3
Sobre os pressupostos conjuntísticos subjacentes nos "Grundlagen"

3.1
Noção combinatória "versus" noção lógica de conjunto.

Em sua teoria conjuntística apresentada nos *Grundlagen*, Cantor parece compreender a noção de conjunto em sentido *combinatório*[1] *(*LAVINE, p. 77, [1997]). Em linhas gerais, a visão combinatória de conjunto admite que um conjunto está formado quando *todos* os seus elementos foram devidamente coletados de um todo maior, sem que isso implique que tal coleção tenha se dado por intermédio de uma propriedade ou conceito lógicos, ou por meio de uma lei ou expressão lingüística qualquer. Como exemplo, podemos tomar os conjuntos formados por pontos quaisquer do espaço euclidiano. Dada uma porção do espaço euclidiano, podemos formar um conjunto a partir dos seus pontos interiores pela simples seleção arbitrária destes. Neste sentido, o conjunto que surge de tal porção euclidiana é um mero agregado de pontos, não coincidindo com a extensão de uma propriedade específica. Desta forma, o conjunto resultante desta seleção tem seus elementos escolhidos arbitrariamente, de tal forma que não podem ser vistos como instanciações de uma propriedade ou conceito *anterior*, em um certo sentido, ao próprio agregado; a escolha destes elementos e não de outros se deu por pura escolha arbitrária.

Acompanhando tal escolha arbitrária – ou simultaneamente a ela – está o ato de contar ou enumerar, de tal forma que a todo conjunto bem definido associa-se uma enumeração completa de seus elementos. De fato, nos *Grundlagen*, como aqui já foi mencionado, Cantor afirma que um conjunto é um todo de unidades reunidas por intermédio de uma *lei*, a qual, segundo Lavine, "[é], para Cantor, [sinônimo] de boa-ordenação ou "contagem"".(LAVINE, *ibid*, p.85). Por conseguinte, o uso combinatório que Cantor faz da noção de conjunto estaria intimamente ligado ao conceito de contagem, a ponto de ser impossível que haja um conjunto que não possa ser inteiramente contado. Em princípio, a noção

[1] O termo *combinatório*, para designar tal compreensão de conjunto, deve-se a Paul Bernays (ver "On Platonism in Mathematics", p. 259-260, in: *Philosophy of mathematics*, PUTNAM, H. and BENECERRAF, P. Cambridge University Press, Cambridge: England, [1983]).

combinatória de conjunto pode ser considerada estritamente *extensional*, posto que só pressupõe, para que haja conjuntos, objetos que admitam ser reunidos segundo escolhas arbitrárias. Dentro da ontologia prévia que se pressupõe para a definição de conjunto, não há necessidade, a primeira vista, de propriedades e de conceitos; tudo que é necessário para a fundamentação da noção combinatória de conjunto são os objetos a ser reunidos em um todo por meio de escolhas arbitrárias, além, é claro, de uma *razão ou inteligência* capaz de escolher os objetos que irão compor os conjuntos – inteligência esta que, no caso da teoria cantoriana, é identificada com a razão divina.

Contudo, a noção de conjunto pode vir ancorada em pressupostos *intensionais*, dando origem à compreensão *lógica* de conjunto[2]. Segundo tal enfoque, um conjunto só é bem definido quando se determina uma propriedade ou conceito comum a todos os seus elementos. Portanto, só há sentido em falar de um conjunto em sentido extensional, quando a propriedade que o define está explicitamente dada, a tal ponto que, dado um objeto qualquer, pode-se, em princípio, decidir se tal objeto pertence ou não ao conjunto pela inspeção de que ela tenha ou não a propriedade definidora do conjunto. Não se trata aqui, como no caso combinatório, de formar um conjunto a partir da reunião de objetos arbitrariamente escolhidos, mas de só admitir como membro do conjunto uma instanciação do conceito ou propriedade que o define. Por conta disto, a ontologia que vem a reboque da noção lógica de conjunto é composta de conceitos ou propriedades, mais objetos que satisfazem ou caem sob os mesmos; aqui, em um primeiro momento, torna-se supérflua a presença de uma razão que, por intermédio de suas escolhas, faça com que os conjuntos surjam, posto que, uma vez dado um conceito, de imediato estão dados os objetos que lhe estão subordinados.

A noção lógica de conjunto está de forma superlativa exemplificada por Frege. Segundo Frege:

> [O] conceito é logicamente anterior à sua extensão; e considero vazia a tentativa de tomar a extensão de um conceito como uma classe [cujo fundamento] sejam as coisas isoladas que [ela contém] e não o próprio conceito....[A] extensão de um conceito não resulta dos objetos que caem sob [este], como a floresta resulta de suas árvores; mas

---

[2] A designação de *lógica* a esta particular concepção de conjunto se deve a Kurt Gödel (ver “Russell’s Mathematical Logic, in: BENACERRAF, P & PUTNAM, H, ed. *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Cambridge University Press, Cambridge, [1998]).

> está ligada ao conceito e só a este. O conceito, por conseguinte, é logicamente precedente à sua extensão (FREGE, p.228, [1984]).

Claramente, Frege nos diz que o conjunto, tomado como a coleção de seus elementos – *grosso modo*, a sua extensão, em sentido fregeano – é posterior, sob o ponto de vista lógico, em relação ao conceito que o define. De fato, dentro da compreensão lógica, é perfeitamente possível falar de um conjunto somente em sentido intensional, posto que este pode ter extensão nula ou vazia. Neste sentido, o que se enfatiza é a propriedade definidora do conjunto; e sua extensão, por força de não haver objetos que satisfaçam tal propriedade, é tratada como um conjunto vazio, sem que isto comprometa a legitimidade de tal conjunto visto como extensão. Obviamente, na acepção combinatória, um tal conjunto vazio é impossível, uma vez que qualquer conjunto tem, pelo menos, um único objeto no escopo de sua extensão.

Segundo Shaughan Lavine, subjacente à teoria cantoriana dos números ordinais apresentada nos Grundlagen, está uma noção combinatória de conjunto. Para Lavine, a teoria cantoriana dos conjuntos resultou dos estudos de Cantor sobre expansões trigonométricas de funções quaisquer - sendo estas mais abrangentes do que as funções ditas analíticas ou expressas por meio de equações algébricas - que contivessem, em seus domínios, pontos excepcionais – isto é, pontos nos quais as expansões trigonométricas que a função admite sejam divergentes ou não convirjam para os mesmos valores. Por conseguinte, ao conceber um conjunto, Cantor tinha em mente o esqueleto abstrato de conjuntos imagem de funções reais, tão gerais e arbitrárias quanto queiramos, com tais pontos excepcionais. Portanto, a noção de conjunto em Cantor surgiu sem referência a uma lei definidora ou regra de pertinência, posto que o conjunto imagem de tais funções não é definido, necessariamente, por meio de expressões matemáticas bem definidas, consistindo, apenas, de valores arbitrariamente correspondentes aos valores dos seus domínios. Daí resultaria que a compreensão cantoriana de conjunto se afasta de uma perspectiva lógica. Segundo Lavine:

> Cantor começou a investigar coleções [conjuntos] combinatórias de pontos excepcionais a fim de estender os resultados da análise de Fourier ao maior número possível de funções, as quais são definidas de forma geral, tal qual apresentada por Dirichlet. O trabalho em si foi parte da tentativa de livrar a análise das restrições às

funções dadas por expressões analíticas - isto é, funções dadas por leis. [...] Os valores de uma função são determinados por uma coleção de pontos que formam o gráfico da função. A noção lógica de coleção, isto é, a noção de uma coleção determinada por uma lei, uma expressão analítica, desta forma, vem de mãos dadas com a noção de uma função determinada por uma lei ou expressão analítica [...] se, e somente se, seu gráfico é dado pela correspondente lei, e o gráfico é, portanto, uma coleção lógica [...] Vemos que o trabalho de Cantor que o levou à sua teoria dos conjuntos e à noção combinatória de coleção cresceu naturalmente a partir do que foi adquirido a fim de livrar a análise da restrição de [trabalhar somente] com coleções lógicas ou definidas por uma lei. O ponto crucial da noção combinatória é que coleções combinatórias podem existir, [sem que] seus membros sejam caracterizados por alguma lei (LAVINE, ibid, p.77)

A partir deste entendimento combinatório da noção cantoriana de conjunto, Lavine apresenta os pressupostos axiomáticos da teoria de Cantor sobre os números ordinais, assim como o conceito combinatório de conjunto presente nos *Grundlagen*. Como justificativa de seus axiomas, Lavine apresenta passagens textuais de Cantor, retiradas de artigos ou correspondências relativos aos períodos próximos anterior ou posteriormente à publicação dos *Grundlagen,* em 1883 (LAVINE, ibid, pp. 82-88). Eis os axiomas de Cantor, segundo a interpretação de Lavine (ibid, pp 80-82):

(1) Os números ordinais W são linearmente ordenados pela relação <;

(2) Há um número ordinal mínimo, denominado de 0 [3]***;***

(3) Todo número ordinal α tem um sucessor imediato $\alpha + 1$;

(4) Há um número ordinal ω tal que $1 < \omega$; para todo número ordinal α, se $\alpha < \omega$, então $\alpha + 1 < \omega$; e para todo ordinal $\alpha < \omega$, tal que $\alpha \neq 0$, há um ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$;

(5) Qualquer segmento de W tem um menor limite superior

[3] Não se trata aqui de entender o *0* como o número associado a uma extensão vazia de um predicado qualquer. Posto que isto não faz sentido no noção combinatória de conjunto, o número *0* tem de ser visto como indicativo de que tal ordinal se associa ao primeiro elemento selecionado para compor um todo ou conjunto com *todos* os seus elementos numerados, comportando-se, mais ou menos, como a *posição relativa* que tal elemento ocupa em relação aos demais elementos que componham o conjunto em questão.

Estes cinco axiomas caracterizam os ordinais ***W*** como uma extensão da seqüência dos inteiros finitos para o transfinito. Em especial, o axioma ***(4)*** diz respeito à introdução do primeiro ordinal transfinito, entendido como significativo da compleição da seqüência de todos os inteiros positivos finitos.

Em seguida, Lavine apresenta a definição de conjunto tácita na teoria dos números ordinais transfinitos:

S é um conjunto se, e somente se, há uma função f bijetiva, tal que S = f(W'), em que W' é um segmento próprio dos números ordinais W

Um objeto ***S*** qualquer só pode ser visto como um conjunto se todas as suas partes constitutivas, quaisquer que estes sejam, estiverem enumeradas por meio de uma correspondência bijetiva com uma parte própria dos números ordinais. Mesmo que ***S*** seja infinito, a enumeração de suas partes faz-se possível pela utilização de um segmento próprio de ***W*** de natureza transfinita. Desta maneira, a "totalidade" ***W*** é o substrato fundacional da noção combinatória de conjuntos em Cantor. Portanto, dentro da ontologia subjacente à teoria cantoriana dos conjuntos, os números ordinais transfinitos têm precedência em relação à própria noção de conjunto; não é o caso de definir número inteiro ou ordinal em termos de conjunto, mas, ao contrário, trata-se de reduzir o conceito de conjunto ao mais fundamental de número ordinal transfinito. Neste sentido, a totalidade ***W***, intrinsecamente incompletável, exerce o papel de *possibilitadora* da existência de conjuntos.

