê ω como resultado, não há uma operação com os números da segunda classe que, em etapas infinitas e enumeráveis, nos dê ω_1. Assim como para alcançar ω é necessário que todos os naturais finitos estejam dados atualmente, para chegarmos a ω_1 é necessário que todos os números da segunda classe, em sua compleição não enumerável, sejam dados.

Surge a questão de determinar se, realmente, há infinitos não enumeráveis, para os quais os números da terceira classe servem como enumerações. Já em 1874, como foi visto, Cantor demonstrara, mediante uma técnica de encaixes de intervalos reais, que os números reais têm cardinalidade maior que os inteiros. Entretanto, uma demonstração mais simples de tal fato é dada somente em 1891, no artigo intitulado *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Precipuamente, neste artigo, Cantor pretende demonstrar a não enumerabilidade de um conjunto M de elementos do tipo

$$E = (x_1,\ x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots),$$

tais que os valores dos x_ν *são, exclusivamente*, m ou n (CANTOR. 2000, p.920).

A fim de demonstrar que o conjunto M não é enumerável, Cantor passa à tarefa de mostrar que é impossível uma correspondência bijetiva entre tal conjunto M e a totalidade dos cardinais finitos, posto que qualquer conjunto enumerável admite uma correspondência bijetiva com os cardinais finitos (CANTOR, [1941], p.104). Para demonstrar que tal correspondência é impossível, Cantor apresenta os elementos de M dispostos em uma seqüência do tipo (CANTOR, [2000], p.921).

$$\begin{aligned}
E_1 &= (a_{1,1}\ \ a_{1,2} \ldots a_{1,\nu} \ldots), \\
E_2 &= (a_{2,1}\ \ a_{2,2} \ldots a_{2,\nu} \ldots), \\
&\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
E_\mu &= (a_{\mu,1}\ a_{\mu,2} \ldots a_{\mu,\nu} \ldots). \\
&\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots
\end{aligned}$$

Se M é um infinito enumerável, a matriz acima enumera todos os seus elementos, sendo que μ toma por valores os números naturais finitos, tomados em sua totalidade. Se M é enumerável, então tal seqüência E_μ contém todos os elementos de M. Todavia, Cantor define uma elementos $E_0 = (b_1, b_2, b_3, ...)$ que, para qualquer valor de μ, sendo tal valor um cardinal finito, não pode estar na matriz acima. Os elementos b_v de E_0 são definidos como se segue:

$$Se \ a_{v,v} = m, \text{ então } b_v = n;$$

$$Se \ a_{v,v} = n, \text{ então } b_v = m.$$

Obviamente, E_0 não está listado na matriz acima, pois difere de qualquer E_μ no mínimo, no ***v*-ésimo** termo. Segundo Cantor, tal demonstração "é notável não só por causa de sua simplicidade, mas, ainda mais importante, pelo princípio que daí se segue e que pode ser estendido imediatamente como um teorema geral, segundo o qual as potências de agregados bem definidos não têm um máximo, ou [...], o que é equivalente, que, dado um qualquer agregado L, podemos produzir um agregado M cuja potência é maior que L" (CANTOR, ibid, p.921-922). Desta maneira, o que Cantor procurou demonstrar, com seu teorema, é o fato de que os números cardinais ou potências não têm um máximo; e, portanto, aos conjuntos enumeráveis devem suceder conjuntos não enumeráveis ou com potências maiores que $\aleph_0$.

Uma das grandes preocupações da teoria cantoriana dos conjuntos é garantir uma comparabilidade entre os conjuntos infinitos, dado que, tradicionalmente, os conjuntos infinitos sempre foram vistos como incomparáveis[3]. Em conformidade com tal preocupação, com o teorema acima, Cantor julgou ter dado uma prova inconteste de que há conjuntos maiores que os naturais finitos. Para conseguir tal feito, Cantor definiu um termo que não pode estar enumerado em M. Se assim é o caso, a potência do conjunto M deve ser maior que $\aleph_0$ e o elemento E_0, em

[3] Galileu Galilei, no século XVII, já apontara para uma pressuposta incomparabilidade entre os infinitos. Nos seus *Diálogos entre duas Novas Ciências*, Galileu, na voz de Sagredo, afirma que "[o]s atributos "maior que", "menor que" e "igual a" não são aplicáveis nem na comparação de infinitos entre si, nem na comparação de quantidades finitas com quantidades infinitas"(GALILEU GALILEI, [2005], p.80).

Segundo Galileu, a comparação entre uma quantidade finita e infinita é impossível pelo fato de que, se se admite que uma grandeza m infinita é maior que uma grandeza finita n, então haveria um número k finito, tal que $kn > m$, o que é impossível (GALILEU GALILEI, *ibid*, p.79). Neste argumento de Galileu, está a intuição dos números finitos como um domínio arquimediano, além da tese tácita da impossibilidade de enumerar o infinito, o que é compartilhado, como se viu, por Bolzano relação a uma boa ordenação de ***M***, terá por número ordinal um número que não pode estar contido na segunda classe de números, isto é, terá por índice um ordinal β tal que $\omega_1 \leq \beta$.

Com isto em mente, surge em relação ao teorema de Cantor um aspecto interessante: Cantor demonstra que a disposição dos elementos de ***M,*** vista geometricamente como um arranjo matricial, não pode ser uma matriz do tipo $\gamma\times\omega$, sendo γ um ordinal da segunda classe de números, mas sim uma matriz do tipo $\beta \times \omega$, em que β é um ordinal que está presente em uma classe de números cujo número cardinal é maior que $\aleph_1$ .De fato, se a disposição de ***M*** fosse algo como uma matriz do tipo $\omega 2 \times \omega$ - como aconteceria se, por exemplo, a disposição dos E_μ fosse algo como $E_1, E_3, \ldots , E_{2n-1}, \ldots ,E_2, E_4, \ldots, E_{2n}, \ldots$ - o argumento de Cantor continuaria válido, uma vez que E_0, como definido por Cantor, ainda assim estaria fora de enumeração. Isto porque todas as *permutações possíveis* feitas com os cardinais finitos, de tal forma que o resultado final destas permutações seja um conjunto bem ordenado, dão origem a todos os números da segunda classe de números. Por *permutação* ou *arranjo* com os cardinais entende-se uma função ***p*** definida para os cardinais finitos, cujo conjunto imagem seja também tais cardinais, tal que, para duas permutações ***p*** e ***p'***, para quaisquer cardinais finitos ***m*** e ***n***, não necessariamente distintos, temos $p(m) \neq p(n)$. O conjunto ***P*** da totalidade das permutações dos cardinais tem número cardinal igual a $\aleph_0^{\aleph_0} = c$, sendo ***c*** o cardinal do contínuo. Portanto, ao definir um elemento de ***M*** que não está relacionado com nenhum cardinal finito, independentemente da ordem em que tais cardinais estejam dados, Cantor demonstra que a totalidade ***M*** não é enumerável, tendo, por conseguinte, um cardinal maior que $\aleph_0$. Portanto, o termo E_0, demonstradamente impossível de ser associado a qualquer cardinal finito, não pode aparecer em nenhuma permutação possível envolvendo os termos E_μ, sendo μ um cardinal finito. Na hipótese do termo E_0 aparecer listado após todas as permutações terem sido feitas –e, por conseguinte *todos os números da segunda classe de números terem sido utilizados* -, então o termo E_0 apareceria indexado com o número ordinal χ, sendo χ o primeiro ordinal capaz de enumerar o contínuo; se tomamos a hipótese de contínuo como verdadeira, então tal número é igual ω_1, o primeiro ordinal da terceira classe de números.

Como já foi visto, Cantor considera a seqüência ***W*** de todos os ordinais como significativa da absolutamente infinita capacidade de Deus de contar ou enumerar. No pensamento divino, tais números estariam dados desde sempre, em sua compleição, de uma maneira que o entendimento humano não consegue compreender; tentar compreender o infindável pensamento de Deus é comprometer-se inexoravelmente com a contradição, dado que a multiplicidade ***W,*** quando tomada pelo pensamento humano como um todo completo, engendra paradoxos. Por conseguinte, em relação a ***W,*** cabe ao entendimento humano somente considerá-la em seus segmentos próprios transfinitos, os quais representam as infindáveis possibilidades divinas de contar o infinito: qualquer infinito, de qualquer tamanho, tem todos os seus elementos contados um a um na mente de Deus. Em uma carta a A.Eulenberg, de fevereiro de 1886, Cantor diz:

> O Transfinito, com sua abundância de [...] formas, aponta necessariamente para o Absoluto, para o "verdadeiro Infinito", a cuja magnitude nada pode ser adicionado ou subtraído e que, portanto, deve ser visto como um máximo absoluto. Este ultrapassa, por assim dizer, o poder humano de compreensão e não permite uma determinação matemática (CANTOR, [1994], p. 105).

