2
Os “Grundlagen” de Cantor – sua origem histórica e conceitos fundamentais

2.1
Os primórdios da teoria dos conjuntos: a tese de Fourier

Uma vez que se pretenda buscar as origens da teoria cantoriana dos conjuntos, nada mais natural do que se remontar aos trabalhos do matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) sobre o desenvolvimento de funções *quaisquer* por meio de séries trigonométricas. É considerando o problema da unicidade de tal desenvolvimento para uma dada função que Cantor chega, embrionariamente, a conceitos fundamentais de sua teoria sobre os números e tipos transfinitos, expostos em 1884 em seus *Grundlagen.* De fato, de 1872 a 1883, a teoria de Cantor sobre os números transfinitos foi tomando forma como uma espécie de generalização de procedimentos e conceitos que vieram à tona, inicialmente, a fim de resolver problemas relativos a representação de funções através de somatórios de funções seno e co-seno.

Em 1822, Joseph Fourier, um então engenheiro militar eleito *sécretaire perpétuel* da Academia de Ciências de Paris (BOYER, p.352, [2001]), publica o livro *Théorie Analytique de la Chaleur*, em que apresenta seus estudos sobre a propagação do calor em meios metálicos. Neste trabalho, Fourier considera a distribuição de temperatura $v\ (t,x,y)$, em uma lâmina de metal, em função do tempo t e de coordenadas cartesianas x e y, adequadamente escolhidas a fim de representar a posição dos *pontos de calor* sobre uma superfície laminar. Partindo de certas hipóteses iniciais, Fourier conclui que a propagação de calor em função do tempo – isto é, a derivada parcial $\partial v/\partial t$ – obedece a seguinte equação diferencial (KATZ, p.651, [1993]):

$$\partial v/\partial t \ = \partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2,$$

cuja solução geral Fourier encontrou como sendo a série de funções co-seno:

$$v = a_1 e^{-x} \cos y \ + \ a_2 e^{-2x} \cos 2y + \ldots + a_n e^{-nx} \cos ny + \ldots$$

em que os coeficientes a_j são determinados conforme condições de contorno previamente dadas.

Somente pelo tratamento diferencial dado à propagação de calor em meios metálicos, esta obra de Fourier de 1822 já se tornaria célebre como um marco da termodinâmica. Entretanto, o interesse que o trabalho de Fourier despertou em sua época decorre muito mais de uma ousada afirmação nele contida, segundo a qual *qualquer função, por mais arbitrária que seja, admite uma representação por meio de somatórios de funções trigonométricas.* Mais especificamente, Fourier admitiu que, sendo dada qualquer função $f(x)$ de argumentos reais, definida no intervalo $[-\pi,...,\pi]$, então, neste intervalo, pode-se expandir tal função como uma série trigonométrica do tipo geral

$$f(x) = a_0/2 + a_1 cosx + b_1 senx + ... + a_n cosnx + b_n sennx + ...,$$

em que os coeficientes a_j e b_j são números reais convenientemente escolhidos, interpretados originalmente por Fourier como integrações definidas no intervalo $[-\pi,...,\pi]$ (EVES, p.527, [1997]).

Na expressão acima, $f(x)$ é definida por Fourier como:

> [...] Uma sucessão de valores ou ordenadas tomados arbitrariamente. Se uma quantidade infinita de valores é atribuída à abcissa *x*, então há um número igual de ordenadas $f(x)$, [todas] tendo valores numéricos, sejam estes ou positivos, negativos ou nulos. Não supomos que tais ordenadas relacionam-se às suas abcissas por meio de uma lei comum; elas [as ordenadas] sucedem-se mutuamente de qualquer maneira e cada uma delas está dada enquanto corresponde a um única quantidade [*x*]. (FOURIER in: KATZ, *op. cit,* p.653)

Embora Fourier sustente que qualquer função admite um desenvolvimento trigonométrico, os exemplos por ele aduzidos em sua *Théorie Analytique de la Chaleur* dizem todos a respeito de funções contínuas (KATZ, *ibid*, p.652). Pelas próprias palavras acima citadas, vê-se claramente que os valores possíveis para as ordenadas devem ser positivos, negativos ou nulos, *mas não indeterminados ou infinitos*. Desta maneira, ficava em aberto a questão de se precisar até que ponto a tese de Fourier alcança aquelas relações funcionais que não admitem ser visualizadas geometricamente como curvas contínuas arbitrárias.

Foi somente em 1829 que o matemático alemão Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859) precisou as condições que uma função deve satisfazer para que, sendo definida no intervalo $[-\pi,...,\pi]$, admita uma representação por meio de uma série de Fourier neste domínio de variação. Segundo Dirichlet, se uma função $f(x)$ é contínua em todos os pontos do intervalo acima citado – se descontínua, em somente um número finito de pontos - além de limitada – isto é, com um número finito de valores máximo e mínimo bem determinados -, então, neste intervalo, ela pode ser representada por meio de uma série de Fourier.

Uma vez que uma função possa ser representada por meio de uma série de Fourier, cabe indagar se tal representação é única, isto é, se dadas duas representações trigonométricas quaisquer de uma função $f(x)$, estas correspondem a uma única série de Fourier, isto é, se tais representações possuem os mesmos coeficientes. É neste ponto que entram os trabalhos de Georg Cantor.