Como já foi visto, Cantor considera ***W*** como uma extensão natural dos inteiros ou naturais finitos. Assim sendo, o fundamento para a própria elaboração conceitual de ***W*** é a seqüência dos naturais finitos vistos como um todo completo; a partir da compleição dos naturais, postula-se o primeiro ordinal transfinito e tem-se início, propriamente, uma teoria do infinito modelada sobre o princípio da contagem, isto é, torna-se possível contar o infinito da mesma forma como o finito é contado. Dentro deste quadro conceitual, surge, menos que de forma tácita, a figura de um sujeito ou *razão contante* capaz de enumerar o infinito, a partir da intuição completa da totalidade dos números naturais tomados individualmente. De fato, como nos aponta Michael Hallet,

> [E]mbora não possamos intuir diretamente a coleção dos números naturais como um todo, Cantor assume que Deus pode; portanto, a unidade do conjunto de todos os

números naturais existe como uma idéia na mente de Deus, e pode, desta forma, ser tomado como um objeto pela matemática (HALLETT, p.21, [1996]).

Para Cantor, os números naturais estão presentes na mente de Deus de forma perfeita, em toda a sua extensão. Obviamente, esta extensão dos números naturais inclui também os números ordinais maiores ou iguais a ω. Portanto, ***W*** pode ser entendido como os próprios números naturais no intelecto de Deus; e é a partir de tais números que Deus pode ordenar tudo em número. Em uma carta ao matemático Charles Hermite, de 30 de novembro de 1895, Cantor diz o seguinte:

> [A] realidade e a absoluta uniformidade dos números inteiros [os quais abrangem, em Cantor, além dos inteiros finitos, os inteiros transfinitos] parece-me *muito mais forte* do que esta do mundo dos sentidos; e só há uma simples razão para tanto, a saber, que os números inteiros existem todos separadamente, em sua infinitude atual, no modo mais alto tipo de realidade, como idéias eternas no intelecto divino (CANTOR in: HALLETT, *ibid*, p.149).

Portanto, ***W*** existe perfeitamente na mente de Deus que, em sua onipotência, pode criar infinitos mundos de tamanhos infinitos, todos eles com todos os seus objetos individualmente enumerados. Na mente de Deus, cada número de ***W*** é uma idéia singular, consistindo de um objeto individualmente intuído por Deus. Assim sendo, cada segmento de ***W*** é composto de unidades intuídas separadamente no intelecto divino, o que permite tratar cada segmento ordinal sob a ótica da *quantidade* ou *potência*, isto é, como um *todo de unidades separadas*. É com intuito de dar conta das potências infinitas ascendentes – os números de classe - que Lavine introduz os dois seguintes axiomas, equivalentes ao terceiro princípio de geração dos *Grundlagen*:

(6) Para cada ordinal α há associado um conjunto (α) – o número de classe de α - tal que β está em (α) se, e somente se, β é um número ordinal e o conjunto de predecessores de α está em correspondência bijetiva com os predecessores de β;

(7) ***Para todo número ordinal α, há um número ordinal $\beta > \alpha$ tal que o conjunto de predecessores de β não está em correspondência bijetiva com os predecessores de α.***

O axioma (**6**) nos dá um critério para saber se os segmentos ordinais definidos por α e β têm a mesma quantidade de números, isto é, são capazes de enumerar conjuntos da mesma quantidade de unidades ou potência; por sua vez, o axioma (**7**) nos garante que, por maior que seja um conjunto – isto é, por maior que seja a sua potência ou quantidade de unidades -, há um segmento ordinal capaz de enumerá-lo completamente.

Os axiomas até aqui expostos dizem respeito mais aos números ordinais transfinitos do que propriamente ao conceito de conjunto presente nos *Grundlagen*. Em relação à noção de conjunto como tal, Lavine apresenta os dois axiomas seguintes, *traduções*, na teoria cantoriana, dos axiomas de extensionalidade e escolha, respectivamente:

(8) Conjuntos com os mesmos elementos são iguais;

(9) ***Seja S um conjunto de conjuntos e seja f uma função que tem como domínio os predecessores de algum ordinal*** α, ***tal que, para cada membro S' de S,*** $f(\gamma) = S'$, ***para algum*** $\gamma < \alpha$. ***Então há uma função binária h, tal que, para todo*** $\gamma < \alpha$, $h(\gamma,\beta) = s' \in S'$, ***em que*** β ***é um número ordinal.***

O axioma ***(9)***, uma variante do axioma da escolha, não é explicitamente presente nos *Grundlagen* e nem em nenhuma outra obra ou artigo de Cantor. Entretanto, como nos aponta Lavine, vários teoremas da teoria dos conjuntos, demonstrados em épocas próximas ao aparecimento dos *Gundlagen*, só podem ser efetivamente provados com o auxílio implícito deste axioma[4], o que legitima a sua presença com um dos postulados pilares da teoria de conjuntas de Cantor subjacente à teoria dos números ordinais transfinitos (LAVINE, *ibid*, p.88-89).

Com os seus postulados, Lavine apresenta a teoria dos conjuntos subjacente aos *Grundlagen* como claramente combinatória. Com isto, tem-se a vantagem de desvencilhar a concepção cantoriana de conjunto de compreensão lógica de conjunto, posto que esta última, tomada sem nenhuma restrição, leva a paradoxos. Como é sabido, a concepção lógica de conjunto sofreu um golpe de aríete com a descoberta, por parte de Bertrand Russell, de paradoxos envolvendo o uso irrestrito do princípio de compreensão, isto é, aquele que afirma que toda propriedade ***P*** define uma extensão composta dos objetos que têm ***P***. Em uma

[4] Um destes teoremas, demonstrado em 1885, é o que afirma que a união finita ou enumerável de conjuntos finitos ou enumeráveis é finita ou enumerável (LAVINE, *ibid*, p.89).

carta a Frege de junho de 1902, Russell chama atenção para o fato de que a aplicação indiscriminada de tal princípio, como Frege adotara em seus *Grundgesetze der Arithmetik*, de 1893, levava a paradoxos. Prontamente, Frege se sensibilizou com a descoberta de Russell e, na segunda edição de seus *Grundgesetze,* de 1903, anexou o seguinte *postscriptum*:

> Dificilmente poderá suceder a um cientista uma coisa mais infeliz do que ter um dos fundamentos do seu edifício abalado depois de ter terminado a obra.[...] Foi nesta posição que me vi colocado por uma carta de Bertrand Russell quando a impressão deste volume estava quase completa. (FREGE in: KNEALE e KNEALE, p.660, [1962])

Basicamente, o que Russell descobriu é que se pode definir uma extensão de conceito ou classe que, quando argumento da função proposicional que a define, leva a paradoxos. De fato, seja uma classe ou conjunto $\boldsymbol{Z}$ definido da seguinte maneira:

$$Z = \{ x / \ x \notin x \}$$

Portanto, a propriedade $x \notin x$ define extensionalmente o conjunto $\boldsymbol{Z}$: só é membro de $\boldsymbol{Z}$ os conjuntos que não são membros de si mesmos. E o que dizer do próprio conjunto $\boldsymbol{Z}$? É $\boldsymbol{Z}$ membro de si mesmo ou não? Qualquer que seja a hipótese de que partamos, chega-se à contradição de que $Z \in Z \leftrightarrow Z \notin Z$. Por conseguinte, fazia-se necessária a imposição de certos limites ao uso do princípio de compreensão, gerando-se, assim, uma reformulação ou aperfeiçoamento da teoria de conjuntos fundamentada em uma compreensão lógica da noção de conjunto.

Uma vez que o fundamento da noção lógica de conjunto – o princípio de compreensão – mostrou-se falho, quando usado irrestritamente, para exercer o papel de base intuitiva para a noção de conjunto, pode-se levantar a questão se a seqüência $\boldsymbol{W}$ de todos os ordinais, pressuposto fundamental da teoria cantoriana de conjuntos, também não padece de falhas estruturais, engendrando, da mesma forma que o supracitado princípio, contradições dentro da teoria dos conjuntos. De fato, o próprio Russell, tomando por base os trabalhos do matemático italiano Cesare Burali-Forti sobre a impossibilidade de haver uma tricotomia dos ordinais, de 1897[5], percebeu na seqüência ***W*** uma natureza contraditória ou paradoxal (VIERO, p.117, [1997]). Em seus *The Principle of Mathematics*, de 1903, Russell afirma:

> Existe uma dificuldade no tocante ao tipo [em linhas gerais, o seu número ordinal] da totalidade da série dos ordinais. É fácil provar que todo segmento desta série é bem ordenado e é bastante natural supor que a totalidade da série seja também bem ordenada. Se isto ocorre, seu tipo deveria ser o maior de todos os ordinais, pois os ordinais menores que um dado ordinal formam, em ordem de magnitude, uma série cujo tipo é este ordinal em consideração. Contudo, não pode existir o maior ordinal, porque todo ordinal pode ser aumentado através da soma com 1. Desta contradição, Burali-Forti, que a descobriu, infere que dados dois ordinais [...], não é necessário que um seja o maior e o outro o menor (RUSSELL in: VIERO, ibid, p.118).

A contradição apontada por Russel em relação a ***W,*** sucintamente, consiste em identificar ***W*** como uma seqüência bem ordenada de ordinais cujo limite tem, necessariamente, de estar fora da seqüência, conforme o primeiro princípio de geração de Cantor. Entretanto, como ***W*** é a totalidade de todos os ordinais, tal limite está dentro de ***W***, assim como o sucessor imediato deste limite. Portanto, admitir que ***W*** é bem ordenada leva ao paradoxo de, ao mesmo tempo, haver e não haver um maior número ordinal, limite da pressuposta seqüência bem ordenada ***W***. Obviamente, por *reductio ad absurdum*, o que se pode concluir deste argumento é que ***W*** não constitui uma seqüência bem ordenada de todos os ordinais e, portanto, dados dois ordinais quaisquer ***a*** e ***b*** de ***W***, não há necessariamente entre eles uma relação de tricotomia – $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

Em um primeiro momento, a impressão que se tem é a de que o trabalho de Burali-Forti, de 1897, haveria minado a teoria dos números ordinais de Cantor; e a constatação de seus escombros teria sido feita, posteriormente, por Russell, em 1903. Mas isto não é bem o caso. Ciente do que havia sido feito por Burali-Forti, Cantor colocou-se na posição de defesa de sua teoria dos números ordinais. Ora, posto que ***W*** não constitui uma seqüência bem ordenada e, por conta disto, não nos garante a intuitiva tricotomia entre dois ordinais quaisquer, é pertinente tomar ***W*** como uma extensão inútil da sucessão dos inteiros positivos. Diante de seus

[5] Ver “A Question on the Transfinite Numbers and On Well-Ordeting Classes”, in: HEIJENOORT, J. van., (ed). *From Frege to Gödel- A Source Book of Mathematical Logic*. Harvard University Press,[1967], p. 104-112.

resultados alcançados, Burali-Forti peremptoriamente considerou que ***W***, um pressuposto arquétipo de um conjunto bem ordenado, não poderia se prestar a tal papel, posto que sua hipotética ordenação leva a contradições (BURALI-FORTI, [1981], p.111)[6]. Contra tal argumento, Cantor se pronuncia com a tese de que ***W*** não é um conjunto bem ordenado simplesmente porque não é um conjunto. Em uma carta a G.C. Young, de março de 1907, Cantor diz que:

> ***W*** não é um "conjunto", no sentido em que uso [esta expressão], mas uma 'multiplicidade inconsistente. Quando eu escrevi os *Grundlagen*, eu já compreendera isto claramente [...], [denominando] ***W*** de "seqüência de números absolutamente infinita"(CANTOR, [1999], p.925).