O pensamento de Deus é absolutamente infinito, assim como a sua capacidade de enumerar ou bem ordenar. Na mente divina, os números inteiros estão dados de forma absoluta, intuídos um a um e distintamente. Por conseguinte, Deus, do alto de seu infinito poder criador, pode ter criado um mundo infinito; e isto deve ter sido mesmo o caso, dado que, segundo Cantor, há duas provas possíveis da infinitude do mundo criado pelo poder divino. A primeira delas baseia-se no próprio conceito de Deus. Em sua excelsa perfeição, Deus, por um ato de benevolência, fez o mundo infinito. Desta maneira, a infinitude do ser divino, mesmo que de forma parcial, pode-se manifestar no mundo concreto (CANTOR, *ibid,* p.103). A segunda demonstração é de natureza *a posteriori* : para Cantor, a complexidade dos fenômenos físicos e biológicos aponta para a infinitude do mundo (*ibid*, p.103)[4]. De posse da convicção de que o mundo criado por Deus é infinito, Cantor, na mesma carta a Eulenberg, afirma:

[4] Textualmente, Cantor afirma que "a tese de um Transfinitum in natura naturata, ao contrário da tese oposta, torna possível uma melhor explicação dos fenômenos, especialmente das manifestações físicas e orgânicas"(CANTOR, *ibid*, p.103).

[P]or sua vez, o Transfinito não só preenche o vasto campo das possibilidades do que pode ser conhecido por Deus, como também oferece um rico campo de investigação ideal, que sempre pode ser incrementado, garantindo realidade e existência, como estou convencido, ao mundo das coisas criadas [...], proporcionando à Magnificência do Criador [...] uma maior expressão do que aquela que ocorreria se houvesse meramente um “mundo finito” (CANTOR, ibid, p.105).

Segundo Cantor, Deus, com a intenção de apresentar uma expressão superlativa de suas perfeição e magnificência, criou o mundo infinito. Tal mundo infinito, independentemente de qual seja a sua cardinalidade, está todo ele enumerado na mente de Deus. Para enumerar sua criação, o criador dispõe da seqüência ***W,*** cujas partes constitutivas são as potências, os *alefs.*

Dependendo do tamanho do mundo, de sua infinitude, a contagem ou enumeração deste será feita conforme o segmento correspondente de ***W.*** Suponhamos que o mundo criado por Deus seja um infinito de cardinalidade igual a $\aleph_0$. Como se daria, em princípio, uma possível enumeração de todos as coisas criadas deste mundo, utilizando-se, para tanto, a seqüência ***W***?

Para Cantor, o princípio da boa ordenação é uma lei fundamental da lógica - um axioma, por assim dizer, do pensamento humano (FRAENKEL, [1961], p.222). Mediante a seqüência ***W***, que na inteligência humana só pode ser concebida como intrinsecamente incompletável, o pensamento humano pode ordenar qualquer agregado infinito ***S.*** Como nos aponta Fraenkel, Cantor considerava que a enumeração de um infinito ***S,*** qualquer que seja o tamanho deste, se daria retirando um a um os elementos deste infinito, relacionando a cada retirada sucessiva uma posição correspondente em ***W.*** Se o infinito ***S*** é enumerável, então ao último elemento retirado de ***S*** é atribuído um ordinal da segunda classe de números. Segundo Fraenkel:

Cantor denominava o princípio da boa ordenação uma “lei fundamental da lógica”[...] [E]le prometeu prová-lo, promessa esta que nunca foi cumprida. À época do Terceiro Congresso Internacional de Matemática [em 1904], uma aplicação errônea da desigualdade de König parecia ter provado a existência de conjuntos que não poderiam ser bem ordenados[5] [...] Cantor se negou a abandonar a sua convicção.

---

[5] A desigualdade de König é a seguinte: se as funções unívocas ***f*** e ***g*** atribuem para cada membro ***t*** de um conjunto não vazio ***T*** os cardinais $f(t) = a_t$ e $g(t) = b_t$, tal que $a_t < b_t$, para cada ***t***, então Σ_t

> O que Cantor tinha em mente era um argumento do seguinte tipo. Retire de $\boldsymbol{S}$ um membro arbitrário s_1 como seu primeiro elemento, de complementar $S - \{s_1\}$ qualquer outro membro s_2 como seu segundo elemento, etc; se $\boldsymbol{S}$ é infinito, então um arbitrário membro s_ω de $S - \{ s_1, s_2, ... ,s_k, ... \}$ deve ser posicionado após todos os s_k. Continue desta maneira mediante os índices retirados da série dos ordinais [$\boldsymbol{W}$], até que $\boldsymbol{S}$ se extinga.(FRAENKEL, ibid, p.223)

Embora Fraenkel aponte para certas dificuldades no raciocínio de Cantor[6], o que está ilustrado acima é uma maneira intuitiva e natural de contar o infinito, da mesma forma como os conjuntos finitos são contados. O que se exige, para tal contagem, é que haja números capazes de enumerar os elementos de $\boldsymbol{S}$ que não foram numerados pelos ordinais finitos; daí o papel fundamental da seqüência $\boldsymbol{W}$, na qualidade de seqüência absoluta dos números inteiros. Com tal argumento intuitivo, Cantor nos assegura que a inteligência humana, participante da inteligência de Deus, possa contar ou enumerar qualquer infinito.

Mas o que dizer da contagem do infinito realizada por Deus? Pode-se dizer que ela é idêntica à realizada pela inteligência humana? Dado um infinito enumerável para ser contado, a inteligência humana, após uma boa ordenação feita nos moldes citados por Fraenkel, chegaria a um último termo indexado com um ordinal da segunda classe de números. Portanto, na qualidade de um todo completo e bem ordenado, o infinito em questão apresentaria cortes contínuos, os quais estão associados, como vimos, aos ordinais limites. Entretanto, tais cortes contínuos são introduzidos na contagem humana justamente porque o pensamento humano não conhece a totalidade completa dos números finitos, embora possa admitir que tal

---

$a_t < \Pi_t\, b_t$, em que os símbolos "Σ" e "Π", indicam, respectivamente, o somatório e o produto cartesiano entre cardinais (FRAENKEL, *op.cit*, p.98).

[6] Fraenkel aponta três objeções ao argumento cantoriano. A primeira delas é o fato de estar implícito na enumeração do infinito que a seqüência $\boldsymbol{W}$ pode enumerar qualquer infinito, isto é, de que não há um hipotético infinito maior que $\boldsymbol{W}$. A segunda objeção reside na arbitrariedade dos elementos retirados do conjunto infinito a ser enumerado. Fraenkel julga que poder-se-ia exigir uma *lei* bem definida segundo a qual os elementos do infinito seriam enumerados. A terceira objeção direciona-se ao aparente pressuposto de que tais retiradas estariam feitas no tempo, o que exigiria uma quantidade infinita de instantes temporais para que um infinito seja completamente enumerado.

Das três objeções mencionadas, somente a primeira Fraenkel considera digna de nota. As duas restantes são facilmente resolvidas pelo axioma da escolha e pelo princípio de que a enumeração do infinito não se dá em um tempo psicológico, mas, ao contrário, é um processo atemporal, de tal modo que a enumeração completa do infinito se dê em um único ato intelectivo (FRAENKEL, *ibid*, p.223) totalidade exista; na mente de Deus, por sua vez, os índices finitos, em sua totalidade, são perfeitamente conhecidos um a um e, portanto, a contagem divina, em princípio, não teria cortes contínuos. De fato, Cantor estava ciente de que o pensamento de Deus opera de um jeito incompreensível ao ser humano, transformando o que é infinito ao entendimento humano em algo finito para a compreensão divina. Não é à toa que no artigo *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* de 1887, sobre os números transfinitos, Cantor anexasse a seguinte nota de rodapé, uma citação clássica de Santo Agostinho (HALLETT, op.cit, p.35):

> Todo número é definido pelo seu único caráter, tal que não há dois números iguais. Eles são distintos uns em relação aos outros e os números individuais são finitos, mas, como uma classe, são infinitos. Isto significa que Deus não conhece todos os números, porque estes são infinitos? Seria o conhecimento de Deus limitado até certo ponto, e então esgotar-se-ia? Ninguém pode ser louco o suficiente para dizer isto. Não duvidemos, portanto, que todo número é conhecido por Deus "cujo entendimento não pode ser numerado". Embora a série infinita de números não possa ser numerada, este infinito numérico não está fora da compreensão daquele "cujo entendimento não pode ser numerado". E assim, se tudo aquilo que é compreendido é definido finito ou infinito pela compreensão de quem conhece, então todo infinito é, de uma forma inexplicável, finito para Deus, posto que é compreensível ao Seu conhecimento. Portanto, se o infinito dos números não pode ser infinito para o conhecimento de Deus, no qual está inserido, quem são os homens para impor limites ao Seu conhecimento (SANTO AGOSTINHO, Cidade de Deus, XII, 19).

Corroborando o que é dito por Santo Agostinho, há o seguinte trecho de uma carta de 1888, de Cantor ao padre Ignatius Jeiler, em que é dito:

> Cada número cardinal finito, individualmente, está no intelecto de Deus tanto como uma representação como uma forma unificada de todas as infindáveis coisas compostas que possuem o cardinal em questão. Todos os cardinais finitos estão, portanto, dados distinta e simultaneamente no intelecto de Deus. Eles formam, em sua totalidade, um agregado, algo unificado em si mesmo e limitado pelo restante do conhecimento de Deus, [formando] novamente um objeto do conhecimento de Deus (CANTOR in: *op. cit,* p.35).