Em 1870, Eduard Heine (1821-1881) demonstrou que a unicidade da representação de uma função $f(x)$, por meio de séries de Fourier, só ocorre se, e somente se, as suas possíveis expansões trigonométricas convergem uniformemente[1], quando x percorre o intervalo $[-\pi,...,\pi]$ (LAVINE, p.39, [1998]). Em 1871, em considerações feitas ao teorema de Heine acima citado, Georg Cantor demonstrou que se duas séries de Fourier quaisquer convergem no intervalo $[0,...,2\pi]$ para os mesmos valores, *exceto possivelmente para um conjunto finito de pontos de* $[0,...,2\pi]$, sem que se pressuponha que tal convergência seja uniforme, então elas têm os mesmos coeficientes[2]. Um ano depois, em um artigo intitulado “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, Cantor provou que tal teorema continua válido, mesmo que admitamos, no intervalo $[0,...,2\pi]$, *certos conjuntos infinitos* de pontos para os quais as séries de Fourier não convirjam para os mesmos valores, ou mesmo sejam divergentes. Em outras palavras, Cantor demonstrou que se pode admitir um subconjunto infinito de $[0,...,2\pi]$, para o qual os possíveis desenvolvimentos trigonométricos de $f(x)$ não convirjam para os mesmos valores

[1] Diz-se que uma série $f(x) = \sum f_n(x)$ converge uniformemente em um intervalo $[a,b]$ quando, dado um $\varepsilon > 0$, existe um número natural N, função de ε, tal que, para $n \geq N$ e para $p \geq 1$, vale a relação $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, para todo x pertencente ao intervalo $[a,b]$. Intuitivamente, a convergência uniforme em um intervalo nos diz que, em todos os pontos x deste intervalo, a série $\sum f_n(x)$ converge com a mesma *rapidez*, sendo o inteiro N uma espécie de *medida da velocidade* da convergência de $f(x)$ (KNOPP, p. 91-92, [1946]).

[2] O citado artigo de 1871 foi publicado em janeiro de 1871, pelo *Journal fúr die reine und angewandte Mathematik*, com o longo título “Notiz zu dem Aufsatz: Beweiss, dass eine fúr jeden reellen Wert von *x* durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function *f(x)* sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt”. Na realidade, este artigo de 1871 é um adendo (*Notiz)* a um artigo publicado por Cantor em 1870, também no mesmo jornal, em que é provada a unicidade das expansões trigonométricas para correspondências funcionais *em geral,* não restringindo as expansões às exigências impostas por Heine, como a convergência uniforme. (DAUBEN, [1971], p.189).

ou sejam divergentes, sem que isso implique que, para tal subconjunto, tais desenvolvimentos trigonométricos não se reduzam a uma *única* série de Fourier.

Em 1871, Cantor demonstrara que, sendo dada uma função $f(x)$, definida em $A = [0,...,2\pi]$, uma vez que ela possa ser expandida, neste intervalo, como séries de Fourier ***S'*** e ***S''***, definidas univocamente pelos seus coeficientes, tais que, para quaisquer valores x de A, tem-se que $S'(x) = S''(x)$, então $S' = S''$ - isto é, as duas séries têm os mesmos coeficientes. Se neste intervalo admitimos um conjunto finito de pontos ***a***, *estruturados ou dispostos no intervalo* ***A*** *de uma maneira específica*, tal que $S'(a) \neq S''(a)$, o teorema continua válido; a unicidade da representação trigonométrica não é, por assim dizer, afetada por tais pontos de exceção. Já em 1872, Cantor estendeu o teorema, admitindo que tais pontos excepcionais pudessem estar contidos em $[0,...,2\pi]$ em um número infinito, desde que *estruturados em tal intervalo de uma forma também não perturbadora.*

Portanto, a partir de seus estudos sobre a unicidade das representações funcionais por meios de séries de Fourier, Cantor foi levado naturalmente ao estudo estrutural de intervalos de números reais; estando a estrutura dos números reais perfeitamente distinguida, torna-se uma tarefa simples apresentar as propriedades fundamentais destes conjuntos excepcionais de pontos.

De fato, antes de apresentar uma prova da extensão do teorema de 1871 para conjuntos infinitos de pontos excepcionais, Cantor, em seu artigo de 1872, preocupa-se, inicialmente, em analisar como as grandezas numéricas reais se relacionam entre si.

Começando com os racionais, Cantor introduz o conceito de *seqüência fundamental* de números racionais (JOURDAIN in:CANTOR, p.26, [1941]). Uma seqüência $a_1, a_2,...,a_n,...$ é fundamental se, e somente se, para qualquer número racional ε, existe um inteiro N, tal que

$$|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon,$$

para todo $n > N$.

Para Augustin Cauchy (1789-1857), era um fato óbvio que tal seqüência converge para um dado número real ***b***, como por ele atestado, em 1821, em seu *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* (BOYER, p.355, *op.cit*). Todavia, admitir isto é pressupor que a totalidade dos números reais está dada completamente e que o número ***b*** preexiste em relação à tal seqüência, comportando-se como um número fixo maior ou igual a qualquer termo de $\boldsymbol{a_n}$**.** Ao invés disto, Cantor procurou associar cada número real a uma seqüência fundamental, *identificando-o* com tal seqüência. Portanto, cada número real é entendido por Cantor como uma seqüência *enumerável* bem definida de números racionais[3].