Dentro dos aspectos teológicos que cercam a teoria de Cantor, é compreensível entendermos ***W*** como impossível de ser concebida como conjunto. Cada número de ***W*** ocupa uma posição bem definida na mente divina, assim como qualquer número natural finito é perfeitamente definido, em princípio, para a inteligência humana. Mas, como não podemos conceber o último número finito, posto que, dado qualquer natural ***k***, é sempre possível concebermos o natural ***k + 1***, também ***W*** não admite um fechamento, isto é, um último número ordinal que encerre a absolutamente infindável capacidade divina de contar ou enumerar. A seqüência ***W***, portanto, é uma amostra da onipotência divina e esta é, por princípio, impossível de ser limitada por qualquer número. Ao contrário dos conjuntos transfinitos – como as potências ascendentes **(I), (II),** ...,**(N)**, **(N+1)**,...- que, embora infinitos, são limitados ordinalmente, cada um começando e terminando com ordinais bem definidos, ***W*** é intrinsecamente ilimitado, dado que representa, em ato, o poder absolutamente infinito da razão divina de tudo ordenar ou enumerar. Assim, como não pode ser encerrada ou vista como um todo fechado, ***W*** não é um conjunto.

Entretanto, cabe aqui ser ressaltado que o que impede a natureza conjuntística de ***W*** não advém tanto do fato de ***W*** indicar uma extensão absurdamente grande,

[6]O que Burali-Forti considera, em seu artigo, como uma classe bem ordenada não corresponde estritamente à noção cantoriana. Em Cantor, como por ele definido em suas *Beiträge*, de 1897, um conjunto ***F*** é bem ordenado se, e somente se, (1) Há em ***F*** um menor elemento; (2) Se ***F'*** é qualquer parte de ***F*** e ***F*** tem um ou mais elementos maiores que todos os de ***F'***, então há um elemento ***f'***de ***F*** que se segue imediatamente após todos os elementos de ***F',*** de tal forma que, em ***F***, que não há nenhum elemento intermediário entre todos os ***F'*** e ***f'*** (CANTOR, p.137-138,[1941]). A concepção de Bural-Forti de conjunto bem ordenado só avalia as condições deste ter um primeiro elemento e de que cada elemento, tendo sucessores, tem um sucessor imediato.

mas sim de que ***W*** é, por excelência, a seqüência absoluta dos números naturais, propiciadoras da contagem ou enumeração de qualquer conjunto e, como tal, ***W*** não pode admitir um número ordinal que não esteja dentro de si. Para Cantor, a seqüência ***W*** é o princípio formal, por assim dizer, de Deus poder enumerar ou bem ordenar a sua criação. Contra aqueles que apresentam o trecho bíblico segundo o qual Deus ordenou tudo em número, peso e medida – Sab, 11,21 – como atestando a não existência do infinito atual no mundo, já que só há números finitos – argumento utilizado, inclusive, por Santo Tomás de Aquino e que se remonta à tradição teológica islâmica *kalam*, dos séculos IX-XI D.C (HALLETT, op.cit, p.22; CRAIG, partes I-II, [1979]) – Cantor aduz o seguinte:

> Creio que a passagem da Sagrada Escritura "Vós ordenastes tudo em medida, peso e número" [...], em que foi vista uma contradição em relação aos números infinitos atuais, efetivamente não os contradiz. Suponhamos que há, como acredito, 'potências' infinitas [...] e realmente 'enumerações de conjuntos bem ordenados', isto é, os números ordinais [...] então, certamente, estes números transfinitos também seriam considerados pela aludida passagem da sagrada escritura [...] [No domínio transfinito], uma vastíssima abundância de formas e de *species numerorum* é disponível e, em um certo sentido, [estas espécies estão em um estoque muito maior] do que o existe correspondentemente no pequeno domínio do que é ilimitado e finito. Por conseguinte, estas espécies transfinitas, assim como os números finitos, estão à disposição da intenção do Criador e da sua vontade absolutamente inestimável.[...] Que uma 'criação infinita' deva ser assumida como tal pode-se provar de muitas formas [...] [P]rova-se isto do próprio conceito de Deus. Posto que Deus é sumamente perfeito, conclui-se que Lhe é possível criar um *transfinitum ordinatum*. Portanto, em virtude de Sua pura benevolência e majestade, concluímos que há atualmente um *transfinitum* criado (CANTOR in: HALLETT, ibid, p.23)

Assim como o entendimento humano dispõe da seqüência ilimitada dos números naturais para a enumeração do que é finito, Deus conta, para tanto, da seqüência ***W***; nada pode escapar da enumeração divina, posto que não há contagem alguma, por maior que seja, que perpasse a totalidade de números ordinais de ***W***. No pensamento de Deus, qualquer multiplicidade dada é contável por um segmento ordinal da estrutura absoluta dos números naturais. Postular um segmento ordinal maior que ***W***, como o fez tacitamente Burali-Forti, é cair no absurdo de conceber um Deus onipotente incapaz de bem ordenar a sua criação atualmente infinita. Bem entendido, o paradoxo de Burali-Forti - assim denominado por influência de Bertrand Russell (VIERO, op.cit, p.118) – é similar ao paradoxo que se surge quando se introduz o maior número natural finito. Dada a seqüência dos naturais finitos completamente dada, pode-se introduzir o maior número natural finito $\boldsymbol{M}$. Na qualidade de maior número $\boldsymbol{M}$, para qualquer número natural finito n, tem-se que $\boldsymbol{n \leq M}$. Entretanto, como M é um natural finito, temos que há o sucessor de $\boldsymbol{M + 1}$ tal que $\boldsymbol{M < M + 1}$. Mas $\boldsymbol{M + 1}$ é um natural finito, o que nos leva a $\boldsymbol{M + 1 \leq M}$. Portanto, $\boldsymbol{M + 1 \leq M}$ e $\boldsymbol{M < M + 1}$. Por conseguinte, por *reductio ad absurdum*, conclui-se que a seqüência dos naturais finitos é relativamente ilimitada: não há número finito qualquer que lhe seja limite. Da mesma forma, ***W*** é absolutamente ilimitada: não há número ordinal qualquer que seja o seu limite. Assim, a introdução da totalidade completa dos naturais, com um *limite ordinal finito*, equivaleria, de certa maneira, a postular um limite para o poder enumerativo da razão humana, quando esta se depara com totalidades finitas. Igualmente, a concepção de um maior ordinal de ***W*** é limitar a inteligência ordenadora divina, impondo a esta uma hipotética enumeração que está fora de seu alcance. Desta maneira, a noção de conjunto está ancorada na seqüência ***W***: qualquer multiplicidade ou agregado de objetos, se contáveis por meio de algum segmento de ***W***, consistirá em uma multiplicidade consiste. Se tal segmento for finito, então o que temos é a contagem realizada no âmbito do finito, perfeitamente intuída pela razão humana; se a porção utilizada de ***W*** for infinita, então temos em ação a inteligência de Deus, bem ordenando ou enumerando a sua criação infinita.

3.2 O conceito de número cardinal em Cantor: um todo homogêneo e uniforme.

Embora os *Grundlagen* se destinem a uma apresentação geral da noção de número ou tipo ordinal, o intuito fundamental de Cantor, ao escrevê-los, é fornecer um material conceitual capaz de precisar o que seja a *potência* de um conjunto bem definido. Pairando sobre os *Grundlagen* como um guia, o conceito de potência é o princípio diretivo da teoria cantoriana sobre os números ordinais; para que haja um desenvolvimento da noção de potência, justifica-se uma teoria dos números ordinais transfinitos. Conforme Cantor nos diz em um dos parágrafos inicias dos *Grundlagen*,

> A introdução destes novos números inteiros [os números ordinais transfinitos] parece-me de maior importância para o desenvolvimento e precisão do *conceito de potência* [...] De acordo com tal conceito, todo conjunto bem definido tem uma determinada potência; dois conjuntos têm a mesma potência se eles podem ser, elemento a elemento, correlacionados um com outro de maneira um para um [ou bijetivamente] (CANTOR, [2000], p.865)

Como foi visto antes, Cantor parece associar intimamente a noção de conjunto com segmentos próprios da totalidade ***W*** dos números ordinais. Uma multiplicidade só é conjunto se houver uma correspondência bijetiva entre esta e uma parte própria de ***W***. Assim, como todo conjunto bem definido é uma multiplicidade cujos elementos estão *lado a lado* com os números ordinais de algum segmento de ***W***, é óbvio que a potência de tal conjunto também está emparelhada bijetivamente com tal segmento, *se há o pressuposto de que também a potência é um conjunto*. Entretanto, tal segmento de ***W*** é bem ordenado, ao passo que a potência de um conjunto, como nos diz Cantor, "é uma propriedade independente da ordenação" (CANTOR, *ibidem*, p.885). Todavia, é natural pressupormos que, ao considerar a potência de um conjunto, estamos, de fato, avaliando a *estrutura inter-relacional deste conjunto quando seus elementos constitutivos são tomados um a um*. Para uma análise acurada destes tópicos, é necessário nos retirar do contexto dos *Grundlagen* e lançarmo-nos até o artigo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, de 1895, quando Cantor define, de forma precisa, o conceito de *potência* ou *número cardinal*.

Primeiramente, o artigo de Cantor – daqui para frente, de maneira abreviada, denominado de *Beiträge* – inicia-se com a definição de *agregado*. A saber:

> Por um "agregado", devemos entender qualquer coleção, [dada] como um todo M, de objetos *m* definidos e separados de nossa intuição ou pensamento (CANTOR., [1941], p.85).

Em linhas gerais, o que Cantor define como agregado é a noção intuitiva de conjunto como uma totalidade de objetos, *separados e definidos em nossa intuição*, reunidos em um todo único. De fato, se todo conjunto está em correspondência um a um com um segmento próprio da totalidade ***W*** dos ordinais, a separação e definição requerida por Cantor consegue-se com a atribuição de um único ordinal a cada elemento do agregado.

Logo após a definição de agregado, Cantor introduz o conceito de *potência* ou *número cardinal* da seguinte maneira:

> Todo agregado M tem uma "potência" definida, que eu chamo de seu "número cardinal".
>
> Chamaremos pelo nome "potência" ou "número cardinal" de M o conceito geral que, por meio de nossa faculdade ativa ou pensamento, surge do agregado M quando fazemos abstração da natureza de seus vários elementos *m* e da ordem em que eles foram dados (CANTOR, *ibid*, p.86).

Diante de um agregado qualquer, a nossa faculdade ativa ou pensamento é capaz de abstrair a natureza dos elementos deste agregado, resultando disto um todo no qual se verificam relações de ordem entre seus elementos. Nesta primeira etapa deste processo de abstração, o agregado original é reduzido ao seu *tipo* ou *número ordinais*, conforme se trate, respectivamente, de um agregado genericamente ordenado ou, mais especificamente, bem ordenado. Com o tipo ou o número ordinal em mãos, o pensamento opera uma segunda abstração que elimina deste agregado ordenado e abstrato a sua ordem específica. Com isto, o que surge do agregado original é um todo de puras unidades que, entre si, não mantêm nenhuma relação de ordem. Por conseguinte, a potência ou o número cardinal é uma espécie de imagem mental e abstrata do agregado; este, por sua vez, é um objeto exterior ao pensamento, enquanto aquele, o número cardinal, existe enquanto uma construção intelectual efetuada pelo pensamento. É isto, de fato, o que nos diz Cantor, sob a forma de uma pergunta retórica:

> Não é um agregado um objeto *exterior* a nós, enquanto seu número cardinal é a imagem abstrata que dele [o agregado] temos *em nossa* mente? (CANTOR, *ibid*, p.80).