A totalidade dos números cardinais está no pensamento de Deus como um objeto determinado, distinto dos outros objetos presentes no intelecto divino. Contando somente com esta totalidade de cardinais finitos, que no pensamento divino se dispõe como a primeira classe de números, Deus está apto a enumerar qualquer conjunto enumerável, sem a presença de cortes contínuos. Isto porque a intuição perfeita de todos os cardinais finitos, tomados um a um, equivale simultaneamente à intuição de todos os arranjos ou permutações que tais cardinais podem realizar, tal que tais permutações gerem conjuntos bem ordenados. Qualquer número da segunda classe, sendo um ordinal limite ou não, pode ser visto como o resultado de um arranjo com os cardinais finitos. Por exemplo, o ordinal $\boldsymbol{\omega 3}$, o qual consiste de uma abstração feita na natureza dos elementos de um conjunto do tipo $\{a, a', a'',...,b,b',b'',...,c,c',c'',...\}$, pode resultar de um arranjo dos cardinais finitos do tipo $p = \{1,2,3,5,7,...,2^2,3^2,5^2,7^2,...,2^3,3^3,5^3,7^3,...\}$ por abstração, isto é, desconsiderando-se a natureza dos elementos pertencentes a ***p.*** Sem dúvida, dentro dos cardinais finitos, vistos como um todo completo de cardinalidade $\aleph_0$, existem uma quantidade infinita e enumerável de seqüências tipo ω, posto que:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + ... + \aleph_0 + ...$$

Assim sendo, qualquer enumeração de um infinito de cardinalidade $\aleph_0$ que faça uso de ordinais limites e, portanto, de cortes contínuos, reduz-se a um arranjo bem ordenado com os cardinais finitos, intuídos um a um e perfeitamente por Deus. Desta forma, como os cardinais finitos formam uma seqüência ω cujos cortes são todos *saltos,* chega-se à conclusão de que o intelecto divino, ao bem ordenar um infinito enumerável, *pode fazê-lo mediante uma única seqüência tipo* ω, *sem a necessidade dos supostos cortes contínuos, posto que estes nada mais seriam que símbolos da imperfeita inteligência humana, incapaz de intuir completamente os cardinais finitos, e muito menos capaz de intuir com perfeição e de forma exaustiva todos as permutações bem ordenadas possíveis de ser feitas com tais cardinais finito*s[7].

[7] Como já foi visto, na demonstração de 1891 de que há conjuntos não enumeráveis, há tacitamente o pressuposto de que, qualquer que seja a disposição geométrica da matriz de qual parte Cantor como uma enumeração completa do conjunto que se pretende demonstrar como não-enumerável, sempre há um termo que não está listado nesta matriz. Esta demonstração permanece

4.3 Os tipos e números ordinais em Cantor

Dentre os conceitos introduzidos por Cantor em sua teoria dos conjuntos, é de suma importância a noção de conjunto simplesmente ordenado. É por meio de tal conceito que muitos aspectos relativos à ordem natural dos conjuntos contínuos ou dos conjuntos densos são estudados. De fato, quando se deseja avaliar as relações de ordem existentes entre conjuntos de pontos, quaisquer que estes sejam, o que a teoria cantoriana dos conjuntos têm a oferecer são conceitos correlatos à noção de conjunto simplesmente ordenado; dentre tais conceitos, destaca-se o de *tipo ordinal*.

A apresentação da noção de conjunto simplesmente ordenado se dá no §7 das *Beiträge*, de 1895. Segundo Cantor, podemos chamar um agregado **M** de "simplesmente ordenado"

> [S]e há uma ordem definida de precedência entre seus elementos $\boldsymbol{m}$, tal que, dado dois elementos $\boldsymbol{m_1}$ e $\boldsymbol{m_2}$, um deles é o "menor" e o outro é o "maior"; e se dados três elementos $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$ e $\boldsymbol{m_3}$, se $\boldsymbol{m_1}$ é menor que $\boldsymbol{m_2}$ e $\boldsymbol{m_2}$ é menor que $\boldsymbol{m_3}$, então $\boldsymbol{m_1}$ é menor que $\boldsymbol{m_3}$ (CANTOR, [1941], p.110).

De fato, o que Cantor define como um conjunto simplesmente ordenado é qualquer agregado em que se verifique uma relação de ordem total[8]. Tal relação

---

válida, independentemente da disposição inicial da matriz, porque Cantor apresenta um termo que não está indexado com nenhum *cardinal*. Desta maneira, fica implícito que qualquer disposição desta matriz, posto que pressupostamente enumerável, daria origem a um infinito bem ordenado por um número da segunda classe de números.Mas qualquer número da segunda classe de número pode ser visto como uma permutação, no pensamento divino, dos cardinais finitos. Assim, se se demonstra que o número ausente na enumeração é impossível de ser associado a qualquer cardinal, demonstra-se de imediato que o mesmo também não pode ser enumerado por nenhuma permutação de números cardinais. Fica claro, portanto, que o teorema de 1891 faz uso *tácito* da tese de que qualquer número da segunda classe de números é o resultado de permutações, distintas dois a dois, da seqüência $\boldsymbol{\omega}$ dos cardinais finitos.

Obviamente, afirmar que qualquer ordinal da segunda classe de números resulta de arranjos bem ordenados feitos com os cardinais finitos não é o mesmo que afirmar que tais ordinais têm uma existência, por assim dizer, *menor* na mente divina. Simplesmente, o que está sendo dito aqui é que o pensamento divino, uma vez que intui todos os cardinais finitos, *tomados um a um,* não necessita, para a boa ordenação de um infinito enumerável, de números ordinais maiores que $\boldsymbol{\omega}$, posto que bastam os cardinais finitos para a boa ordenação de qualquer infinito de cardinalidade $\aleph_0$. Neste sentido é que se diz que Deus, para bem ordenar o enumerável, só faz uso de cortes que são saltos. Entretanto, os demais ordinais da segunda classe de números estão tão presentes na mente de Deus quanto $\boldsymbol{\omega}$, na qualidade de *imagem abstrata* de uma *permutação completa de todos os cardinais*, algo que só o pensamento divino, em sua onisciência, pode intuir.

[8] Uma relação de ordem total surge a partir da noção de ordem parcial. Dado um conjunto $\boldsymbol{A}$, nele podemos definir uma relação de ordem parcial $\subseteq$ que satisfaz as seguintes condições:

de ordem pode ser dos mais variados tipos: por exemplo, os números racionais r, no intervalo $0 < r < 1$, tanto podem ser simplesmente ordenados pela sua ordem natural, isto é, pela ordem crescente de magnitude da razão p/q - sendo p e q inteiros positivos - quanto pela relação que determina que, dados dois racionais p_1/q_1 e p_2/q_2, se $(p_1 + q_1) \neq (p_2 + q_2)$, então o menor racional será aquele cuja adição do numerador com o denominador for a menor; se $(p_1 + q_1) = (p_2 + q_2)$, então o menor racional será o que tiver menor magnitude, isto é, aquele que, em relação a uma origem arbitrária, dista de uma menor distância. Com tal relação de ordem, o agregado de racionais r, dispostos no intervalo racional $(0;1)$, está dado como uma seqüência isomórfica aos números naturais (CANTOR, *ibid*, p.111).

Além dos conjuntos simplesmente ordenados, Cantor também considera que há os conjuntos dupla, tripla, n e, até mesmo, ω-mente ordenados. Tais conjuntos são aqueles agregados em que existem relações de ordem independentes uma das outras e cujos elementos são especificados em relação a algum sistema de coordenadas; assim, um conjunto n-mente ordenado nada mais é do que um agregado ordenado cujos elementos são dados, em relação a um sistema de coordenadas em um espaço R^n, como uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots , x_{n-1}, x_n)$; por sua vez, um conjunto ω-mente ordenado é aquele cujos elementos são coordenados em relação a um espaço de dimensão infinita - $\aleph_0$, para ser mais específico – e que possui relações de ordem entre seus elementos autônomas umas em relação às outras. Nas *Beiträge*, entretanto, Cantor apenas menciona a existência de tais conjuntos, limitando-se à análise dos conjuntos simplesmente ordenados[9].

Após definir a noção de conjunto simplesmente ordenado, Cantor passa ao conceito de *tipo ordinal*:

> Por [tipo ordinal], entendemos o conceito geral que resulta de **M** [um agregado simplesmente ordenado], quando abstraímos dos elementos m a sua natureza, retendo

---

P1) $x \subseteq x$;
P2) se $x \subseteq y$ *e* $y \subseteq x$, *então* $x = y$;
P3) se $x \subseteq y$ *e* $y \subseteq z$, *então* $x \subseteq z$.

Tal ordem parcial definida em A torna-se uma ordem total se, para quaisquer s e t de A temos que $s \subseteq t$ ou $t \subseteq s$.