Estando os reais definidos como seqüências bem definidas de racionais, Cantor então associou a cada número real uma representação geométrica como um ponto em um segmento ordenado de uma reta. A partir desta associação – que Cantor considerava como um *axioma fundamental* – (JOURDAIN in: CANTOR, p.31, *op. cit*), Cantor pôde retornar ao problema fundamental relativo à unicidade da representação trigonométrica de uma função no domínio $[0,...,2\pi]$.

A partir da representação geométrica dos números reais, Cantor definiu o conceito de *ponto-limite* de um conjunto ***P*** de pontos *reais* dispostos na reta, como sendo:

> Um ponto da linha de tal forma situado que, [qualquer que seja a sua vizinhança], nesta pode-se encontrar infinitos outros pontos de ***P*** [...] Por vizinhança de um ponto, entende-se qualquer intervalo que contém tal ponto em seu interior (CANTOR in: KATZ, p.661, *op.cit*)

Dado um conjunto de pontos ***P***, podemos formar o conjunto ***P'*** de todos os seus pontos-limite, o qual Cantor denominou de *primeiro conjunto derivado de* ***P.*** Se também ***P'*** é infinito, pode-se novamente formar o derivado ***P''*** de ***P'*** e, de forma geral, se $P^{(n)}$ é infinito, então há o conjunto derivado $P^{(n+1)}$**.** A partir de um dado conjunto de pontos ***P***, surgem então duas possibilidades: se existe um número natural ***n*****,** tal que $P^{(n)}$ é um conjunto finito, então Cantor denomina o conjunto original ***P*** de primeiro tipo e de espécie ***n***; caso contrário, o conjunto ***P*** se diz de segundo tipo e, a partir dele, mediante aplicações sucessivas da operação limite, pode-se obter a seguinte seqüência infinita de conjuntos derivados (LAVINE, p.37-39, *op.cit*):

---

[3]É claro que não passou desapercebidamente a Cantor o fato de que duas seqüências fundamentais de racionais podem convergir ao mesmo número real ***c***. Sejam dadas as seqüências fundamentais $\{a_j\}$ e $\{b_j\}$, tais que, para um número ***m*** e para qualquer racional ε, vale a relação $C = |a_{m'} - b_{m'}| < \varepsilon$, para todo ***m'> m.*** Neste caso, as duas seqüências se associam ao mesmo número real, podendo ser intersubstitúiveis. Mais precisamente, Cantor definiu um número real ***c*** como uma totalidade enumerável de seqüências fundamentais de racionais, sendo tais seqüências equivalentes entre si (KATZ, p.661, *op.cit*).

$$\boldsymbol{P', P'', \ldots, P^{(k)}, \ldots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, P^{(\infty+2)}, \ldots, P^{(\infty 2)}, \ldots, P^{(\infty n)}, \ldots}$$

Nesta sucessão infinita, $\boldsymbol{P^{(\infty)}}$ é o conjunto de todos os pontos-limite que pertencem simultaneamente a todos os conjuntos derivados $\boldsymbol{P^{(k)}}$, isto é:

$$\boldsymbol{P^{(\infty)}} = \cap \boldsymbol{P^{(k)}}, \text{ para todo } \boldsymbol{k} \text{ finito.}$$

Dispondo do conceito de conjunto derivado, Cantor pôde então estruturar qualquer intervalo de pontos da reta –isto é, de números reais – conforme a distribuição de seus pontos-limite. Com isto, possibilita-se que cada intervalo numérico possa ser caracterizado em função dos conjuntos derivados que dá origem. Assim sendo, a extensão do teorema de 1871 pode ser enunciado da seguinte maneira:

Dada uma função $\boldsymbol{f(x)}$*, definida em um intervalo* $\boldsymbol{A = [0,...,2\pi]}$*, se as expansões de Fourier* $\boldsymbol{S, S'',..}$ *que tal função admite neste intervalo, para qualquer ponto* $\boldsymbol{x}$ *nele contido, convergem sempre ao mesmo valor – exceto para um conjunto infinito de pontos* $\boldsymbol{x \in B, B \subset A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *é de primeiro tipo e de* $\boldsymbol{n}$*-espécie -, então tais expansões têm os mesmos coeficientes.*

Grosso modo, o teorema de 1872 nos diz que o conjunto $\boldsymbol{B}$ de pontos excepcionais do intervalo $\boldsymbol{[0,...,2\pi]}$, se tiver um número finito de pontos-limite residuais – isto é, aqueles pontos-limite resultantes de *aplicações finitas* da operação "conjunto derivado" –, então tal conjunto não interfere significativamente na unicidade da representação, por meio de uma expansão de Fourier, de uma função $\boldsymbol{f(x)}$ definida em $\boldsymbol{[0,....,2\pi]}$. É como se o conjunto $\boldsymbol{B}$ se estruturasse, no intervalo $\boldsymbol{A}$, de tal forma que seus pontos-limite *mais fortes*, comuns a todo conjunto $\boldsymbol{B, B', \ldots, B^{(n)}}$, estejam isolados uns em relação aos outros, determinando uma *disposição estrutural* de $\boldsymbol{B}$ que não interfere na unicidade da representação trigonométrica de $\boldsymbol{f(x)}$ no intervalo $\boldsymbol{[0,....,2\pi]}$.