Pelo o que é dito, depreende-se que a potência ou número cardinal é um todo de puras unidades sem qualquer ordenação interna, no qual cada elemento está dado separada e distintamente à nossa intuição. Todavia, embora tecnicamente a definição de número cardinal soe satisfatória, não é claro se o número cardinal é um conceito geral ou um objeto de nossa mente. Trata-se de uma propriedade de agregados ou de um novo tipo de agregado, resultado de uma dupla abstração realizada em um todo exterior ao pensamento?

Embora na definição de número cardinal Cantor empregue a expressão "conceito geral" para se referir à potência de um conjunto, o fato de um número cardinal ser um "agregado de unidades, [...] que tem existência em nossa mente, como a imagem ou projeção intelectuais de um dado agregado M"(CANTOR, *ibid*, p.86), leva-nos a conceber o número cardinal não como um conceito geral ou propriedade, mas como um conjunto com características especiais, não presentes em outros agregados. É o que, por exemplo, se extrai da seguinte afirmação de Cantor:

> [O]s elementos [do número cardinal], as assim chamadas unidades, em um certo sentido, formaram-se juntas, uma em relação à outra, organicamente, a fim de compor um todo [*uniforme*], de tal maneira que nenhuma delas tenha uma relação de ordem privilegiada em relação às demais (CANTOR, in: HALLETT, [1996], p.141).

A potência de um conjunto pode ser vista como um *todo orgânico e uniforme* em que cada unidade constitutiva tem igual importância para a determinação da estrutura interna deste todo. Antes de se apresentar como um conceito geral ou uma propriedade instanciada em qualquer conjunto, a potência mais se assemelha a um todo de puras unidades cuja estrutura interna é *homogênea ou uniforme*. Portanto, pode-se pensar a potência de um conjunto como a estrutura comum a todos os conjuntos que têm a mesma cardinalidade; esta, por sua vez, não diz respeito à ordenação interna que estes conjuntos tenham, mas somente à *quantidade* de elementos, *intuídos um a um e separadamente*, presentes nestes conjuntos.

Pelo o que foi visto até agora, Cantor parece assumir o número cardinal ou potência como a imagem abstrata e homogênea de um agregado. Dado um agregado ***M*** – de objetos exteriores ao pensamento -, o pensamento intui cada um de seus elementos de forma distinta e separada. Descartando a natureza destes objetos, temos o tipo ordinal deste agregado, que, conforme Cantor, "em um certo sentido, [...] podem ser vistos [os tipos ordinais] como uma composição de *matéria* e *forma*. As unidades conceitualmente distintas que [tais tipos] contêm fornecem a *matéria*, enquanto a ordem subsistindo entre elas é a *forma* correspondente"(CANTOR in: HALLETT, *ibid*, p.135). De posse do tipo ordinal ou *forma* de um agregado, podemos nos ater somente às suas *unidades conceitualmente distintas* ou à sua matéria, o que nos dá a sua potência ou número cardinal. Neste caso, o que nos resta do agregado inicial é um todo de unidades distintas, intuídas em nosso pensamento.

Mas se a ordem entre os elementos do agregado – em princípio, responsável pela diferenciação de cada um dos elementos que compõem tal agregado – foi abstraída para se chegar ao número cardinal, como este último pode ser composto de unidades conceitualmente distintas? Tal questão é um dos pontos problemáticos da teoria cantoriana sobre a noção de potência ou número cardinal. Segundo o filósofo Michael Hallett, as concepções de Cantor sobre cardinalidade *embutem* uma teoria dos números ordinais. Segundo Hallett, em inúmeros teoremas sobre os números cardinais, Cantor pressupõe que as unidades de um cardinal, em princípio sem inter-relações de ordem, estão bem ordenadas[7]. Além disso, Hallett aponta para o fato de que a expressão "todo orgânico de unidades" vale tanto para os cardinais como imagens mentais de agregados, como para os próprios agregados. Neste sentido, tal expressão não serve como princípio de distinção entre agregados nos quais se verificam relações de ordem e os cardinais, em que tais relações estariam ausentes. Em síntese, o caráter orgânico não é propriedade exclusiva dos cardinais *ordinalmente amorfos*, mas também se encontraria nos agregados ordenados. Segundo Hallett;

> [A] noção de um "todo orgânico" não parece fornecer uma separação suficiente para os conjuntos. Isto porque Cantor *sempre* toma um conjunto como uma coleção que é 'unificada como um todo'[...], ou 'uma coisa' ou 'uma coisa em si mesma'. De fato, uma das mais importantes contribuições de Cantor foi o fato de tomar os conjuntos como objetos únicos. E é difícil ver qual seria a diferença entre objetualidade, [...], totalidade e 'todo orgânico'.(HALLETT, *ibid*, p.136).

---

[7]Um dos exemplos mais significativos deste uso *embutido* dos ordinais em questões envolvendo cardinalidade é o teorema que nos diz que a potência de um conjunto não se altera quando substituímos seus elementos por outros. Nas palavras de Cantor, a demonstração de tal teorema é a seguinte: "o número cardinal M** [originalmente, para denotar a cardinalidade, Cantor emprega uma letra maiúscula com dois traços superpostos, indicativos da dupla abstração] de um conjunto M permanece inalterado se outras coisas substituem os elementos m_1, m_1', m_1''... de M_1. Se temos que $M \sim M_1$, então há uma correspondência pela qual os elementos m, m', m'',...de M correspondem aos elementos m_1,m_1',m_1'',...de M_1. Podemos imaginar [tais elementos] de M_1 como substituindo os elementos m, m', m'',...de uma só vez. Portanto, o conjunto M é transformado no conjunto M_1 e, dado que tal transformação não altera em o número cardinal, temos que $M^{**} = M_1^{**}$"(CANTOR in HALLETT,*ibid*, p.139-140). Neste teorema, a ordenação inicial dos agregados M e M_1é tomada como permanecendo nos respectivos cardinais,a ponto de haver uma perfeita paridade entre as unidades de M^{**} e M_1^{**}.

Desta maneira, em princípio, ser um todo orgânico não elimina, necessariamente, a ordenação interna de um agregado. Deste modo, como nos alerta Hallett, a dupla abstração, que dá origem aos cardinais como todos orgânicos, não descarta uma estrutura interna de ordem, portando-se como "uma teoria ordinal *disfarçada*"(HALLETT, *ibid*, p.140). Se é possível distinguir as unidades de um número cardinal, isto se dá porque há uma estrutura de ordem, entre tais *puras unidades abstratas*, capaz de fornecer tal distinção.

De fato, a identidade entre estruturas de ordem e cardinal não é *absolutamente* descartada por Cantor. Para os números finitos, os números ordinal e cardinal *coincidem*, o que revela que a mesma forma ordinal é predicada ao agregado como sua cardinalidade, quando tal agregado é finito. Nos *Grundlagen*, Cantor afirma que:

> Para os conjuntos finitos, a potência coincide com a enumeração [*Anzahl*] de [seus] elementos, posto que, como é sabido, tais conjuntos têm a mesma enumeração dos elementos em qualquer ordenação [dada] (CANTOR, [2000], p.884).

Sendo-nos dado um agregado finito $\boldsymbol{M = \{m_1, m_2,..., m_k\}}$, podemos abstrair a natureza de seus elementos componentes. Como resultado, o que nos resta é o número ordinal finito ou a enumeração $\boldsymbol{K = \{e_1, e_2,...,e_k\}}$, em que as unidades $\boldsymbol{e_j}$ são, por assim, dizer *unidades ordinais*. Se mais uma vez realizarmos uma abstração, Cantor nos diz que o que resulta é uma enumeração $\boldsymbol{K^* = \{e_1, e_2,...,e_k\}}$, idêntica à encontrada anteriormente, com a distinção de que os termos $\boldsymbol{e_j}$ são, agora, *puras unidades cardinais*. Em síntese, o número cardinal finito é o mesmo número ordinal finito; para o domínio da finitude, ordinalidade e cardinalidade coincidem ou, dito de outra forma, as unidades ordinais não se diferenciam das unidades cardinais, se a ambas estiver associado o mesmo índice finito.

Se para os agregados finitos a distinção entre cardinalidade e ordinalidade não se faz marcante, o mesmo não se pode dizer para os conjuntos infinitos. Dado um agregado infinito $\boldsymbol{M}$, mediante o processo de dupla abstração, chegamos, sucessivamente, tanto à sua estrutura ordinal $\boldsymbol{M^*}$, como à sua cardinalidade ou potência $\boldsymbol{M^{**}}$. Em princípio, qualquer que seja a natureza do conjunto infinito inicial $\boldsymbol{M}$, teremos sempre que $\boldsymbol{M^* \neq M^{**}}$. Dito com outras palavras, para os conjuntos infinitos, a cardinalidade é *absolutamente* distinta da ordinalidade; se um dado agregado infinito apresenta inter-relações de ordem entre seus elementos, quaisquer que estes sejam, estas inter-relações são *absolutamente* perdidas quanto consideremos tal agregado elemento por elemento, tomados um a um.

Na seqüência das *Beiträge*, após a apresentação genérica da noção de potência ou número cardinal finitos, Cantor passa ao problema dos cardinais transfinitos. De imediato, surge a introdução do cardinal *Alef -zero*:

> O primeiro exemplo de um agregado transfinito é dado pela totalidade dos cardinais finitos *v*; chamemos seu cardinal de "Alef-zero" e denotemo-lo por $\aleph_0$ [...] Que $\aleph_0$ é um número *transfinito*, isto é, não é igual a nenhum número finito *v*, segue-se do fato que, se adicionarmos a {*v*}[em que {*v*} é a totalidade dos números cardinais finitos] um novo elemento e_0, o agregado-união ({*v*},e_0) é equivalente ao agregado original {*v*}.[...] Ao elemento e_0 do primeiro [agregado], façamos o elemento 1 do segundo, e para o elemento *v* do primeiro, façamos corresponder o elemento *v* + 1 do segundo (CANTOR, [1941], p.104).

Dados dois agregados ***M*** e ***N***, ***M*** é equivalente a ***N*** – em símbolos, ***M ~N -***, se há uma correspondência bijetiva entre ***M*** e ***N***. (CANTOR, *ibid*, p.86). A partir da noção de equivalência entre agregados, Cantor apresenta a condição necessária e suficiente para a igualdade entre números cardinais: dois agregados têm o mesmo número cardinal se, e somente se, são equivalentes (CANTOR, *ibid*, p.86):

$$(M \sim N) \leftrightarrow (M^{**} = N^{**})$$

Se dois agregados finitos são equivalentes, a adição de um elemento a qualquer um deles, sem que ao outro também se acresça uma unidade, joga por terra a equivalência entre ambos e, por conseguinte, o mesmo número cardinal inicial. Ao contrário do que acontece no âmbito do finito, dois agregados infinitos, se equivalentes, um deles pode ser acrescido de uma unidade e o outro não, sem que, com isto, perca-se a equivalência mútua e, portanto, a mesma cardinalidade. Como exemplo de agregados infinitos que se mantêm equivalentes mesmo após o acréscimo de uma unidade a um deles, Cantor apresenta os conjuntos $\{v\}$ dos cardinais finitos e o conjunto $\{v\} \cup \{e_0\}$. Em linhas gerais, o argumento de Cantor é o seguinte: podemos listar todos os cardinais finitos **1,2,...,v,...**de um lado, esgotando a totalidade $\{v\}$, assim como podemos listar o conjunto $\{v\} \cup \{e_0\}$ a partir de e_0: e_0, **1, 2,..,v,...**. Obviamente que ambos agregados são equivalentes, uma vez que existe o seguinte emparelhamento biunívoco entre eles:

1 2 ... v ...