[9] Como exemplo de um conjunto duplamente ordenado, temos os números complexos. Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $z' = a' + b'i$, podemos ter $z < z'$ se $a < a'$ou, se $a = a'$, se $b < b'$. Por sua vez, também podemos definir outra relação de ordem * que atue conjuntamente com <. Desta forma, temos $z < z'$ se $a < a'$; ou então $z^* z'$, se b^*b'. No primeiro caso, os complexos são apresentados como um conjunto simplesmente ordenado, com somente uma ordem total entre seus elementos. Na segunda alternativa, ao se definir nos complexos duas relações de ordem total distintas e independentes, < e *, temos os números complexos como um conjunto duplamente ordenado (cf FRAENKEL, [1961], p.131).

apenas a ordem de precedência entre eles. Portanto, o tipo ordinal **M*** é, em si mesmo, um agregado simplesmente ordenado cujos elementos são unidades que têm a mesma ordem de precedência entre elas que havia entre os elementos correspondentes de **M**, dos quais elas são derivadas por abstração (CANTOR, *ibid*, p.112).

Dado um agregado simplesmente ordenado **M**, se abstrairmos a natureza de seus elementos, temos o seu tipo ordinal, espécie de representação abstrata das relações de ordem que se verificam entre os elementos de **M**. Dados dois agregados distintos **M** e **N**, se entre eles se verificar a relação de similaridade, então eles têm o mesmo tipo ordinal. Basicamente, uma relação de similaridade entre **M** e **N** é uma correspondência bijetiva f entre os elementos de **M** e **N**, tal que, se m e m' são elementos de **M** tais que $m < m'$, e se n e n' são elementos de **N** que se relacionam a m e m' pela bijeção f – isto é, $f(m) = n$ e $f(m') = n'$-, então $n < n'$ (CANTOR, *ibid*, p.112).

Para os conjuntos finitos, a noção de tipo ordinal é de pouco interesse; de fato, os tipos ordinais finitos coincidem com os números finitos tomados em sentido cardinal. Dado um agregado com n elementos, ao abstrairmos a natureza de seus elementos o que restará é um agregado tal como

$$\mathbf{E_n} = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}, e_n\},$$

em que cada unidade e_k tanto pode ser analisada como ordinal ou cardinal; como já foi visto, no âmbito do finito, a distinção entre ordinalidade e cardinalidade é supérflua. Para os conjuntos infinitos, a noção de tipo ordinal tem grande valia, posto que permite uma caracterização estrutural dos conjuntos mais comuns na matemática. Mediante os tipos ordinais, tanto os números racionais quanto os reais, como estes se apresentam rotineiramente na matemática, admitem um enfoque que leva em consideração as relações de ordem, assim como as propriedades topológicas de tais conjuntos. Mas não somente os racionais e os reais se prestam a um estudo ordinal que lhes atribua uma tipificação estrutural: qualquer conjunto usual na matemática, dos inteiros aos complexos, pode ser analisado sob a ótica de suas inter-relações de ordem.

Antes de definir os tipos ordinais dos conjuntos habituais na matemática, Cantor apresenta o conceito de *inverso* de um conjunto ordenado **M**:

Se em um agregado ordenado [simples, n ou mesmo ω-mente] **M** todas as relações de precedência entre seus elementos são invertidas, tal que "maior" torna-se "menor" e "maior" torna-se "menor" para todos os seus elementos, obtemos novamente um agregado ordenado, o qual denotaremos por

***M**

e chamaremos do "inverso" de **M**.(CANTOR, *ibid*,p.114).

O inverso de um conjunto simplesmente ordenado **M** é o que se obtém quando as relações de ordem de **M** são invertidas. Como exemplo, consideremos **M** um conjunto que tenha por tipo ordinal ω. Obviamente, a representação de tal conjunto pode se dar da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots\},$$

tal que

$$m_\nu < m_{\nu+1}.$$

Ao considerarmos o inverso ***M** de **M**, teremos um conjunto em que as relações de ordem de **M** são invertidas, de tal forma que ***M** vale a ordenação

$$m_\nu > m_{\nu+1}.$$

Portanto, a representação de ***M** seria a seguinte:

$${}^*\mathbf{M} = \{\ldots, m_\nu, \ldots, m_2, m_1\}.$$

Neste agregado ***M**, não há um primeiro elemento, embora haja um último. O tipo ordinal de qualquer agregado similar a ***M** é o inverso do tipo ordinal de **M**, sendo, portanto, $^*\omega$.

De posse do conceito de tipo ordinal e de seu inverso, Cantor pôde então definir os tipos ordinais dos agregados mais costumeiros na matemática. Em primeiro lugar, surge a questão de se especificar o tipo ordinal dos inteiros relativos, tomados em sua ordem natural. Como qualquer conjunto similar aos inteiros negativos pode ser representado como um agregado da forma

$$\mathbf{A} = \{\ldots, a_\nu, \ldots, a_2, a_1, a'_1, a'_2, \ldots, a'_\nu, \ldots\},$$

então o tipo ordinal dos inteiros relativos, assim como o de qualquer conjunto similar a **A**, é igual a $^*\omega + \omega$; de fato, o conjunto **A** nada mais é do que a união entre um conjunto de tipo ordinal $^*\omega$ com outro de tipo ordinal ω, união esta que preserva as relações de ordem que já existem nos conjuntos a serem reunidos e que é traduzida, na aritmética dos tipos ordinais, como a operação de adição[10].

[10] Cantor define a adição entre tipos ordinais a partir da união entre agregados simplesmente ordenados. O agregado-união $C = \{M, N, P, \ldots\}$, composto dos agregados ordenados M, N, P,..., disjuntos dois a dois, é um agregado ordenado em que as relações de ordem dos termos que o

Após o tipo ordinal dos inteiros relativos ser especificado (CANTOR, *ibid*, p.116), Cantor passa ao problema dos tipos ordinais a serem atribuídos tanto aos racionais quanto aos reais. Quanto aos racionais, para que um tipo ordinal lhe seja dado considerando as suas inter-relações de ordem, é necessária a introdução do conceito de "totalmente denso". Segundo Cantor, um agregado é totalmente denso quando "entre dois de seus elementos, sempre há outros elementos do conjunto" (CANTOR, *ibid*, p.123). Dados dois racionais quaisquer, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, dispostos em sua ordem de magnitude, se $\boldsymbol{a < b}$, então há infinitos racionais $\boldsymbol{c}$ tais que $\boldsymbol{a < c < b}$. Em linhas gerais, dizer que os racionais são totalmente densos é o mesmo que dizer que qualquer número racional é um ponto-limite de uma seqüência infinita de racionais. As inter-relações de ordem entre os racionais também apontam para o fato de que não há nem um menor nem um maior elemento nos racionais. Juntamente com o fato de ser totalmente denso e sem limites máximo ou mínimo, há também a importante propriedade dos racionais de ser enumerável. Embora aparentemente isto seja uma propriedade cardinal – e, portanto, aparentemente indiferente aos fatos relativos à ordinalidade-, a enumerabilidade dos racionais é o que assegura que há pontos-limite dos racionais que não estão nos racionais, o que caracteriza os racionais como um domínio *não contínuo*; em outras palavras, há cortes feitos nos racionais – portanto, há secções ordenadas dos racionais -, que não correspondem a nenhum número racional. Para que tais cortes correspondam a números bem determinados, é necessária a introdução dos números irracionais em uma quantidade *não enumerável*. Mas isto é assunto para ser abordado quanto for visto o tipo ordinal do contínuo ou dos números reais.

Em síntese, quando se analisam as relações de ordem dos racionais, chega-se a três fatos capitais:

1) **Os racionais são enumeráveis, isto é, tem cardinalidade $\aleph_0$;**
2) **Os racionais não têm um elemento máximo, nem um mínimo;**
3) **Os racionais são totalmente densos.**

As três propriedades acima são as que definem a estrutura de ordem de qualquer agregado similar aos racionais, agregados estes cujo tipo ordinal Cantor denominou de $\boldsymbol{\eta}$ (CANTOR, *ibid*, p.124).

---

compõem são mantidas, tal que $\boldsymbol{M < N < P <} \ldots$. A adição $\boldsymbol{M^* + N^* + P^* +} \ldots$ é, portanto, o tipo ordinal do agregado $\boldsymbol{C = (M,N,P,\ldots)}$ (CANTOR ,*ibid*, p.119).

Após a caracterização do tipo ordinal dos racionais e de seus conjuntos similares, Cantor parte ao estudo das relações de ordem que se verificam no contínuo linear. Para tanto, Cantor adota como objeto de estudo o contínuo linear que se estende de $\boldsymbol{0}$ até $\boldsymbol{1}$, isto é, o domínio dos números reais $\boldsymbol{x}$ tais que $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$ (CANTOR, *ibid*, p.133).