De 1879 a 1882, em uma série de cinco artigos intitulados "Über unendlichen, lineare Punktmannigfaltigkeiten", Cantor viria a desenvolver os conceitos de conjunto derivado e ponto-limite, introduzidos originalmente em 1872. Nestes artigos, Cantor apresentou uma definição estrutural dos conjuntos contínuos, como sendo aqueles conjuntos $\boldsymbol{P}$ para os quais vale

$$\boldsymbol{P = P'.}$$

De 1872 a 1878, no que diz respeito a questões relevantes ao desenvolvimento ulterior da teoria dos números transfinitos, Cantor deteve-se em analisar os conjuntos contínuos, em especial procurando ver até que ponto pode-se compará-los aos conjuntos enumeráveis, além de discutir em que sentido as propriedades dos espaços contínuos são *invariantes* em relação a um grupo de bijeções discretas.

2.2 A não-enumerabilidade dos números reais e a invariância da "potência" de espaços R ^{n} em relação a transformações bijetivas discretas

Com a introdução de seus conceitos de ponto-limite e de conjuntos derivados, Cantor estava em condições de analisar estruturalmente os números reais. Mas ainda faltava a questão de saber se os reais, assim como os racionais, admitem ser bem ordenados *totalmente* em um número enumerável de passos. Dito em outros termos, restava ainda precisar se é possível uma correspondência bijetiva entre os números reais e os números naturais.Em uma carta a Dedekind, datada de novembro de 1873, Cantor diz que:

> Por mais que julgue que tal correspondência [bijetiva] não exista, não consigo encontrar a razão [de tal fato] (CANTOR in:DAUBEN, p.49. [1979])

Em 1874, no artigo "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", Cantor demonstrou aquilo que, menos de um ano antes, apresentava-se como uma intuição não comprovada. Em linhas gerais, a prova de Cantor é como se segue (LAVINE, p.91, *op. cit*; JOURDAIN in: CANTOR, p.39, [1941]).

Primeiramente, parte-se do pressuposto de que há uma enumeração $\boldsymbol{R}$ de *todos* os números reais contidos em dado intervalo real $[a,...,b]$.

$$\boldsymbol{R} = r_1, r_2,...,r_p,...$$

Nesta hipotética enumeração, os números estão listados sem que a sua ordenação natural – isto é, aquela em que, em uma analogia geométrica, os números são visualizados como determinando distâncias relativas ao número $\boldsymbol{a}$ – se preserve. O que Cantor toma como hipótese à demonstração de seu teorema é que, sendo dada uma totalidade contínua de pontos, *é possível bem ordenar todos os elementos desta totalidade em passos enumeráveis*; e é exatamente à contradição que leva tal hipótese que prova que os reais não são enumeráveis.

Sejam a' e b' os primeiros dois números do intervalo $[a,...,b]$ que aparecem listados, de tal forma que $a' < b'$.

$$R = a',b',...,r_p,...$$

Considere-se agora o intervalo $[a',...,b']$, $[a',...,b'] \subset [a,...,b]$, e dois números a'' e b'' que sejam diferentes de a' e de b' tais que $a'' < b''$, além de serem os primeiros números do intervalo $[a',...,b']$ a aparecer na seqüência R:

$$R = a',b',...,a'',b'',...$$

Por meio destes intervalos sucessivos, cada um visto como um *encaixe* dentro do intervalo que lhe anterior, Cantor postulou que a seqüência R contém todos os números do intervalo $[a,...,b]$, de tal modo que

$$R = a',b',...,a'',b'',...,a^p,b^p,...$$

esgote a totalidade de números reais do intervalo $[a,...,b]$. Surge então duas possibilidades:

(1) p é finito: neste caso, depois da enumeração de infinitos elementos de $[a,...,b]$, há um intervalo $[a^p,...,b^p] \subset [a,..,b]$, tal que, na seqüência R, só possa haver, no máximo, um elemento a^{p+1} de tal intervalo, aquele que justamente encerra a enumeração R. Mas, então, pode-se tomar qualquer outro número de $[a^p,...,b^p]$ que não está enumerado por R, o que contradiz a hipótese de que o intervalo $[a,...,b]$ está totalmente listado por R;

(2) p tende ao infinito: buma vez que os a^p crescem indefinidamente, devendo atingir a um limite $\leq c$, $c \in [a,...,b]$, e uma vez que os b^p diminuem gradativamente, mas com a restrição da atingir a um limite $\geq c$, há duas possibilidades:

(2.a) $a^\infty = b^\infty$: seja dado que o número $a^\infty = b^\infty = c$ apareça enumerado em R, esgotando a totalidade de números reais em $[a,...,b]$. Isto significa que há um termo de R que é igual a c. Mas isto é impossível, já que todos os números reais enumerados por R pertencem ao complementar de $[a^\infty, b^\infty] = [c]$, em relação ao intervalo $[a,...,b]$. Por conseguinte, o limite $a^\infty = b^\infty = c$ está fora de R.

(2.b) $a^{\infty} < b^{\infty}$: Por um raciocínio análogo ao anterior, tem-se que qualquer número do intervalo ***[a^∞,..,b^∞]*** está fora da enumeração ***R***, já que esta só pode ter números do conjunto complementar de ***[a^∞,...,b^∞]*** em relação a ***[a,...,b]***.

Portanto, *não há como bem ordenar a totalidade dos reais contidos em um intervalo* ***[a,...,b]****, utilizando-se um conjunto do mesmo tamanho dos números naturais*; em outras palavras, os reais e os naturais não têm o mesmo tamanho, havendo mais números reais do que os que podem ser associados biunivocamente com os naturais.