***e_0* 1 ... v -1 ...**

Pelo fato de *{v}* e *{v}* ∪ *{e_0}* serem equivalentes, segue-se que ambos têm o mesmo número cardinal $\aleph_0$. De fato, tal número cardinal não pode ser finito, dado que satisfaz a igualdade $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$, o que é impossível para qualquer cardinal finito **v**. Uma vez que $\aleph_0$ não é finito, Cantor lhe atribui a qualidade de *transfinito*, postulando-o como o primeiro número cardinal de caráter transfinito.

Analisada mais pormenorizadamente, a equação $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$ nos diz que a totalidade completa dos cardinais finitos, *desconsiderando as relações de ordem entre seus elementos* permanece inalterada se a ela adicionarmos, *de maneira arbitrária*, mais um objeto[8]. Pela equivalência anteriormente apresentada, isto implica que o conjunto dos cardinais finitos está em correspondência biunívoca com o conjunto composto destes mesmos cardinais, adicionado de mais um objeto qualquer. Para que tal biunivocidade seja demonstrada, Cantor precisa distinguir cada cardinal finito e colocá-lo ao lado de um único elemento da totalidade dos cardinais finitos pela presença de mais um objeto arbitrário. Todavia, para fazer isto, é necessário pressupor que os conjuntos em questão ofereçam critérios de diferenciação entre seus elementos. Naturalmente, o critério mais simples que se apresenta é a indexação dos elementos dos conjuntos aqui abordados com os números naturais, de tal forma que o emparelhamento acima apresentado se dê de forma intuitiva. Uma vez emparelhados, fica demonstrada a existência de uma bijeção entre a totalidade dos cardinais finitos e o conjunto composto desta mesma totalidade mais um objeto. A partir disto, conclui-se que a cardinalidade dos cardinais finitos é *invariante* em relação ao acréscimo *arbitrário* de mais um objeto à totalidade destes cardinais; neste sentido, o caráter *desestruturado ordinalmente* dos cardinais finitos não se altera pela presença de mais um objeto. Portanto, o número $\aleph_0$ - assim como qualquer número cardinal – mais se

[8] De fato, o que Cantor demonstra é que há uma correspondência bijetiva entre um conjunto com número ordinal $1 + \omega$ e outro com número ordinal ω, o que não tem o mesmo alcance de $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$. Para a demonstração de que o cardinal do infinito enumerável não se altera pela adição de um objeto, deve-se, primeiramente, demonstrar a comparabilidade dos cardinais em geral. Em especial, a fim de provar de que dois conjuntos têm cardinais iguais, é necessário provar que eles satisfazem a *condição de equivalência entre cardinais*, um teorema da teoria dos conjuntos que afirma que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se, e somente se, cada um deles é equivalente a um subconjunto do outro (cf. FRAENKEL, [1996], p.73).

assemelharia a uma propriedade comum a todos os conjuntos equivalentes[9]; se tais conjuntos são infinitos, tal propriedade é invariante em relação ao acréscimo arbitrário de uma unidade. De certa forma, a cardinalidade seria a propriedade que resta de tais conjuntos quando destituídos de sua natureza e ordenação internas[10].

Entretanto, ao invés de ser visto como uma propriedade presente atualmente em um agregado, Cantor parece entender a cardinalidade como um conjunto que surge de um agregado quando deste realizamos a dupla abstração. O resultado deste reiterado ato de abstrair é um agregado de unidades, *equivalente ao conjunto que lhe deu origem.* Conforme nos diz Cantor, nas *Beiträge*:

> Como vimos, M**[11]surge, por assim dizer, a partir de M, de tal forma que para todo elemento *m* de M, uma unidade especial de M** surge. Portanto, podemos dizer que M~M** (CANTOR, *ibid*, p.88).

Fica claro que Cantor não compreende o número cardinal como um conceito ou propriedade comum a todos os agregados equivalentes, mas como um agregado que é equivalente ao conjunto que lhe deu origem. Na qualidade de um agregado, o número cardinal tem todas as suas unidades intuídas distinta e separadamente. Entretanto, como em um número cardinal, um *todo sem ordenação interna*, é

---

[9] Além de ser interpretados como a propriedade comum a todos os conjuntos equivalentes, o número cardinal também pode ser compreendido como o conjunto composto destes conjuntos equivalentes. Dado o conjunto ***A***, podemos definir seu número cardinal $\boldsymbol{A^{**} = \{B/ B \sim A\}}$

Tal interpretação dos cardinais como um conjunto de conjuntos é devido, em especial, a Bertrand Russell (SUPPES, [1972], p.109; RUSSELL, [1966], p.25). Consoante tal visão, o cardinal $\boldsymbol{\aleph_0 = \{X/ X \sim N\}}$, em que ***N*** é o conjunto dos naturais, certamente contém o conjunto $\boldsymbol{N \cup \{e\}}$, posto que este é equivalente à sucessão dos naturais.

[10] Ao retirarmos de um conjunto a natureza de seus elementos e suas relações de ordem, o que resta é a cardinalidade. Entretanto, não é de todo correto pensarmos na cardinalidade como uma propriedade de um todo *amorfo internamente*, sem qualquer organização interna. De fato, há uma íntima relação entre a cardinalidade de um conjunto e sua, por assim dizer, *organização topológica.* Isto porque as *puras unidades* do número cardinal podem ser vistas abstratamente como *pontos*. A partir desta intuição dos cardinais como conjunto de *pontos*, pode-se aproximar o conceito de número ao de espaço topológico. De fato, em 1914, Felix Haussdorf fez tal aproximação ao definir os *espaços de Haussdorf* mediante quatro postulados que podem perfeitamente ser satisfeitos pelas unidades abstratas de um número cardinal infinito, *desde que se admita que é possível diferenciar tais unidades*; era o início da *topologia conjuntística.* Eis os postulados de Haussdorf (EVES, [1997], p.711).

H1: para cada x de um conjunto qualquer de pontos H, existe um subconjunto de H que contém x e é denominado de vizinhança Nx de x;

H2: para quaisquer vizinhanças Nx e N'x de x, existe uma vizinhança N"x que está contida tanto em Nx quanto N'x;

H3: se y é um ponto de Nx, então existe uma vizinhança Ny de y contida em Nx;

H4: se x e y são pontos de H, com $x \neq y$, então existem as vizinhanças Nx e Ny sem pontos em comum.

[11] No texto original, o número cardinal ***M**** é indicado pela letra ***M*** ** é indicado pela letra ***M*** sob posta a dois traços horizontais, indicativos da dupla abstração. Por questão de facilidade de digitação, é usado aqui o símbolo espúrio "***M**** ".

possível diferenciar as unidades a fim de colocá-las lado a lado às unidades do conjunto do qual surge por dupla abstração? Sem a indexação com os números ordinais, finitos ou transfinitos, como se daria a separação uma por uma das unidades dos cardinais? De fato, tal questão nos remete ao próprio estatuto de *legítimo conjunto* pleiteado pelos cardinais, posto que, nos autênticos conjuntos, é mister a intuição distinta e separada de todos os seus elementos.

Neste ponto, somos levados à noção de conjunto que, em tese, permeia os trabalhos de Cantor, em especial os *Grundlagen*, de 1883. Como já foi visto, Cantor admite que um conjunto ou agregado bem definido é qualquer *multiplicidade* que admite ser contada ou bem ordenada. Em outras palavras, qualquer multiplicidade que admita uma bijeção com um segmento próprio da totalidade *incompletável* ***W*** dos ordinais é um conjunto bem definido. Entretanto, admitir que isto encerre a noção de conjunto é excluir, de imediato, os cardinais como conjuntos, já que estes não têm ordenação alguma, consistindo em *coleções ordinalmente amorfas de unidades*. Mas, como vimos, os cardinais são, para Cantor, conjuntos bem definidos e que estão em relação de equivalência com os agregados dos quais surgem por abstração dupla. Daí surge a seguinte alternativa: ou os cardinais são bem ordenados e, consoante Hallett, são todos bem ordenados *disfarçados*, ou bem o critério de *conjuntividade* de Cantor, baseado na bijeção com partes próprias de ***W***, tem de ser revisto ou aperfeiçoado.

Escolhendo-se a opção de revisão do critério de bijeção, surge a necessidade de fundamentar o caráter conjuntístico dos cardinais sem um apelo *explícito* aos segmentos de ***W***. Neste caso, aparece como fundamento da cardinalidade como agregado bem definido o axioma da substituição – *Axiom of Replacement*[12].

[12] O axioma da substituição é originalmente atribuído a A .Fraenkel e T.Skolem. A motivação inicial para a introdução deste axioma foi a constatação de que os axiomas de Zermelo, apresentados em 1908 como os fundamentos da noção de conjunto, eram insuficientes para legitimar autênticos modelos da teoria zermeliana como conjuntos. Em especial, percebeu-se que se $\mathbf{Z}_0$ é o modelo de Zermelo para os axiomas usuais da aritmética, então o conjunto $\mathbf{P} = \{\mathbf{Z}_0, \wp\mathbf{Z}_0, \wp\wp\mathbf{Z}_0, \ldots\}$ – em que “$\wp$”representa a operação “subconjunto de”, bem definida na teoria de Zermelo -, que é modelo dos axiomas de Zermelo, não tem sua existência demonstrada pelos mesmos axiomas. A fim de provar a existência de tal conjunto, Fraenkel e Skolem adicionaram aos axiomas de Zermelo o axioma de substituição. Conforme Fraenkel: “se *M* é um conjunto e cada elemento de *M* é substituído por ‘uma coisa do domínio β, [sendo β um conjunto], então *M* é transformado em um conjunto [*M'*].”(FRAENKEL, [1922], p.231). Segundo Skolem: “seja *U* uma função proposicional definida que vale para certos pares *(a,b)* no domínio *B*. Consideremos, além disso, que para cada *a* exista, no máximo, um *b* tal que *U* seja verdadeiro. Então, enquanto os valores de *a* definem o conjunto M_a , os valores de *b* definem o conjunto M_b (SKOLEM in: VAN HEIJENOORT, [1967], p.297).

Seguindo Fraenkel, tal axioma admite a seguinte formulação (FRAENKEL, [1961], p.199):

Para qualquer conjunto S e para qualquer função unívoca f, existe o conjunto que contém somente os elementos f(x), tal que x é elemento de S.

Tal axioma, uma vez admitido tacitamente nas *Beiträge*, permite que ao número cardinal seja atribuído o caráter de conjunto ou agregado bem definidos. Dado um conjunto ***M*** – isto é, dada uma multiplicidade cuja natureza conjuntística seja inconteste -, podemos entender a dupla abstração que nos leva ao seu cardinal como um função que, *para cada elemento* ***m*** *de* ***M***, faz associar uma *pura unidade abstrata* ***m*****, *isolada das demais, sem relações de ordem de qualquer espécie com as demais unidades* ***m*****. Por conseguinte, a dupla abstração seria uma função ***f*****, tal que, para todo ***m*** $\in$ ***M***, faz associar a unidade ***f**(m) = m*****. Como tal função tem por domínio um conjunto bem definido ***M***, a totalidade ***f**(M)***, que constitui o cardinal de ***M***, é um conjunto bem definido.