Uma das propriedades fundamentais do contínuo linear – como de qualquer outro contínuo-[11] é o fato de todos os seus elementos serem pontos limites, além de qualquer seqüência fundamental $\boldsymbol{x_\nu}$ – tal que $\boldsymbol{\nu}$ tome por valor números finitos - nele definida ter um limite pertencente ao contínuo – isto é o que torna o contínuo, linear ou não, um *agregado perfeito*[12]. Outra propriedade intrínseca dos conjuntos contínuos é possuir um subconjunto próprio de tipo ordinal $\boldsymbol{\eta}$: dado um conjunto contínuo qualquer $\boldsymbol{R}$, existe um conjunto $\boldsymbol{S}$ que é totalmente denso e, por conseguinte, tem cardinalidade $\aleph_0$, tal que $\boldsymbol{S \subset R}$. Com estas duas propriedades, Cantor julgou ter apresentado o que é fundamental para a definição inequívoca da estrutura ordinal do contínuo, estrutura esta que é representada pelo tipo ordinal $\boldsymbol{\theta}$ [13] (CANTOR, *ibid*, p.134).

Podemos ter a garantia de que qualquer secção ou corte que se realize em um agregado tipo $\boldsymbol{\theta}$ não produzirá lacunas. Dado que todo agregado tipo $\boldsymbol{\theta}$ tem um subconjunto próprio tipo $\boldsymbol{\eta}$, então, se realizo secções neste subconjunto de ordinalidade $\boldsymbol{\eta}$, pode ser que a secção incida sobre um elemento determinado deste subconjunto ou não; se não incidir em um elemento específico deste subconjunto, então ela incidirá sobre um elemento que está no complemento deste subconjunto em relação à totalidade contínua de tipo ordinal $\boldsymbol{\theta}$, o que garante que

[11] Obviamente, há inúmeros outros contínuos que não se identificam com o contínuo linear, como o contínuo dos pontos em um espaço $\boldsymbol{n}$-dimensional. Entretanto, todos estes contínuos, *vistos como domínios simplesmente ordenados*, compartilham as propriedades fundamentais do contínuo linear. Portanto, uma vez sendo definida a estrutura de ordem do contínuo linear, definem-se, por extensão, as relações de ordem de qualquer outro contínuo.

[12] Um agregado perfeito é aquele cujos elementos coincidem com seus pontos de acumulação. Em outras palavras, para um agregado perfeito $\boldsymbol{P}$, vale a identidade $\boldsymbol{P = P^{\gamma}}$, em que $\boldsymbol{P^{\gamma}}$ é o conjunto derivado de $\boldsymbol{P}$ de segunda espécie, e $\boldsymbol{\gamma}$ é uma variável crescente definida para a segunda classe de números (CANTOR, [2000], pp. 907-908).

[13] De fato, o tipo ordinal $\boldsymbol{\theta}$ é significativo da ordem do contínuo, *desde que tal contínuo contenha os seus pontos limites.* Se, por exemplo, tomarmos o intervalo real $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$, então os seus extremos estão fora do intervalo. Entretanto, tal intervalo real apresenta a propriedade de que, qualquer secção que aí seja realizada, produz um corte contínuo, o que é uma propriedade de qualquer conjunto, quando o tipo ordinal deste conjunto é $\boldsymbol{\theta}$. De fato, o tipo ordinal de $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$, denominado de $\boldsymbol{\lambda}$, reduz-se ao tipo ordinal do contínuo linear quando inserimos seus dois extremos, obedecendo às relações de ordem presentes nesta interpolação, isto é, o tipo ordinal de $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ é igual a $\boldsymbol{1 + \lambda + 1 = \theta}$ (cf FRAENKEL, [1961], pp 166-167).

não haja lacunas ou buracos nos agregados contínuos; a quantidade não enumerável de elementos de um agregado tipo $\boldsymbol{\theta}$ garante que sempre haja um elemento que defina um corte contínuo neste agregado.

Basicamente, nas *Beiträge* de 1895, no que diz respeito à ordinalidade, Cantor se limitou a uma exposição do conceito de agregado simplesmente ordenado e de seus tipos correlatos. Em 1897, na continuação das *Beiträge* de dois anos atrás, Cantor passa ao estudo detalhado dos agregados bem ordenados. Sustentando fortemente a tese de que qualquer agregado, de qualquer tipo ordinal e de qualquer cardinalidade, pode ser bem ordenado, Cantor toma como fundamental um estudo pormenorizado da noção de boa ordenação e dos números ordinais que de tal conceito surgem; a partir do princípio da boa ordenação, as principais idéias filosóficas – e mesmos teológicas – subjacentes na teoria dos conjuntos de Cantor se depreendem.

Com a introdução de seus tipos ordinais, Cantor julgou ter apresentado o que é essencial para o estudo das propriedades intrínsecas dos conjuntos costumeiros da matemática. Mas não só isto: também aspectos da realidade física poderiam ser analisados mais adequadamente com seus tipos ordinais. Em uma carta à matemática Sonja Kowalewski, de 7 de dezembro de 1884, Cantor expressa o seu desejo de que os tipos ordinais pudessem ser úteis à resolução ou análise de assuntos concernentes à física. Conforme diz Cantor:

> O que denomino de tipo ordinal tem um caráter tanto aritmético quanto geométrico, em especial os tipos ordinais dos conjuntos multiplamente ordenados Já faz algum tempo que percebi que, enquanto o método utilizado por Descartes, Newton e Leibniz [para as questões físicas] dedica-se mais a uma caracterização dos fenômenos físicos, faltava um instrumental matemático, suficientemente rico, por meio do qual os fenômenos físicos pudessem ser analisados em si mesmos; com isto, conseguir-se-ia, por assim dizer, examinar tais fenômenos em seu âmago, e não de uma maneira exterior ou superficial. Se minha teoria dos tipos é tal instrumento adequado para tanto, então me disponho, com o tempo, a aperfeiçoá-la, deixando-a mais bem urdida (CANTOR in: DAUBEN, p.310, [1979])[14].

---

[14]Alles was ich Ordnungstypus nenne hat einen sowohl arithmetischen, wie auch geometrischen Character, letzteren namentlich bei den Typen mehrfach geordneter Mengen. Während die Descartes-Newton-Leibnizsche Methode das ihrige leistet in der Abgrängung der Naturphänomene, glaubte ich schon vor vielen Jahren dass es an einem entsprechenden streng-mathematischen Hülfsmittel noch fehle, durch welches man befähigt wäre, gewissermassen in die naturlichen Vorgänge mitten hineinzutreten, sich dieselben nicht von aussen – sondern auch von Innen genau anzusehen, um alsdann darüber genauer als bisher berichten zu können; ob meine

.

No trecho acima, o que Cantor deixa claro é que os seus tipos ordinais expressam propriedades inerentes aos conjuntos de coisas tal qual estas se dispõem no mundo real. Dado um agregado qualquer de objetos bem determinados – determinação esta que pode ser física, por exemplo -, basta que abstraiamos a natureza de tais objetos para termos acesso imediato à estruturação interna do agregado; eis aí, então, o agregado completamente exposto com um conjunto ordenado: todas as suas relações de ordem estão dadas à análise. Independentemente de quais sejam os objetos que componham os agregados que se apresentam no mundo físico, a *estrutura interna* deste agregado pode ser analisada a partir dos tipos ordinais, espécie de *invariantes* em relação a quais sejam os objetos que compõem o mundo físico. Por conta disto, os tipos ordinais se prestariam a uma *descrição essencial* do mundo real: a arquitetura do mundo, isto é, *as relações mais íntimas entre os pontos do contínuo espaço-temporal*, são dadas pelos tipos ordinais. De fato, a teoria dos tipos ordinais de Cantor mostra-se como uma síntese dos estudos cantorianos realizados entre 1879 e 1884, os quais vieram à tona sob o título genérico de *Über unendlichen lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nestes artigos – que, em sua totalidade, perfazem um total de seis partes interdependentes -, o contínuo, em especial, é analisado minuciosamente (DAUBEN, *ibid*, p.76-94). Qualquer agregado que se apresente como contínuo, sendo este o contínuo dos fenômenos físicos ou não, terá como propriedades essenciais as que foram relacionadas ao tipo ordinal $\boldsymbol{\theta}$.

Embora, em princípio, todo conjunto significativo para Cantor tenha relações de ordem entre seus elementos que garantam a tal conjunto um tipo ordinal, não é o caso de qualquer agregado apresentar-se *naturalmente* como bem ordenado. Entretanto, é um princípio norteador da teoria dos conjuntos de Cantor o fato de *qualquer conjunto possa ser bem ordenado.* Para Cantor, o princípio de boa ordenação é uma *lei do pensamento* (HALLETT, [1997], p.182).

Diante da importância do conceito de conjunto bem ordenado para Cantor, é natural pressupormos que Cantor escreveria um artigo totalmente dedicado a tal questão. De fato, o segundo artigo que compõe as *Beiträge*, publicado inicialmente em 1897, é destinado a uma apresentação das noções e resultados

---

Typentheorie dieses gesuchte Werkzeug sei, wage ich selbst nicht zu entsheiden und wird sich erst mit der Zeit herausstellen (CANTOR in: DAUBEN, p.310 [1979]).

principais relativos aos agregados bem ordenados. Primeiramente, a segunda *Beitrag* apresenta a definição de um agregado bem ordenado:

> Denominamos um conjunto simplesmente ordenado F de “bem ordenado” se seus elementos *f* estão em uma definida sucessão em relação a um menor elemento f_1 de tal forma que:
>
> I. Há em F um elemento f_1 que é o menor.
>
> II. Se F’ é qualquer parte de F e F tem um ou mais elementos maiores que todos os elementos de F’, então há um elemento *f’* de F que segue imediatamente após a totalidade F’,de tal que forma que não há nenhum elemento de F interposto entre *f’* e F’ (CANTOR, *ibid*, p.138).