Ainda em 1874, Cantor se pusera o problema sobre a existência de uma correspondência bijetiva entre os pontos de uma reta limitada e os de uma superfície quadrada também com limites definidos. Em uma carta a Dedekind, de 5 de janeiro de 1874, a questão é expressa nos seguintes termos***:***

> [Os pontos] de uma superfície – como um quadrado, de lados definidos – podem ser postos em correspondência [bijetiva] como [os de uma curva] – um segmento de reta definido-?" (CANTOR in: DUGAC, p.118, *op.cit*).

De forma geral, o problema de Cantor é mais amplo do que o mencionado a Dedekind. De fato, o que interessava a Cantor era saber se, dado um ponto em um espaço $\boldsymbol{r}$-dimensional, representado por $\boldsymbol{r}$ variáveis reais independentes, haveria uma representação deste ponto em um espaço $\boldsymbol{p}$-dimensional, com $\boldsymbol{r \neq p}$. Em outras palavras, a questão a ser resolvida era saber se, sendo dada as coordenadas $(x_1, x_2,...,x_r)$ de um ponto, haveria como representar tal ponto, *sem perdas topológicas*, por meio de coordenadas $(x_1, x_2,...,x_p)$, com $\boldsymbol{p \neq r}$. Aos 25 de junho de 1877, Cantor escreve a Dedekind afirmando que "todas as pesquisas feitas neste domínio [fundamentos de geometria] partem *em si mesmas* de uma hipótese não demonstrada: uma multiplicidade $\boldsymbol{r}$ vezes estendida necessita, para a determinação de seus elementos, de $\boldsymbol{r}$ coordenadas reais independentes entre si, [sendo que] o número destas coordenadas não pode nem ser aumentado, nem diminuído" (CANTOR in: DUGAC, p.121, *ibid*). Assim, Cantor procurou demonstrar o pressuposto acima citado, uma vez que, também ele, considerava tal pressuposto uma das *evidências fundamentais da matemática.*

Mas qual não fora o espanto de Cantor ao perceber que sua análise da questão levava-o à tese contrária. Em 1878, no artigo "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", Cantor provou que há uma correspondência bijetiva entre os pontos de um espaço r-dimensional e um p-dimensional, com $r \neq p$, o que lhe levou a exclamar admirado: “vejo-o, mas não acredito”(CANTOR in: DUGAC, p.121, *ibid*). Neste trabalho, Cantor demonstrou que a quantidade de pontos de um espaço independe de suas dimensões, o que lhe fez acreditar que, qualquer ponto representado em um plano, sólido ou uma porção de um espaço de dimensões quaisquer, é *perfeitamente* representado em um segmento de reta. Em linhas gerais, a prova de Cantor é como se segue (DUGAC, p.119-120, *ibid*; KATZ, p.662, *op.cit*).

Seja dado um espaço r-dimensional, tal que seus pontos sejam representados por r-uplas $(x_1, x_2,...,x_r)$ de coordenadas reais, independentes entre si. Cada variável x_r, dentro do intervalo real $[0,...,1]$, pode ser representada por uma seqüência de números racionais, como o cuidado de que, dada duas seqüências distintas de racionais, elas correspondam sempre a números diferentes do intervalo $[0,...,1]$. Portanto, cada coordenada x_r do espaço dimensional pode ser associada a uma expansão decimal. Assim temos:

$$x_1 = 0, y_1 y_2 y_3...$$

$$x_2 = 0, y'_1 y'_2 y'_3...$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$x_r = 0, y^r_1 y^r_2 y^r_3 ...,$$

em que os termos y^r_l tomam valores inteiros positivos, situados entre 0 e 9. Por conseguinte, dada um ponto P, com coordenadas $(x^P_1, x^P_2,..., x^P_r)$, podemos associar a tal ponto um outro ponto Q, situado em um segmento de reta definido pelo intervalo real $[0,...,1]$, tal que

$$Q = 0,y^P_1 y'^P_1...y^{rP}_1 y^P_2 y'^P_2...y^{rP}_2...y^P_k y'^P_k...y^{rP}_k...,$$

de tal forma que, para cada ponto P, um, e somente um, ponto Q esteja relacionado pela equação acima e, para duas seqüências distintas, estejam associados pontos distintos do espaço r-dimensional. Vê-se que tal relação é bijetiva, uma vez que todos os pontos do espaço r-dimensional estão relacionados a seqüências Q distintas, não havendo a possibilidade de seqüências diferentes representarem um mesmo ponto. Logo, há tantos pontos em um espaço real de r dimensões quanto no intervalo retilíneo real $[0,...,1]$. Sendo tal intervalo um espaço unidimensional, pode-se afirmar que há tantos pontos em um espaço r-

dimensional quanto em um segmento de reta. Como não se especifica qual seja o número ***r*** de dimensões, podendo ***r*** tomar os valores ***1,2,..,k,....***,e pela transitividade da correspondência bijetiva, conclui-se que *todos os espaços, independentemente de suas dimensões, têm a mesma quantidade de pontos.*

Em um certo sentido, Cantor acreditou ter provado que a topologia de um espaço independe do número de suas dimensões.(DUGAC, p.123, *op.cit*). Uma vez que todos os espaços têm a mesma quantidade de pontos, então é de se esperar que, sendo dada uma vizinhança de um ponto em um espaço ***r***-dimensional, então em qualquer outro espaço ***p***-dimensional, com $r \neq p$, esta vizinhança pode ser *mapeada*, sem *perdas estruturais*.