3.3 Os segmentos próprios da totalidade *W* e sua relação com os cardinais transfinitos

Como já foi visto, para Cantor, a totalidade ***W*** dos números ordinais seria os números naturais *em estoque* na mente de Deus. Para bem ordenar a Sua criação, Deus utiliza-se de segmentos de ***W***, de tal forma que qualquer totalidade *in concreto* que possa haver no universo admite um número ordinal significativo da contagem ou boa ordenação efetuada pela própria divindade mediante os segmentos de ***W***. Daí que todo conjunto possível ou concebível deve ter um número ordinal que lhe é dado como o resultado final da contagem feita por Deus de *todos os seus elementos*. Mas, ao mesmo tempo, Cantor admite que o número cardinal, em princípio uma totalidade que não tem um ordinal que lhe é atribuível, também é um conjunto.

Para a demonstração de que **P** é um conjunto existente, toma-se inicialmente o conjunto Z_0 = ***{0,1,2,...}*** dos números naturais finitos, definidos como conjuntos específicos na teoria de Zermelo. Para cada natural ***n***, existe a função $f(n) = \wp^n Z_0$, em que $\wp^n Z_0$ é o resultado de aplicar ***n*** vezes a operação “subconjunto de”ao conjunto Z_0. Portanto, como Z_0 é um conjunto de existência demonstrada, também o é **P**.

Se considerarmos que Cantor, ao tratar dos cardinais, ampliou o seu critério de conjuntividade, admitindo como conjunto também as imagens de funções definidas em conjuntos bem definidos, então o problema da natureza conjuntística dos cardinais é, em um primeiro momento, resolvida. Entretanto, analisando a situação mais detidamente, vemos que mesmo com a ampliação das condições de Cantor para a conjuntividade, não é possível descartar a totalidade $\boldsymbol{W}$ dos ordinais para a legitimação dos cardinais como conjuntos. Isto porque os cardinais, a bem de serem conjuntos bem definidos, devem surgir de um agregado *já dado* $\boldsymbol{M}$ que é conjunto. Como garantia de que $\boldsymbol{M}$ é um conjunto, podemos postular que $\boldsymbol{M}$ é a imagem de uma função $\boldsymbol{g}$ definida em um outro conjunto $\boldsymbol{K^0}$, tal que $\boldsymbol{K^{**} \leq M^{**}}$, ou que $\boldsymbol{M}$ está em bijeção com um segmento próprio $\boldsymbol{\delta}$ de $\boldsymbol{W}$, tal que $\boldsymbol{\delta^{**} = M^{**}}$. No segundo caso, temos explicitamente a definição de conjunto baseada na correspondência bijetiva com partes próprias de $\boldsymbol{W}$, sendo o apelo aos ordinais como fundamento da natureza conjuntística dos cardinais óbvio. Na hipótese de $\boldsymbol{M}$ ser conjunto por consistir na imagem de uma função $\boldsymbol{g}$ definida em um conjunto $\boldsymbol{K^0}$, o problema da conjuntividade de $\boldsymbol{M}$ é transformado na questão de determinar por que $\boldsymbol{K^0}$ é um conjunto. Mais uma vez, sem que se faça um apelo explícito aos ordinais, toma-se o axioma da substituição como justificativa do caráter conjuntístico de $\boldsymbol{K^0}$. Neste caso, há uma função $\boldsymbol{g'}$, definida para um conjunto $\boldsymbol{K'}$, tal que $\boldsymbol{g'(K') = K^0}$. Se agora nos deparamos com a legitimidade do conjunto $\boldsymbol{K'}$, somos levados a postular uma terceira função $\boldsymbol{g''}$, com domínio *conjuntístico* $\boldsymbol{K''}$. Mais uma vez, para a justificação do caráter de conjunto de $\boldsymbol{K''}$, faz-se necessária uma quarta função $\boldsymbol{g'''}$, cujo domínio é um conjunto $\boldsymbol{K'''}$. Continuando este processo *ad infinitum*, chegamos à conclusão de que o número cardinal, afirmado como conjunto pelo emprego recorrente do axioma da substituição, pressupõe uma coleção *bem ordenada* de domínios funcionais $\boldsymbol{\chi = \{K^0, K', K'', ...\}}$. Por conseguinte, tal coleção está em correspondência bijetiva com um segmento próprio dos ordinais – a saber, o segmento $\mathbf{[1, \omega)}$ – e, portanto, tem a sua conjuntividade garantida pelo critério de bijeção com partes de $\boldsymbol{W}$[13].

---

[13] O caráter conjuntístico $\boldsymbol{\chi = \{K^0, K', K'', ...\}}$ pode ser assegurado pelo axioma de substituição. Define-se uma função $\boldsymbol{g}$ para todo número natural $\boldsymbol{n}$, tal que $\boldsymbol{g(n) = K^n}$. Com isto, o conjunto imagem $\boldsymbol{\chi}$ é um legítimo conjunto, uma vez que os naturais $\boldsymbol{N = \{0,1,2,..\}}$ são um autêntico conjunto. Mas o que o nos assegura que $\boldsymbol{N}$ é um legítimo conjunto? Para responder a isto, faz-se necessário um recurso direto à totalidade $\boldsymbol{W}$ dos ordinais. Como $\boldsymbol{N}$ é o menor infinito bem

Se a noção de conjunto no pensamento cantoriano está tão associada aos segmentos ordinais de ***W***, cabe analisar com mais cuidado as relações entre as potências ou números cardinais e estes segmentos. Como já visto, nos *Grundlagen*, Cantor dividira, por assim dizer, os segmentos de ***W*** por meio de classes de números (CANTOR, [2000], p.897; p. 909-910). Para cada segmento de ***W***, Cantor relacionou bijetivamente um número cardinal ou potência. Para os segmentos finitos, associam-se os cardinais finitos; para os segmentos infinitos, faz-se corresponder as potências transfinitas **(I)**, **(II), (III),** etc – mais tarde, nas *Beiträge* de 1897, como já observado, denominadas por Cantor de números cardinais e simbolizadas pela letra hebraica $\aleph$.

Ao segmento $[1,\omega_0)$, denominado de números da primeira classe, Cantor associou a primeira potência **(I)**; ao intervalo $[\omega_0, \omega_1)$, atribui-se à segunda potência **(II)**, sendo ω_1 o primeiro ordinal capaz de contar *todos* os elementos de um conjunto não-enumerável. A partir daí, de forma análoga, vão se introduzindo as potências ascendentes **(III), (IV),...**, **(N), (N+1)**,.... De maneira geral, cada potência transfinita está *espelhada* em ***W*** por meio de um segmento ordinal que consiste em um intervalo com um limite inferior e aberto quanto a um limite superior. Em uma carta a Dedekind, de 3 de agosto de 1899, Cantor denomina

> [O] sistema γ de todos os números [ordinais] correspondentes a um e mesmo número cardinal **c** de ´classe de número’, e, mais especificamente, a classe de número **Z(c)**. Prontamente vemos que, em cada classe de número, ocorre um menor número γ_0 e que há um número γ_1 que situa fora de **Z(c)**, tal que a condição
>
> $$\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_1$$
>
> é equivalente ao fato que o número γ pertence à classe de número **Z(c)**. Toda classe de número é, portanto, um ‘segmento’ da seqüência $\boldsymbol{\Omega}$ [ou da totalidade ***W***] (CANTOR, *ibid*, p.933)

É interessante observar que Cantor, de forma analógica, diz que qualquer potência transfinita é um *segmento* da totalidade ***W***. De fato, uma classe de número, qualquer que seja seu tamanho, é composta de uma sucessão infinita de

---

ordenado que existe, pode ser posto em paridade com qualquer segmento definido de ***W*** que também tenha número ordinal $\boldsymbol{\omega}$, o que garante a sua a natureza conjuntística.

números ordinais. Por conseguinte, visto em relação a ***W***, as potências ou números cardinais são *totalidades bem ordenadas*. Portanto, na qualidade de segmentos bem definidos em ***W***, os números cardinais não constituem totalidades *ordinalmente amorfas*, mas, ao contrário, são paradigmas da boa ordenação: *se Deus pode contar qualquer infinito, de qualquer potência, é por que tal potência está em sua mente sob a forma de um segmento ordenado*.

Cabe agora perguntar como se relacionam tais potências transfinitas. Cantor, nas *Beiträge*, depois de apresentar o menor transfinito $\aleph_0$, claramente afirma que há uma lei bem definida relacionando os números transfinitos em ordem crescente. Conforme Cantor:

> Depois de ter introduzido o menor número cardinal transfinito $\aleph_0$ [...], surge a questão relativa aos números cardinais maiores e como eles procedem de $\aleph_0$. Mostraremos como os números cardinais podem ser arranjados de acordo com sua magnitude, e, com isto, formar, como os números finitos, "um agregado bem ordenado", em um sentido amplo da palavra. A partir de $\aleph_0$, [*mediante uma lei definida*], o cardinal imediatamente posterior $\aleph_1$ procede, assim como, a partir da mesma lei, [$\aleph_2$ procede de $\aleph_1$], e assim por diante (CANTOR, [1941], p.109).

Assim como os cardinais finitos se sucedem por meio da adição de uma unidade, formando-se como isto um agregado bem ordenado, os números ou potências transfinitos sucedem-se uns aos outros por meio de uma lei definida. Obviamente, a mera adição de uma unidade não é capaz de promover a passagem de um cardinal transfinito ao seu sucessor; para que tal passagem ocorra, por meio de uma lei bem definida, é necessária a introdução da operação de *cobertura* entre agregados.

De forma intuitiva, a cobertura entre dois agregados ***N*** e ***M*** consiste em nada mais, nada menos, de uma função de domínio ***N*** e contra domínio ***M*** (CANTOR, *ibid*, p.94). Duas coberturas ***f*** e ***f'***, definidas em ***N*** e com contra domínio em ***M***, são iguais se, e somente se, para todo $n \in N$, $f(n) = f'(n)$, tal que $f(n)$ e $f'(n)$ são elementos de ***M***. Se esta condição não se verificar para todo ***n*** de ***N***, então as duas coberturas são distintas (CANTOR, *ibid*, p.94).

O agregado composto de todas as coberturas possíveis entre ***N*** e ***M*** é denominado de *agregado-cobertura* de ***N*** e ***M***, e é simbolizado por "***(N/M)***"(CANTOR, *ibid*, p.95). A partir da noção de agregado-cobertura, define-se a operação de exponenciação entre cardinais. Dados os agregados N e M, com os seus respectivos números cardinais b e a, a exponenciação de base a e de expoente b é definida como (CANTOR, *ibid*, p.95)

$$a^b = (N/M)^{**}.$$

Tomemos agora o conjunto dos números naturais $N= \{1,2,3,..,n,...\}$. Postulemos uma função f tal que, para cada número natural k, relaciona um número do contra-domínio $K = \{0,1\}$. O agregado-cobertura (N/K) tem por número cardinal $(N/K)^{**}$, este sendo igual a $2^{N^{**}}$, segundo a definição acima de exponenciação.