Para Cantor, qualquer conjunto admite ser bem ordenado. Independentemente da natureza deste conjunto, posto que é bem definido, então a sua boa ordenação é possível. Já vimos que, para Shaughan Lavine, não só em Cantor há o postulado da boa ordenação, como o próprio conceito de *conjunto* passa pela enumeração completa de seus termos, tese equivalente ao princípio de que todo conjunto pode ser bem ordenado (LAVINE, [1998], p.80-81). De fato, Cantor toma o princípio da boa ordenação como uma asserção de natureza *a priori*, um princípio da razão ou pensamento. Para agregados finitos a boa ordenação é naturalmente alcançada pela indexação de seus termos com os ordinais finitos. Entretanto, para os conjuntos infinitos, de qualquer cardinalidade, a tese da boa ordenação soa um quanto extravagante: mesmo admitindo que haja a possibilidade de emparelhar os membros do conjunto a ser bem ordenado com segmentos próprios da totalidade ***W*** dos ordinais, tal emparelhamento parece, intuitivamente, se dar *sucessivamente*, o que demandaria, em princípio, que cada elemento do conjunto a ser bem ordenado é *retirado um após o outro* do agregado que está sendo enumerado e, então, a boa ordenação ou enumeração deste agregado adviria dos *índices sucessivos* associados a tais retiradas. Mas isto pressupõe um procedimento temporal infinito, o que soa um tanto quanto contra intuitivo.

Diante do problema de como se daria a enumeração de um agregado infinito, sem o pressuposto tácito de procedimento temporal infinito, a solução que se apresenta é o *axioma da escolha*, aqui expresso segundo a apresentação de Fraenkel (FRAENKEL, [1961], p.224).

Para qualquer conjunto S, existe uma função-escolha f que atribui a cada subconjunto não vazio S_0 de S um membro de S_0, isto é, $f(S_0) \in S_0$

Por intermédio do axioma da escolha, qualquer resíduo de temporalidade que possa haver na concepção intuitiva de enumerar ou bem ordenar é eliminado; todas as retiradas sucessivas pressupostas em uma boa ordenação são feitas *simultaneamente* pela função-escolha. Desta maneira, o axioma da escolha - *uma vez aceito como intuitivo* - resolveria a questão de como retirar da enumeração de um agregado ou conjunto infinito a idéia implícita de uma quantidade infinita de instantes temporais.

A partir do axioma da escolha, em 1904, o matemático alemão Ernst Zermelo demonstrou que todo conjunto pode ser bem ordenado. Basicamente, a demonstração de Zermelo é como se segue (ZERMELO, [1981], p.139-141)[15]. Sejam dados um conjunto ***S*** e uma função-escolha ***f***. Um subconjunto $\boldsymbol{\Gamma}$ de ***S*** é denominado um *conjunto-gama* se as seguintes condições forem satisfeitas:

1) **Γ é bem ordenado;**
2) **para qualquer segmento *A* de Γ, determinado por um elemento *a* - isto é, para todo elemento *x* de *A*, tal que $x < a$ -, tem-se que $f(S - A) = a$.**

Sendo dado um conjunto qualquer ***S***, podemos pressupor que há um subconjunto $\boldsymbol{\Gamma}$ que é bem ordenado. Para os conjuntos infinitos, isto sempre é o caso, posto que $\boldsymbol{\Gamma}$ pode ser identificado com qualquer parte própria finita de ***S***. Neste conjunto $\boldsymbol{\Gamma}$ bem ordenado, tomamos uma secção ***A*** determinada por um elemento ***a***, isto é, consideramos um subconjunto de $\boldsymbol{\Gamma}$ composto de todos elementos de $\boldsymbol{\Gamma}$ menores que ***a***. Neste ponto, entra em ação o axioma da escolha. Consideramos o complemento ***S – A*** e, deste conjunto, *pinçamos* ***a*** mediante a função-escolha ***f***. Como ***f*** é postulada como existente, não se tem a preocupação de defini-la de forma clara; ela simplesmente existe pelo axioma da escolha. Para todos os subconjuntos $\boldsymbol{\Gamma}$ assim definidos, a função escolha age simultaneamente em todos eles, retirando destes os elementos $f(S - A) = a$.

[15] Em 1908, Zermelo apresentou outra prova da boa ordenação de qualquer conjunto. Nesta demonstração, Zermelo baseou-se na noção de ordenação por inclusão própria, além do axioma do conjunto potência (HALLETT, [1996], pp 256-266).

Tendo em mãos a definição inicial de *conjunto-gama,* a demonstração de Zermelo segue, basicamente, em quatro etapas (FRAENKEL, *op.cit*, p.225).

Em primeiro lugar, posto que os conjuntos bem ordenados são comparáveis entre si, então, dados dois *conjuntos-gama* distintos, Γ e Γ', temos que $\Gamma < \Gamma'$ ou $\Gamma > \Gamma''$. Após admitir que entre os *conjuntos-gama* distintos há uma relação de ordem estrita, passemos agora a considerar o conjunto $\cup\Gamma_\lambda$, composto da união de todos os *conjuntos-gama* Γ_λ de S. Obviamente, tal conjunto é bem ordenado. O segundo passo da prova de Zermelo consiste em demonstrar que a ordem que cada s' tem em um determinado Γ é mantida no conjunto $\cup\Gamma_\lambda$. Como para cada par Γ e Γ', de membros distintos de $\cup\Gamma_\lambda$, ou bem $\Gamma < \Gamma'$ ou então $\Gamma > \Gamma'$, segue-se que, para cada par de elementos distintos s' e s'' de Γ e de Γ' respectivamente, teremos que ou $s' < s''$ ou $s' > s''$, conforme $\Gamma < \Gamma'$ou $\Gamma > \Gamma'$. Qualquer que for o caso, a relação de ordem entre s' e s'' é mantida no conjunto $\cup\Gamma_\lambda$; e, portanto, a ordenação que s' e s'' têm em seus conjuntos originais Γ e Γ' é preservada em $\cup\Gamma_\lambda$.

O terceiro passo da demonstração de Zermelo consiste em provar que $\cup\Gamma_\lambda$ é também um *conjunto-gama*. Como $\cup\Gamma_\lambda$ é bem ordenado, dado que composto de conjuntos bem ordenados que mantêm entre si relações de inclusão, a primeira condição que deve ser satisfeita para $\cup\Gamma_\lambda$ ser um *conjunto-gama* é de imediato cumprida. Resta agora saber se para qualquer segmento X de $\cup\Gamma_\lambda$, determinado por um $A \in \cup\Gamma_\lambda$, cumpre-se que $f(\cup\Gamma_\lambda - X) = A$, em que f é uma função-escolha. Qualquer subconjunto Λ de $\cup\Gamma_\lambda$ é a união de vários conjuntos bem ordenados A', $A'',\ldots,A^\gamma$, tais que $A' < A'' < \ldots < A^\gamma$. Em relação a tal subconjunto Λ, o segmento X determinado por A^γ é a união $\cup_{\kappa<\gamma}A^\kappa$. Desta maneira, a segunda condição do *conjunto-gama* nos dá $f(\cup\Gamma_\lambda - (X = \cup_{\kappa < \lambda} A^\kappa)) = A^\gamma$, o que nos assegura, conjuntamente com o fato de $\cup\Gamma_\lambda$ ser bem ordenado, que $\cup\Gamma_\lambda$ é um *conjunto-gama*.

Finalmente, no último e quarto passo da demonstração, procura-se provar que, para qualquer conjunto S, tem-se que $S = \cup\Gamma_\lambda$, sendo Γ_λ os *subconjuntos-gama* de S. O argumento baseia-se na tese de que $\cup\Gamma_\lambda$, sendo o maior *conjunto-gama* de S, se estiver contido propriamente em S - isto é, se $\cup\Gamma_\lambda \subset S$ -, então o conjunto $S' = \cup\Gamma_\lambda + \{a\}$, sendo a um elemento de S tal que $a \notin \cup\Gamma_\lambda$, não pode ser um *conjunto-*

gama, já que seria maior que $\cup\Gamma_\lambda$, dado que resultante de uma adição ordinal em que o elemento $\boldsymbol{a}$ tem índice ordinal maior que qualquer índice relacionado ao maior termo $\boldsymbol{b}$ que pertença ao conjunto $\boldsymbol{\Gamma_\lambda}$**.** Entretanto, facilmente se verifica que $\boldsymbol{S'}$ também é um *conjunto-gama*, posto que bem ordenado e pelo fato de $\cup\Gamma_\lambda$ ser uma seção de $\boldsymbol{S'}$ tal que $\boldsymbol{f(S' - \cup\Gamma_\lambda) = a}$. Portanto, da hipótese de $\cup\Gamma_\lambda$ ser uma parte própria de $\boldsymbol{S}$ chegamos à conclusão absurda de $\cup\Gamma_\lambda$ ser o maior *conjunto-gama* e, ao mesmo tempo, não sê-lo, já que $\boldsymbol{S'}$ é um *conjunto-gama* maior que $\cup\Gamma_\lambda$**.** Por conseguinte, temos, por redução ao absurdo, que $\boldsymbol{S} = \cup\Gamma_\lambda$, o que termina a demonstração de Zermelo de que *todo conjunto arbitrário* ***S*** *pode ser bem ordenado*.