Entretanto, o resultado a que chegou Cantor não tinha o alcance então pretendido por este. Antes de ser efetivamente publicada no *Journal de Crelle*, em 1878, a demonstração de Cantor passou pelo crivo crítico de Dedekind. Em uma correspondência datada de 2 de julho de 1877, Dedekind diz a Cantor que, embora concordasse com as linhas gerais de raciocínio utilizadas na demonstração, não julgava que Cantor havia demonstrado a equivalência topológica entre os espaços, a despeito de suas dimensões. Isto porque, para que tal equivalência tivesse sido provada, a demonstrada correspondência bijetiva entre os pontos dos espaços teria de ser contínua, caracterizando-o um homeomorfismo entre os espaços de dimensões diferentes, o que é impossível. Segundo Dedekind:

> Se é possível estabelecer uma correspondência completa, unívoca e recíproca entre os pontos de uma multiplicidade contínua ***A***, de ***a*** dimensões, com os pontos de uma multiplicidade ***B***, de ***b*** dimensões, então, se ***a*** e ***b*** não são *iguais,* esta correspondência é necessariamente *descontínua* (DEDEKIND in:DUGAC, p. 122, *op.cit*).

Dedekind observa que o número de dimensões de um espaço é um invariante em relação a um grupo de transformações bijetivas contínuas. Se é possível efetuar uma bijeção entre pontos de espaços de dimensões diferentes, então tal bijeção é discreta e, portanto, não diz respeito à topologia dos espaços; daí a impossibilidade de que as vizinhanças de um ponto em um espaço ***r***-dimensional possam ser bijetivamente mapeadas em um espaço ***p***-dimensional, com $r \neq p$, já que o mapeamento de vizinhanças pressupõe uma bijeção contínua entre tais espaços dimensionalmente diferentes. Portanto, espaços de dimensões distintas são topologicamente distintos, embora tenham a mesma quantidade de pontos.

Cantor, de posse das observações de Dedekind, mudou de opinião quanto à equivalência topológica de espaços dimensionalmente diferentes. De fato, no artigo de 1878, Cantor introduz a observação de que não trataria de correspondências bijetivas contínuas entre os espaços de dimensões diferentes, limitando-se a mostrar que tais espaços são equivalentes em relação a bijeções discretas (DUGAC, *ibid*, p.123).

Mas se os espaços de dimensões distintas não são topologicamente equivalentes, que tipo de equivalência pode-se inferir que há entre eles, dado um grupo de transformações bijetivas discretas?. Em outras termos, qual a propriedades destes espaços que se mostra *invariante* em relação às tranformações bijetivas não contínuas?

Para responder a tais questões, Cantor introduziu o conceito de *potência.* Cantor caracterizou *potência* como uma propriedade dos *agregados* tomados em sentido abstrato, independentemente de estes serem constituídos de pontos geométricos ou não. Dados dois agregados bem definidos – o que Cantor definiu como sendo agregados cujos elementos são perfeitamente distintos entre si, além de *logicamente* determinados quanto aos elementos que contém (CANTOR, p.46, [1941])-, diz-se que têm a mesma potência quando é possível colocar os seus elementos em uma correspondência bijetiva *discreta*. Dados os agregados ***A*** e ***B***, se é possível associar os seus elementos de maneira bijetiva, *qualquer que seja a estruturação interna que estes elementos tenham em **A** ou em **B***, então ***A*** e ***B*** são ditos equivalentes ou tendo a mesma potência; no caso de ***A*** e ***B*** serem finitos, diz-se que têm o mesmo *número* (*ibid,* p.40).

Através da noção de potência, o verdadeiro alcance do teorema de 1878 pode ser compreendido. Dados espaços de dimensões diferentes, uma vez que se *abstraia* a estruturação interna destes – isto é, ignorando-se as vizinhanças que cada ponto tem, em função do número de coordenadas usado para representá-lo -, então é possível relacionar bijetivamente os pontos destes espaços. Intuitivamente, pode-se afirmar que, desprezando a topologia de espaços dimensionalmente distintos, é possível colocar os seus pontos *lado a lado*, evidenciando que há o mesmo *número ou quantidade* de pontos nestes espaços, quaisquer que sejam as suas dimensões.

Já que Cantor havia demonstrado, em 1874, que este processo de colocar os elementos lado a lado é impossível entre agregados contínuos e enumeráveisl, torna-se evidente que, para os conjuntos infinitos, há, no mínimo, duas potências distintas. De fato, no artigo de 1878, Cantor afirma que a potência dos conjuntos contínuos não é igual a potência dos conjuntos enumeráveis, sendo-lhe *imediatamente* posterior – proposição esta que Cantor enuncia como um teorema, contudo sem apresentar a sua demonstração. Denominando de *um* a potência dos agregados enumeráveis, Cantor diz que

> Mediante um processo de indução que [não descreverei no presente momento], chega-se ao teorema que o número das classes dos conjuntos de pontos lineares é finito e igual a *dois* (CANTOR in:KATZ, p.662, *op. cit*).

Portanto, já em 1878, Cantor estava convencido de sua *hipótese do contínuo*, afirmando que, entre as potências do enumerável e do contínuo, não há potência intermediária.