Nas *Beiträge*, Cantor demonstra que a exponenciação $2^{N^{**}}$ tem por resultado a cardinalidade c do contínuo linear $X = \{ x \,/\, 0 \leq x \leq 1 \}$ (CANTOR, *ibid*, p.96). Em linhas gerais, a demonstração de Cantor é a seguinte. Em primeiro lugar, Cantor admite que qualquer número x do contínuo linear admite uma representação da forma

$$x = f(1)/2 + f(2)/2^2 + ... + f(n)/2^n + ... ,$$

tal que $f(n) = 0$ ou 1. Obviamente, cada número real de X dá origem a uma seqüência determinada de 0's e de 1's, de tal forma que tais seqüências consistem em representações binárias de um número real contido no intervalo $X = \{x \,/\, 0 \leq x \leq 1\}$. Os dois extremos do intervalo, 0 e 1, são representados, respectivamente, pelas seqüências $000000...$ e $111111...$, posto que $\lim \sum f(n)/2^n$, para $n \rightarrow \infty$, é igual a 0 para $f(n) = 0$ e igual a 1 para $f(n) = 1$[14]; todos os demais números de X são binariamente representados por seqüências aleatórias de 0's e de 1's.

Naturalmente, como a representação binária se dá pelo pressuposto da existência de um limite bem definido em X para toda e qualquer seqüência infinita de 0's e de 1's, números como 0.78 e $0.77999...$, que constituem o mesmo limite de seqüências distintas, terão mais de uma representação binária. Uma vez que a totalidade destes números duplamente representados é enumerável, posto que nada mais são do que dízimas periódicas infinitas e, por conseguinte, números racionais, podemos tirar de X as representações repetidas, sem que com isto a cardinalidade c de X se altere – lembremo-nos de que $c + \aleph_0 = c$. Desta maneira, ficamos com somente uma representação binária para cada número de X, além de

---

[14] Para o caso em que $f(n)$ é igual a 1 para todo n, o somatório $\Sigma f(n)/2^n$ transforma-se em ½ + ¼ + ... + $1/2^n$ ... que nada mais é do que o somatório dos termos de uma progressão geométrica decrescente e de razão geométrica menor que 1. Portanto, o limite deste somatório é a_1/r, em que a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica e r a razão geométrica de decrescimento. No caso em questão, a_1 é igual a ½ e r também é igual a ½, o que nos dá como limite, para $n \rightarrow \infty$, o valor 1.

que, para qualquer número $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{X}$, só há uma representação binária que lhe seja associada. Por esta bijeção, demonstra-se que $\boldsymbol{c = (\{0,1\}/N)^{**}}$ e, portanto, $\boldsymbol{c = 2^{N^{**}}}$.

A partir do conceito de agregado-cobertura, Cantor pôde estipular uma relação entre as potências ascendentes de $\boldsymbol{W}$. Para que seja possível, mediante uma lei determinada, a passagem entre um número cardinal transfinito para o seu sucessor imediato, a noção de operação de *cobertura* faz-se essencial. Começando com o primeiro cardinal transfinito $\aleph_0$ - o cardinal da primeira classe de números ou dos números inteiros finitos -, podemos estipular a totalidade das funções definidas nos números naturais finitos que tomem como valor $\boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{1}$. Isto equivale a tomar, como *totalidade completa*, a quantidade dos subconjuntos dos números naturais, dado que as funções que têm por contradomínio $\boldsymbol{\{0,1\}}$ se comportam como funções características destes subconjuntos: se o número natural $\boldsymbol{k}$ pertence a um subconjunto $\boldsymbol{A}$ dos naturais, $\boldsymbol{f(k) = 1}$; caso contrário, $\boldsymbol{f(k) = 0}$. Como $\boldsymbol{2^{\aleph_0} = c}$, pode-se dizer que a totalidade de subconjuntos dos números naturais tem o mesmo número cardinal do contínuo linear. Daí surge a questão de se precisar à qual das potências transfinitas devemos igualar $\boldsymbol{c}$ a fim de que o contínuo linear ou a totalidade dos subconjuntos dos naturais esteja espelhado em $\boldsymbol{W}$. Em 1878, como já foi visto, Cantor afirmou que a potência do contínuo seria aquela imediatamente posterior a dos inteiros finitos. Se assim o for, temos que o cardinal $\boldsymbol{c}$ do contínuo é igual a $\aleph_1$. Portanto, pela hipótese do contínuo, temos que

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

que nos diz que o cardinal do contínuo linear é igual ao cardinal de todos os subconjuntos dos naturais. Como já nos advertira Cantor, há uma lei determinada relacionando as cardinalidades transfinitas (CANTOR, *ibid*, p.109). Tomando a hipótese do contínuo como verdadeira, podemos generalizá-la, de tal forma que cada cardinalidade $\aleph_{n+1}$ pode ser vista como resultante da operação cobertura realizada na cardinalidade imediatamente anterior, isto é:

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}.$$

Em sua forma generalizada, a hipótese do contínuo permite associar cada potência transfinita a uma potência imediatamente posterior, de tal forma que a cada classe de número determinada de $\boldsymbol{W}$ pode-se associar um índice finito indicativo de sua posição relativa em $\boldsymbol{W}$. Com isto, assim como os cardinais finitos, mediante uma operação definida – a adição - se estruturam ordinalmente como uma coleção de tipo ω, as potências transfinitas, por meio da operação de cobertura, compõem um agregado ordenado como os naturais. No entanto, da mesma forma como os naturais podem ser estendidos além dos ordinais finitos, mediante a passagem ao limite, também os *alefs* admitem uma extensão para bem além de ω. De fato, a seqüência ordenada de *alefs* admite ser estendida indefinidamente, alcançando índices transfinitos para os seus termos, não estando, portanto, restrita aos índices finitos para a sua completa enumeração. Sobre isto, Cantor nos diz que "mesmo a seqüência ilimitada de números cardinais

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_v, ...$$

não esgota a concepção de número cardinal transfinito. Demonstra-se a existência de um número cardinal que denotarei por $\aleph_\omega$ e que se mostra como o cardinal imediatamente posterior a todos eles [$\aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + ... + \aleph_v + ... = \aleph_\omega$]; deste, por meio da mesma lei que faz com que $\aleph_1$ surja de $\aleph_0$, um cardinal $\aleph_{\omega+1}$ imediatamente posterior surge [por hipótese, $\aleph_{\omega+1} = 2^{\aleph_\omega}$], e assim sucessivamente" (CANTOR, *ibid*, p.109).

A sucessão transfinita e *incompletável* dos *alefs* representa a absolutamente infinita capacidade de Deus de tudo bem ordenar. Enquanto os números ordinais de ***W*** são os instrumentos que permitem a Deus a boa ordenação de qualquer conjunto, os *alefs* são estes próprios conjuntos na mente de Deus, na qualidade de totalidades completas com todas as suas unidades intuídas separada e distintamente. Aqui vale notar que cada *alef* estaria na mente de Deus como um, e somente um, segmento de ***W***, de tal maneira que haja uma perfeita bijeção entre ***W*** a totalidade de todos os *alefs* (CANTOR, [2000], p.933). Em relação ao intelecto divino, os números transfinitos ordinal e cardinal, como nos diz Cantor, "existem desde a eternidade como idéias"(CANTOR, [1997], p.21), sendo a representação mais significativa do absolutamente infinito [poder] *aritmético* de Deus.

3.4 Sobre a hipótese do contínuo e a natureza conjuntística dos números reais.

Em princípio, nada na teoria cantoriana dos conjuntos garante-nos que o contínuo linear ou o domínio dos números reais seja um conjunto. De fato, para que a natureza conjuntística dos números reais seja garantida, é necessário mostrar que os reais admitem uma enumeração ou, o que é equivalente, que há uma correspondência bijetiva entre um segmento próprio de ***W*** e a totalidade dos reais. Para que isto seja feito de forma decisiva, a apresentação de um ordinal γ, de tal forma que tal ordinal represente a enumeração completa de todos os números do contínuo linear, é condição *sine quae non*.

No entanto, como é sabido, a determinação de tal ordinal é um problema assaz complexo que Cantor não resolveu ou, pelo menos, não tratou de maneira tão explícita. Todavia, uma resolução, por assim dizer, *indireta* da questão do caráter conjuntístico dos reais é aduzida por Cantor com a hipótese do contínuo. De fato, tal hipótese nos assegura que os reais são conjunto, posto que estão em correspondência bijetiva com o segmento **(II)** – ou de cardinalidade $\aleph_1$ – da totalidade ***W*** dos ordinais; na mente de Deus, os reais estão completamente enumerados pela segunda classe de números e, portanto, o ordinal ω_1, limite superior do intervalo $[\omega, \omega_1)$, é o número ordinal transfinito associado à boa ordenação do contínuo. Por conseguinte, a hipótese do contínuo se mostraria fundamental à teoria cantoriana dos conjuntos, uma vez que legitima os reais como conjunto. Segundo nos aponta Lavine:

> Cantor acreditava que os números reais e a segunda classe de números [...] estavam intimamente ligadas e que ele, eventualmente, seria capaz de provar [...] a hipótese do contínuo: os números reais têm a potência dos números da segunda classe mostraria que eles [os reais] formam um conjunto, conforme a [definição de conjunto, baseada na bijeção com um segmento próprio de *W*]. Isto é, conforme penso, a principal importância da hipótese do contínuo para Cantor (LAVINE, [1998], p.92).

Em 1891, Cantor demonstrara que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (LAVINE, *ibid*, p.99) e, como foi visto, em 1895, nas *Beiträge*, há a demonstração de que $c = 2^{\aleph_0}$. Conjuntamente, tais resultados nos levam à certeza de que há mais números reais do que naturais e, por conseguinte, que pode haver ou não um número cardinal intermediário entre $\aleph_0$ e **c**. Pela hipótese do contínuo, não há tal cardinal, de tal forma que entre os infinitos enumerável e não-enumerável não existe um terceiro tipo de infinito. Compreendida desta maneira, a hipótese de contínuo não é, de forma alguma, uma convicção que naturalmente tenha se mostrado a Cantor como uma intuição clara e inequívoca. Tendo sido enunciada pela primeira vez em 1878, como um teorema a cuja demonstração é necessária um *tipo especial de indução*, a hipótese do contínuo e sua natureza problemática não passaram desapercebidos por Cantor nos anos vindouros. Em 1886, nove anos após a aludida demonstração da hipótese, Cantor ainda não havia se convencido da validade da indução que usara para provar a hipótese do contínuo. Ao se deparar como uma pretensa prova da hipótese de contínuo, efetuada por H. Tannery, Cantor aponta o caráter não conclusivo da demonstração de Tannery, também baseada em uma *misteriosa indução.* Em uma carta a Vivanti, de novembro de 1886, Cantor diz que:

> [Tannery] acreditou ter dado uma prova para o teorema primeiramente enunciado por mim há nove anos [...] Os fatos apontados por ele como suporte deste teorema já eram conhecidos por mim desde aquela época, e constituem somente uma parte daquela indução que, como todos sabem, levou-me ao teorema. Já naquela época, [como penso hoje em dia], estava convencido de que tal indução é *incompleta* [...] Se entendermos por η a potência do contínuo linear, então o teorema a ser demonstrado é o seguinte:
>
> $$\eta = \nu_2 .$$
>
> Os fatos apontados por *Herr* [Tannery] como base para a demonstração de tal teorema são os seguintes:
>
> $$|\nu| + \nu_1 = \nu_1\,,\ \nu_1 + \nu_1 = \nu_1,$$
> $$\nu_1 .\ |\nu| = \nu_1\,, \nu_1^{\,|2|} = \nu_1,\ \nu_1^{\,|\nu|} = \nu_1\,;$$
>
> $$\nu_1^{\,\nu 1} = \eta;\ |2|^{\nu 1} = \eta;\ |3|^{\nu 1} = \eta,$$
> $$\ldots\ldots\ |\nu|^{\nu 1} = \eta$$
>
> Estes fatos sugerem a conjectura de que η deve ser a potência ν_2 que se segue imediatamente *após* ν_1; entretanto, tais fatos estão longe de fornecer uma prova

rigorosa para tanto [Nas equações acima, $|\mathbf{v}|$ é o cardinal finito de um número ordinal finito **v**] (CANTOR in: HALLETT, [1996], p.86).