4.4
O enumerável na mente de Deus: o infinito atual intuído perfeitamente

Os aspectos teológicos da teoria dos números transfinitos nunca foram postos de lado por Cantor. Ao contrário, houve uma época em que Cantor julgava-se fiel servo da Igreja Católica; e, se sua admissão nas universidades de Göttingen e Berlim tinha sido negada, é porque Deus queria ver toda a energia de Cantor destinada a desenvolver a sua teoria sobre os transfinitos[16]. Em uma carta ao matemático Charles Hermite, de janeiro de 1894, Cantor diz:

> Agora agradeço a Deus [...] que Ele sempre tenha me negado a satisfação do desejo [de ter um posto ou na universidade de Göttingen ou em Berlim], porque Ele, ao negar-me, forçou-me a penetrar profundamente na teologia, para servir a Ele como à Sua Santa Igreja Católica Romana, algo que só posso fazer se não me envolver com assuntos matemáticos (CANTOR in: DAUBEN, *op.cit,* p.147).

De fato, a teoria cantoriana dos números transfinitos não passou desapercebida no ambiente intelectual católico. Constantin Gutberlet, pensador católico alemão, foi um defensor das idéias de Cantor contra eventuais ataques que a elas pudessem

[16]Cantor sempre quis ser professor de uma grande universidade alemã, como Göttingen ou Berlim. Lecionando em Halle, um centro de estudos superiores de mentalidade provinciana, Cantor julgava que seu desenvolvimento como matemático poderia ser prejudicado. Entretanto, devido aos seus maus relacionamentos com os matemáticos influentes – em especial, com Leopold Kroenecker -, a sua transferência a uma universidade de maior expressão sempre foi-lhe negada, o que ocasionou a permanência de Cantor em Halle até a sua morte, em 1918 (cf. DAUBEN, pp 66-70).

ser dirigidos no meio eclesiástico. Sobremaneira, chamava a atenção de Gutberlet o apelo que Cantor faz à *Mente de Deus* como repositório do infinito atual. Se Deus é onisciente, então ele é capaz de identificar perfeitamente todos os números em sua individualidade e, além disso, não há como postular um número sequer que ainda não tenha sido alcançado pelo intelecto de Deus; no pensamento divino, a seqüência dos números inteiros é intuída totalmente, de maneira completa. Segundo Gutberlet,

> [Na] mente absoluta de Deus a seqüência inteira [dos números inteiros] está sempre em estado atual, sem qualquer possibilidade de que algum número novo venha a aparecer no conhecimento [de Deus] (GUTBERLET in: DAUBEN, p.143).

Gutberlet aponta para o fato de que, na absoluta mente de Deus, não há lugar para *reticências*: todo número inteiro, *finito ou transfinito*, já está dado no intelecto divino de maneira perfeitamente determinada. Por conseguinte, a seqüência dos inteiros positivos, embora a totalidade de seus termos individuais seja inacessível ao entendimento humano, é perfeitamente intuída por Deus, *com todos os seus números, individualmente considerados, presentes no intelecto divino de forma definida.* Mas não só a seqüência dos inteiros finitos é perfeitamente dada na mente de Deus. O valor exato de π, a totalidade dos números racionais, a expansão decimal completa de uma dízima aperiódica, a totalidade dos números reais, etc: *tudo isto é exaustiva e completamente conhecido por Deus.* Onde houver o infinito atual, há o pensamento de Deus intuindo tal infinito de maneira perfeita. Em síntese, para Gutberlet, onde houver processos infinitos, há o pensamento de Deus para assegurar a objetividade e completude de tais processos. Sobre a relação entre infinito e Deus no pensamento de Gutberlet, J.W. Dauben nos aduz o seguinte:

> Deus foi chamado [...] para assegurar a existência ideal de decimais infinitas, os números irracionais, o verdadeiro e exato valor de π, e assim por diante. Deus não só é capaz de resolver o problema da hipótese do contínuo, mas também assegura a concretude e objetividade do número cardinal representativo da totalidade dos números reais. Gutberlet mesmo ponderou que, desde que a mente de Deus é postulada como imutável, então a coleção dos pensamentos divinos deve compreender um conjunto absoluto, infinito, completo e fechado (DAUBEN, *ibid*, p.143-144).

Como já foi visto, Cantor considera a seqüência ***W*** dos números ordinais como significativa da absoluta capacidade de Deus de enumerar ou de contar. Como tal, ao contrário do que pensa Gutberlet, tal seqüência não admite um fechamento, pois isto seria limitar o poder de Deus – se isto é feito, como já foi abordado no capítulo anterior, cai-se no paradoxo de Burali-Forti.

Entretanto, todos os atributos que Gutberlet elenca para a mente de Deus são predicáveis de qualquer segmento próprio de ***W***. Se considerarmos um segmento enumerável de ***W***, tal como $\boldsymbol{\Sigma = [1;\sigma]}$, em que $\boldsymbol{\sigma}$ é um ordinal limite da segunda classe de números, podemos perguntar como tal segmento se apresentaria na qualidade de objeto definido no intelecto de Deus. Como já foi visto no capítulo anterior, os ordinais limites são introduzidos como significativos de que a totalidade dos números inteiros está dada completamente. Ao invés de significar um termo ao qual uma seqüência gradativamente se aproxima, os ordinais limites da segunda classe de números representam a compleição total dos índices finitos em um processo enumerativo: após todos os índices finitos terem sido usados para bem ordenar um conjunto, surge um ordinal limite. A quantidade de vezes que a totalidade dos índices finitos foi utilizada para bem ordenar um dado infinito está relacionada ao conceito de *elemento principal*, noção introduzida por Cantor em 1885, no artigo *Principien einer Theorie der Ordnungstypen: Erste Mittheilungen*, o qual foi rejeitado para publicação pela revista *Acta Mathematica*[17]. Nas *Beiträge* de 1897, entretanto, tal conceito reaparece, sendo definido por Cantor da seguinte maneira:

> Se existe em **M** [sendo **M** um agregado infinito simplesmente ordenado] um elemento m_0 tal que se posicione em uma seqüência fundamental ascendente $\{\boldsymbol{a_\nu}\}$[definida em **M**], de tal forma que
>
> ***(a)*** para todo $\boldsymbol{\nu}$ [finito], $\boldsymbol{a_\nu < m_0}$,

---

[17] Cantor apresentou os seus *Principien* para publicação na revista *Acta Mathematica*, então dirigida por um antigo colaborador de Cantor, o aristocrata sueco Göstav Mittag-Leffler. Todavia, Mittag-Leffler não aceitou o artigo de Cantor à publicação, escrevendo-lhe, em março de 1885, uma carte em que expõe as razões para a rejeição do artigo de Cantor. Eis um trecho da carta de Mittag-Leffler a Cantor: " [E]stou convencido de que a publicação de seu novo trabalho, antes que você explique o seu real alcance, lhe será prejudicial [...] Pode acontecer que sua teoria e você nunca encontrem o devido mérito que ambos merecem, se suas idéias são, desde agora, postas em descrédito. Pode ser que daqui a cem anos, alguém venha a redescobrir a suas idéias, e então será um fato que tais idéias já eram do seu conhecimento há muito tempo [...] Mas se suas idéias forem publicadas agora, você não exercerá nenhuma influência significativa, o que obviamente não é o seu desejo, como não seria de ninguém que se dedique à pesquisa científica (MITTAG-LEFFLER in: DAUBEN, p.138).

(b) para todo elemento m de **M** que precede m_0, existe um número v_0 [finito] tal que $a_v > m$, para $v \geq v_0$,

então denominamos m_0 um "ponto limite" em **M** ou um elemento principal de **M** (CANTOR, [1941], p.130-131).

Nos *Principien* de 1885, Cantor associa ao conceito de elemento principal à noção de *conjunto coerência*: dado um agregado A simplesmente ordenado, o conjunto coerência de A, denominado de Ac, é o conjunto composto de *todos os elementos principais de A, considerados na ordem em que estes elementos principais aparecem em A*[18]. O tipo ordinal de Ac é denominado por αc (DAUBEN, *op.cit.* p.153). Para o caso dos conjuntos bem ordenados infinitos, o tipo ordinal do *conjunto coerência* indica quantas vezes, sucessivamente, a seqüência inteira dos índices finitos foi utilizada para enumerar tais conjuntos completamente. Assim, por exemplo, um agregado de número ordinal $\omega + 1$ tem um conjunto coerência com tipo ordinal 1, posto que sua enumeração total se dá pela utilização de somente uma vez da seqüência completa dos índices finitos; a própria seqüência dos ordinais finitos, de número ordinal ω, uma vez que composta somente do ordinais finitos crescentes, tem *conjunto coerência* de tipo 0: tal seqüência ainda está por teminar e, uma vez terminada, tem tipo ordinal $\omega + 1$, já que a compleição da seqüência dos ordinais finitos requer a introdução de ω após todos os ordinais finitos.