Com os seus trabalhos de 1872 a 1878, Cantor semeou o caminho para a elaboração sistemática de sua teoria dos números transfinitos, apresentando, neste período, o conceito de potência de um conjunto, mais tarde denominado de número cardinal. Além disso, de 1879 a 1882, por sugestão de Dedekind, Cantor procurou estabelecer uma teoria dos conjuntos em sentido bem geral, livre da intuição geométrica, na qual os conceitos de ponto de acumulação, conjunto derivado e conjunto potência seriam tratados mais sistematicamente do que fora nos trabalhos anteriores, de 1872 a 1878 (DUGAC, p.124-125, *op.cit*). Portanto, pode-se afirmar com segurança que os *Grundlagen*, de 1883, são uma espécie de síntese dos trabalhos de Cantor iniciados em 1872, com o artigo sobre a unicidade da representação trigonométrica de funções arbitrárias. Além disso, nos *Grundlagen*, qualquer referência a contextos geométricos ou topológicos é deixada de lado, de tal forma que os conceitos aí introduzidos sejam puramente conjuntísticos.

2.3 As razões que levaram Cantor a uma extensão dos números naturais

Como já foi visto, em 1878 Cantor já trabalhara com o conceito de potência de um conjunto, o qual, posteriormente, se desenvolveria e viria a se tornar a noção de número cardinal. Também foi visto que a teoria cantoriana dos conjuntos se desenvolveu a partir dos estudos de Cantor no campo da análise, em especial no que diz respeito à unicidade da representação trigonométrica de funções arbitrárias.

De fato, na elaboração de seus *Grundlagen*, de 1883, obra considerada como o marco inicial da teoria dos números transfinitos, Cantor teve como inspiração um problema que surge em contextos geométricos. Em 1878, Cantor demonstrara que um espaço unidimensional tem a mesma potência – ou o mesmo número de pontos – de um espaço tridimensional. Além disso, também provou que o espaço intermediário entre ambos, o espaço bidimensional ou o plano, também é equipotente aos espaços uni e tridimensionais. De forma geral, dados os espaços $\boldsymbol{R^n}$, $\boldsymbol{R^m}$ e $\boldsymbol{R^p}$, com $\boldsymbol{n < m < p}$, tal que $\boldsymbol{R^n \subset R^m \subset R^p}$, tem-se que

$$(\boldsymbol{R^p \sim R^n}) \rightarrow (\boldsymbol{R^p \sim R^m}) \wedge (\boldsymbol{R^n \sim R^m}),$$

em que o símbolo "~" é indicativo de equipotência – isto é, da existência de uma correspondência bijetiva entre os pontos de tais espaços. A partir deste resultado oriundo de pesquisas envolvendo a relação de grandeza entre os espaços infinitos de dimensões distintas, Cantor se viu com a obrigação de generalizar tal teorema a conjuntos infinitos quaisquer que satisfaçam a supracitada relação de inclusão verificada entre os espaços dimensionais, posto que a noção de *potência* é extensiva aos conjuntos em geral, não tendo seu uso restrito a contextos geométricos. Dados os conjuntos *infinitos* quaisquer $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, tais que $\boldsymbol{A \subset B \subset C}$. Se $(\boldsymbol{A \sim C})$, então é de se esperar que $(\boldsymbol{A \sim B})$ e $(\boldsymbol{B \sim C})$.

A fim de demonstrar tal teorema, Cantor se viu impelido a uma extensão *natural* da seqüência dos inteiros positivos ou números naturais. Em uma carta a Dedekind, datada de 5 de novembro de 1882, Cantor expressa claramente o papel fundamental que a demonstração do aludido teorema exerceu para que ocorresse tal continuação *ad infinitum* da seqüência dos naturais:

> Você se lembra de que eu te disse que não conseguia provar o seguinte teorema: [S]e *M'* é uma parte [infinita] de um agregado *M*, *M"* parte de *M'*, e se *M* e *M''* podem ser reciprocamente correlacionadas [de maneira] um-para-um (i.e, *M* e *M''* tem a mesma potência), então *M'* tem a mesma potência de *M* e *M''*. [A]gora cheguei a fonte deste teorema e posso prová-lo rigorosamente com a necessária generalidade; e isto preenche uma grande lacuna na teoria dos agregados.[C]heguei a tal resultado por

meio de uma extensão ou continuação natural da seqüência dos inteiros reais [...] (CANTOR, p.875, [1999]).

Por conseguinte, o surgimento dos números ordinais transfinitos de Cantor está intimamente associado a uma questão teórica envolvendo potências de conjuntos infinitos. Pode-se até dizer que tais números foram introduzidos como uma tentativa de contar as puras unidades de um conjunto ou agregado, quando este é visto como potência, isto é, destituído de estruturação interna ou de inter-relações entre seus elementos. Nestas condições, um conjunto infinito é um *todo composto de puras unidades, tomadas simultaneamente*. A partir desta imagem abstrata do agregado, pode-se contá-lo, tomando os seus elementos um a um, assim como é possível, pelo menos em princípio, contar qualquer totalidade *finita* de unidades.