Seguindo o que é sugerido por Hallett (*ibid*, p.85), o *argumento indutivo* que levaria à igualdade entre a potência do contínuo e a potência **(II)** seria o seguinte: comecemos com a exponenciação n^m , com n e m sendo números naturais finitos. Façamos n crescer indefinidamente, até o limite $\aleph_0$. Como resultado, temos $(\aleph_0)^m = \aleph_0$. Deixemos agora que m cresça até o limite $\aleph_0$, mantendo n constante. Neste caso, $n^{\aleph_0}$, que é igual a potência c do contínuo linear, *deve ser* igual a $\aleph_1$, pois, *como não há um infinito intermediário entre o enumerável e o contínuo, então não há um alef intermediário entre* $\aleph_0$ *e* c. Entretanto, como já foi visto, o fato de não haver um infinito intermediário entre o enumerável e o contínuo é *a própria hipótese do contínuo* e, por conseguinte, o argumento de Tannery pecaria por petição de princípio.

Se descartarmos a hipótese do contínuo, o caráter conjuntístico dos números reais torna-se mais problemático. Pelo critério de bijeção com algum segmento de W, os reais só são conjunto se houver um ordinal de W que represente a boa ordenação dos reais. Assim, se tal ordinal for γ, então temos de ter $\gamma^{**} = c$ ou, o que é equivalente, que o cardinal do contínuo é igual a algum $\aleph$ da sucessão absolutamente infinita de *alefs*. Assim sendo, o problema da natureza conjunstística dos reais passa à questão de saber se há um ordinal α, tal que $c = \aleph_\alpha$. Se tal questão for resolvida negativamente – como pareceu ser o caso, quando, em 1904, König, equivocadamente, acreditou ter demonstrado que $\forall\alpha(2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha)$ (ver HALLETT, *ibid*, p.84) -, parece um tanto quanto contra intuitivo que os reais, um domínio de tamanha utilidade para a matemática, nem sequer sejam um conjunto. Portanto, a legitimidade do conjunto dos reais tem de ser garantida sem qualquer menção à hipótese de que o cardinal do contínuo é igual a algum *alef.*

Dentro do instrumental conceitual até agora visto subjacente à teoria cantoriana, nada nos assegura que o contínuo linear seja um legítimo conjunto. Nem mesmo o axioma da substituição, apresentado como fundamento da legitimidade conjuntística dos cardinais, pode garantir os reais com um autêntico conjunto. Isto porque, para que um conjunto M seja justificado como tal pelo emprego do axioma de substituição, é necessário que a cardinalidade ***M***** seja menor ou igual ao número cardinal ***N*****, sendo ***N*** o conjunto do qual ***M*** surge como imagem de uma função unívoca definida em ***N***. No caso dos reais, poderíamos postular uma função nos naturais ou racionais de tal forma que os reais daí surgissem como imagem. Entretanto, com $c > \aleph_0$, vê-se que tal função não existe. Portanto, torna-se mister a apresentação de um fundamento para os reais como legítimo conjunto. Ciente disto, Lavine nos alerta sobre a necessidade da introdução de teses adicionais à sua reconstrução da teoria cantoriana dos conjuntos, na qual um conjunto é definido como tal se, e somente se, seus elementos estão em bijeção com um segmento próprio de ***W*** ; daí o surgimento do *Princípio do Domínio – "Domain Principle"*:

> Introduzi minha reconstrução de teoria de Cantor e tentei justificá-la. Chegou a hora, portanto, de admitir que ela não é suficiente para formalizar o trabalho de Cantor durante o período indicado [o período que vai, aproximadamente, de 1874 até 1886]. Tal formalização requer a tese adicional de que os números reais formam um conjunto e também, talvez, que as funções de argumentos reais também formam um conjunto [...] Cantor pode ter justificado tais teses adicionais de um princípio [...] que não faz parte de minha reconstrução, talvez um que afirma que "todo domínio de uma variável matemática é um conjunto". Eu chamo tal princípio de Princípio do Domínio (LAVINE, *op.cit*, [1997], p.90).

O Princípio do Domínio também é compreendido por Hallett como pilar na obra cantoriana (HALLETT, *op. cit,* p.7). De fato, por intermédio de tal princípio, qualquer conjunto é tomado como tal, desde que seja domínio de uma variável matemática. Obviamente, os números reais satisfazem tal critério, posto que há uma infinidade de funções matemáticas bem definidas que têm por domínio os reais. Entretanto, se pelo Princípio de Domínio os reais se mostram como um conjunto legítimo, o que dizer do conjunto compostos de todas as funções definidas com argumentos que são funções definidas nos reais? Em outras palavras: é legítimo tomar o conjunto dos subconjuntos dos subconjuntos dos reais como conjunto? Para responder a isto, um apelo direto ao Princípio do Domínio pouco adiantaria, uma vez que um domínio de uma variável matemática composto de funções de argumentos que são funções definidas nos reais não é usual na prática matemática[15]. Por conseguinte, é capital a introdução de um fundamento para a noção de conjunto que tanto sirva para os reais quanto para os conjuntos que dos reais surjam, iterativamente, pela operação de cobertura. Para tanto, aparece um novo axioma da teoria cantoriana: *o axioma do conjunto potência.* Primeiramente apresentado na axiomática de Zermelo para a teoria dos conjuntos, de 1908[16], o axioma do conjunto potência é o seguinte:

Para qualquer conjunto M, existe o conjunto $\wp M$ de seus subconjuntos

Tanto a cardinalidade dos reais quanto a da totalidade dos subconjuntos dos naturais, $\wp \mathbf{N}$, é igual a $2^{\aleph_0}$**.** Como postuladamente os naturais são um conjunto legítimo, então, pelo axioma do conjunto potência, também o é o conjunto de seus subconjuntos. Dado que $\wp \aleph_0$ é equivalente a $2^{\aleph_0}$, então, pelo axioma de substituição, o cardinal dos reais é um conjunto, posto que há uma função ***f*** que associa bijetivamente todo e qualquer elemento do legítimo conjunto $\wp \mathbf{N}$ com os elementos de $2^{\aleph_0}$. Como o cardinal dos reais é um legítimo conjunto, então o axioma de substituição nos garante que os reais são um conjunto, uma vez que o cardinal $c = 2^{\aleph_0}$ é equivalente aos números reais. Desta forma, o caráter de autêntico conjunto de $\wp \mathbf{N}$**,** garantido pelo axioma do conjunto potência, é o

[15] Geralmente, os domínios de funções *corriqueiras* da matemática são formados por números naturais, reais, complexos e hipercomplexos, sendo estes últimos uma generalização dos complexos, consistindo em *n*-uplas de números reais que não satisfazem a comutatividade para a multiplicação. Como todos estes domínios, com exceção dos naturais, têm cardinalidade c do contínuo linear, a totalidade das funções de argumento real, complexo ou hipercomplexo tem cardinalidade $c' = 2^c > c$. Como tais funções têm uso muito específico na matemática – como, por exemplo, em problemas de análise funcional – um domínio matemático com cardinalidade $c_2 = 2^{c_1}$ soa algo um tanto quanto longe dos domínios usuais da matemática. De certa maneira, qualquer conjunto de cardinalidade maior que c_1 é um tipo de *extravagança conjuntística*, com pouca ou nenhuma relevância para as teorias matemáticas que não sejam a teoria pura dos conjuntos.

[16] Em 1908, em uma tentativa de fundamentar a teoria intuitiva dos conjuntos, livrando-a de paradoxos, Ernst Zermelo apresentou a sua famosa teoria axiomatizada dos conjuntos. Basicamente, a sua teoria consiste de seis axiomas, cada um dos quais garantido a legitimidade ou existência de um dado tipo de conjunto resultante de uma determinada operação conjuntística. Expressos de forma bem informal, os axiomas de Zermelo são os seguintes:

1) **Para quaisquer objetos *a* e *b*, há o conjunto que contém somente *a* e *b*;**
2) **Dois conjuntos que contém os mesmos elementos são iguais;**
3) **Para qualquer conjunto S e qualquer predicado bem definido P, para todos os membros de S, há o conjunto S* que contém somente aqueles membros de S tais que P se aplique a eles;**
4) **Para qualquer conjunto de conjuntos A, há o conjunto que contém os membros dos membros de A;**
5) **Existe um conjunto infinito;**
6) **Se T é um conjunto de conjuntos disjuntos dois a dois, então existe um subconjunto de T que contém somente um membro em comum com cada membro de T.**

Sobre a axiomática de Zermelo, ver ZERMELO, E. “Investigations in the Foundations of Set Theory I”, in VAN HEIJENOORT, p. 199-215, [1908].

suporte para que, com o auxílio do axioma de substituição, haja uma demonstração da *conjuntividade* dos reais.

Cantor, mediante o teorema de que o contínuo linear é equivalente ao agregado-cobertura ***({0,1}/N)***, dá um passo fundamental para a fundamentação dos reais como conjunto. Para tanto, é mister introduzir na teoria cantoriana dos conjuntos, como princípio implícito, o axioma do conjunto potência, mesmo que tal axioma não se coadune, de forma fácil, à concepção de um conjunto como uma coleção necessariamente contável. Como nos aponta Lavine:

> [O] axioma do conjunto potência permitiu a Cantor provar, pela primeira vez, que os números reais formam um conjunto, ao invés de apresentar isto como uma tese adicional. Cantor pode ter visto isto como uma vitória significativa, ao invés de meramente tomar isto como uma extensão ou desenvolvimento de sua teoria: no mínimo, determinou o início de um argumento novo e independente para a existência dos números reais e transfinitos. O axioma do conjunto potência tornou-se vital para Cantor [...] O axioma do conjunto potência, entretanto, não foi facilmente integrado com a concepção de um conjunto como qualquer coisa que possa ser contado. Pela primeira vez, Cantor tinha de admitir como existente um conjunto que ele não sabia como introduzir explicitamente por meio de uma contagem, ou, mais precisamente, que ele não soube como bem ordenar de uma maneira definida (LAVINE, *ibid*, p.95).

Mesmo não apresentando de forma efetiva uma boa ordenação para os reais, Cantor, muito provavelmente, talvez julgasse que tal boa ordenação já existisse, *desde sempre*, no pensamento de Deus. Posto que Cantor tomasse o axioma do conjunto potência como tácito em sua teoria dos conjuntos, isto talvez se deva ao fato de que o conjunto potência, para conjuntos finitos, é perfeitamente definido. Se para o finito, o conjunto potência é bem caracterizado e, pela sua própria finitude, é bem ordenado, então o mesmo deve ocorrer para os conjuntos infinitos: qualquer conjunto infinito tem seu conjunto potência bem definido e este, na mente divina, é perfeitamente contável e bem ordenado. De fato, toda a teoria cantoriana dos conjuntos parece basear-se em uma intuição *divina* de agregado ou multiplicidade e não em uma intuição, por assim dizer, *humana*; como tal, ao contrário da primeira, esta se mostra *limitada*, a ponto de não oferecer, de forma definida, uma boa ordenação dos reais.