Voltemos agora ao segmento $\Sigma = [1;\sigma]$. Na qualidade de um segmento da segunda classe de números, se $\sigma > \omega$, tal segmento possui cortes contínuos; estes, por sua vez, representam a incapacidade humana de intuir clara e distintamente um conjunto infinito bem ordenado. Para a inteligência de Deus, que tudo intui com precisão e de maneira perfeita, é natural postularmos que tais cortes contínuos dos ordinais limites se reduziriam a *saltos*, isto é, dado um ordinal limite qualquer, é possível para o intelecto divino conceber a enumeração indicada por tal ordinal como composta só de *saltos*; em sua intuição perfeita, Deus é capaz

[18] Cantor publicou os *Principien* em 1887 na revista *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, com o título de "Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten". Em linhas gerais, no que diz respeito ao conceito de elemento principal, tal artigo dedicou-se ao estudo dos conjuntos denominados de *densos em si mesmos*, para os quais vale a identidade $Ac = A$, isto é, nestes conjuntos, todo elemento é um elemento principal; como significativo de tais conjuntos, podemos apresentar qualquer conjunto de tipo ordinal η, por exemplo (DAUBEN, *op.cit*, pp.153-154).

de bem ordenar um infinito enumerável sem *passar ao limite*, mas atribuindo um número específico para cada termo da enumeração. Facilmente esta enumeração sem ordinais limites se daria na mente divina utilizando-se somente a seqüência tipo $\boldsymbol{\omega}$ dos cardinais finitos, uma vez que qualquer ordinal limite da segunda classe de números pode ser analisado como a imagem abstrata de uma permutação feita com os cardinais finitos. Mas sem tal hipótese – que parece tácita no teorema de 1891 sobre a existência de conjuntos não enumeráveis -, as enumerações indicadas por ordinais limites parecem irredutíveis a contagens feitas somente com *saltos.* Isto porque, uma vez que os índices finitos se esgotem, necessariamente temos de passar aos ordinais limites *sem antecessores imediatos.* Se postularmos um antecessor imediato para um ordinal limite da segunda classe de números, obviamente tal antecessor também será infinito; a secção que se opera na segunda classe de números entre a totalidade de todos os índices finitos de uma seqüência e o primeiro ordinal limite que se segue a tal seqüência é essencialmente um corte contínuo. Em outras palavras, o conjunto coerência do segmento $[1;\ \boldsymbol{\sigma} - 1]$ é o mesmo do conjunto $[1;\ \boldsymbol{\sigma}]$: o mesmo número de vezes em que a totalidade inteira dos índices finito está presente no segmento $[1;\ \boldsymbol{\sigma}]$ é igual ao número de vezes em que totalidade de tais índices está em $[1;\ \boldsymbol{\sigma} - 1]$. De fato, é um teorema da teoria dos números ordinais transfinitos que $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma}$ e que, portanto, **"$\boldsymbol{\sigma}$ - 1"** nada mais seria do que uma maneira alternativa de representar o ordinal $\boldsymbol{\sigma}$. Isto porque a identidade entre $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ significa que ambos ocupam a *mesma posição na seqüência* $\boldsymbol{W}$, dado que, em relação a um outro ordinal limite $\boldsymbol{\rho}$, tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Lim}_{\nu}\,(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} + \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\nu}, \dots),$$

tanto $\boldsymbol{\sigma}$ quanto $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}$ estão infinitamente distantes de qualquer termo $\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\nu}$: não é possível, em passos finitos descendentes, alcançar qualquer termo $\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\nu}$ saindo de $\boldsymbol{\sigma}$ ou de $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}$: tanto $\boldsymbol{\sigma}$ quanto $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}$ estão fora da enumeração $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} + 1, \dots, \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\nu}, \dots$

É um dado interessante da teoria cantoriana dos números ordinais transfinitos que qualquer ordinal limite da segunda classe de números significa, ao mesmo tempo, o término e o início de um processo enumerativo feito com os índices finitos, em sua compleição. Ao ser o limite de uma série fundamental ascendente, um ordinal limite representa que uma dada seqüência isomórfica aos ordinais finitos está dada inteiramente; na qualidade de início de uma enumeração, um ordinal limite significa a primeira posição de tal enumeração. Como limites de processos enumerativos, os ordinais limites determinam *cortes contínuos*; como primeira posição de uma seqüência infinita e enumerável, os ordinais determinam *saltos*, posto que iniciam uma boa ordenação infinita.

Analisados detidamente, os ordinais limites representam que uma seqüência isomórfica aos naturais finitos foi completa em sua inteireza. Obviamente, é impossível para a inteligência humana intuir ou apreender tal totalidade em sua completude. Entretanto, para o intelecto divino, é perfeitamente concebível que o uso reiterado da totalidade dos ordinais finitos – ou de seqüências isomórficas a estes – se faça naturalmente. Vistos como reiterações ou superposições de seqüências isomórficas aos naturais, os segmentos da segunda classe de números, definidos por um ordinal limite, comportam-se como *passos tranfinitos* da contagem divina: *Deus conta de* ω *em* ω. Como unidades da contagem divina, uma seqüência tipo ω, dada inteiramente, é o antecessor imediato de outra seqüência tipo ω, justamente aquela que se inicia pela compleição da primeira.

Por ser o resultado da superposição de seqüências tipo ω, cada ordinal da segunda classe de número admite uma representação como *potências* de ω. Como nos diz Cantor:

> Todo número α da segunda classe de números pode ser representado [...] de uma única maneira, sob a forma de
>
> $$\alpha = \omega^{\alpha 0}\kappa_0 + \omega^{\alpha 1}\kappa_1 + \ldots + \omega^{\alpha\tau}\kappa_\tau,$$
>
> onde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\tau$ são números da primeira ou segunda classe de números, tais que:
>
> $$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_\tau \geq 0,$$
>
> enquanto $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_\tau$ são $\tau + 1$ números da primeira classe de números [isto é, inteiros finitos] diferentes de zero.(CANTOR, [1941], p.187).

Tal representação como potências de ω inclui todos os números da segunda classe de números, inclusive os ditos números ε, para os quais a representação como potências de ω têm a forma geral $\omega^\xi = \xi$, isto é, tais números ε - denominados por Cantor de *Giganten* (CANTOR in: DAUBEN, *op. cit*, 347) são aqueles que se identificam com o grau do polinômio de base ω que o expressa.

Desta maneira, qualquer segmento $\Sigma = [1;\ \sigma]$ da segunda classe de números, em que σ é um ordinal limite, é o resultado da superposição de seqüências tipo ω. Antes de tais segmentos serem vistos como definidores de *cortes contínuos* na seqüência W, a melhor maneira de compreende-los, à luz do intelecto divino, é como o resultado final da contagem divina, a qual se dá pela superposição de seqüências tipo ω dadas completamente. Para cada ordinal limite, o seu antecessor imediato é uma seqüência inteira isomórfica aos naturais. Obviamente, como tais ordinais limites são bem ordenados, é natural postularmos a menor seqüência ω. De fato, esta se identifica com a seqüência dos ordinais finitos ou com os números da primeira classe de números, definida pelo segmento $N = [1;\ \omega)$. Em relação a qualquer outro segmento $\Sigma = [1;\ \sigma)$ da segunda classe de números, a *diferença estrutural entre tal segmento* e N é o fato de que, em N, somente o número 1 não tem um antecessor imediato. Para qualquer outro segmento Σ, há mais do que um termo sem antecessor imediato, justamente aqueles que indicam que uma seqüência isomórfica aos naturais está dada completamente: todos os ordinais limites menores que σ são tais termos sem antecessores imediatos em Σ. Exceto pelo fato de que em N há somente um termo sem antecessor imediato, a semelhança entre a seqüência dos naturais finitos e qualquer segmento da segunda classe de números é quase que completa. Portanto, ao apresentarmos as condições que definem a estrutura dos ordinais finitos, tais condições, com algumas adaptações que dêem conta da presença de múltiplos termos sem antecessores imediatos, podem ser estendidas aos segmentos da segunda classe de números, ou mesmo à toda seqüência W de ordinais, tomada como incompletável. Neste ponto, é interessante a introdução de um diálogo entre a concepção de Cantor sobre os ordinais transfinitos e noção de Dedekind de "sistema simplesmente infinito". O intuito de tal cotejo é mostrar que, com algumas adaptações, a noção de sistema simplesmente infinito, espécie de estrutura fundamental que possibilita a contagem de conjuntos finitos, pode ser estendida para os ordinais transfinitos de Cantor. De fato, posto que a contagem em Dedekind é restrita ao que é finito, para que tal contagem seja adaptada para o infinito, algumas mudanças devem ser introduzidas nas condições de Dedekind; tais mudanças, por sua vez, representariam a adoção da perspectiva cantoriana de contagem, em que se postula a presença de um sujeito contante – Deus, no caso - capaz de bem ordenar qualquer conjunto, sendo este finito ou infinito.