Em geral, um agregado ou conjunto, para Cantor, é um todo de unidades reunido por meio de uma lei; tal lei, em linhas gerais, se identificaria com a possibilidade de atribuição de um número ordinal ao agregado, significativo de uma contagem efetuada com todos os elementos do conjunto em questão. No caso dos agregados infinitos, tal contagem leva a uma extensão natural da seqüência dos naturais, chegando-se a um número natural que limita o infinito, infinito este que, em um primeiro momento, mostra-se como ilimitado É neste sentido que Cantor afirma que sua teoria dos agregados busca recuperar a síntese platônica entre *ápeiron* - ilimitado – e o *perás* - o limitado-, da qual resulta o conceito de *miktón,* espécie de princípio de limitação do que é potencialmente ilimitado (CANTOR, *ibid*, p.916; PLATÃO, Filebo, 23c-26e)

Os *Grundlagen* se iniciam com a categórica afirmação de Cantor de que qualquer avanço na teoria dos agregados depende essencialmente da extensão do conceito de número inteiro para o infinito (CANTOR, *ibid*, §1, [1]- [2]). Uma vez que tal extensão se deu motivada por questões envolvendo relações entre potências, conclui-se que a teoria dos números ordinais de Cantor se desenvolveu, precipuamente, como uma *teoria das potências.* A extensão que Cantor faz da seqüência dos naturais se deu, unicamente, com o intuito de *contar* o infinito atual, o qual, em oposição ao infinito potencial ou impróprio[4], Cantor define da seguinte maneira:

> Nos tempos modernos, na geometria e na teoria das funções, outro uso justificado do infinito [em oposição ao uso do infinito potencial] foi desenvolvido. Por exemplo, na teoria de funções analíticas de variáveis complexas tornou-se necessário e comum imaginar, no plano que representa as variáveis complexas, um único ponto situado no infinito (isto é, um ponto infinitamente distante, mas bem definido) e, a partir disto, examinar o comportamento da função na vizinhança deste ponto. Verificou-se que na vizinhança deste ponto infinitamente distante a função apresenta exatamente o mesmo comportamento como em qualquer outro ponto situado em uma região finita, tal que, neste caso, estamos completamente autorizados a pensar o infinito como situado em um ponto perfeitamente determinado.[Quando] o infinito aparece em tal forma, denomino-lhe de *infinito próprio* [ou *infinito atual*] (CANTOR, *ibid*, §1, [4]-[5])

Inspirado por analogias com contextos geométricos - em que a representação por meio de eixos coordenados permite, sem dificuldade, operacionalizar o conceito de ponto infinitamente distante -, Cantor define o infinito atual ou próprio como um ponto bem determinado que dista infinitamente de qualquer ponto cuja determinação é feita com coordenadas finitas. Assim, por exemplo, em um plano bidimensional, todo ponto coordenado por um dupla (x,y) de números reais quaisquer, está infinitamente distante de um ponto cujas coordenadas apresentem $x = \infty$ ou $y = \infty$, em que o símbolo "∞" indica, de fato, uma posição *bem determinada* na direção do eixo x ou y, infinitamente distante de qualquer posição definida mediante coordenadas reais. Além disso, na vizinhança de tal ponto – isto é, em qualquer intervalo aberto que contenha tal ponto -, o comportamento da função é normal, apresentado as mesmas características estruturais que a função apresentaria na vizinhança de um ponto de coordenadas reais finitas.

[4] O infinito impróprio ou potencial em Cantor caracteriza-se como "uma quantidade variável que cresce para além de todos os limites ou diminui até qualquer exigüidade desejada, sem, contudo, deixar de ser uma grandeza *finita*"(CANTOR, *ibid*, §1, [3]).

A partir desta visão geométrica do infinito atual, Cantor passa a entender a seqüência dos números naturais de uma forma nova: ao invés de analisá-la como o *arquétipo* do infinito potencial, Cantor a compreende de *forma atual*, como um todo bem determinado, ao qual pode ser relacionado a mesma determinação do ponto geométrico infinitamente distante. De fato, o que Cantor faz é associar aos números naturais um *segmento linear e bem ordenado* cujo final é indicado por um número inteiro perfeitamente determinado e infinitamente distante de qualquer número finito. O inteiro infinito associado ä seqüência dos inteiros finitos não constitui um número finito máximo, mas um ponto, por assim dizer, situado fora da seqüência dos naturais finitos. Sobre esta compreensão deste número inteiro infinito como estando fora da seqüência dos naturais, Cantor nos diz:

> ω [o primeiro número inteiro infinito] é o menor de todos os números maiores que todos os números inteiros [finitos]. Mas $\omega - \nu$ é sempre igual a ω e, portanto, não podemos dizer que os números crescentes ν fiquem tão próximos quanto queiramos de ω; de fato, qualquer número ν, por maior que seja, está absolutamente distante de ω quanto o menor número ν. Aqui temos, de forma clara, o fato muito importante de que meu menor número ordinal transfinito ω [...] situa-se absolutamente fora da série infinita 1,2,3, e sucessivamente. Por conseguinte, ω *não* é um número finito máximo, pois não há tal coisa (CANTOR, p.78, [1941]).

A partir deste inteiro indicativo da compleição de todos os inteiros finitos, Cantor estende a contagem ao infinito tal como esta se realiza no âmbito do finito, chegando, assim, a uma extensão natural dos números inteiros. Conforme ele nos diz:

> Os inteiros infinitos [...] não têm nada em comum com [o infinito potencial]. Ao contrário, eles possuem a mesma determinação que encontramos nos pontos infinitamente distantes da teoria das funções analíticas – mas, enquanto estes permanecem isolados de todos os pontos situados em regiões finitas, os [inteiros infinitos] não se reduzem a um único ponto no infinito, mas formam uma seqüência destes; eles são claramente diferenciados entre si e mantêm entre si relações numéricas similares àquelas observadas entre os inteiros finitos. Mas tais relações não são tais que possam admitir ser reduzidas essencialmente às relações entre os inteiros finitos; estas, de fato, aparecem freqüentemente, mas somente enquanto diferentes formas e intensidades do infinito potencial – por exemplo, como função de uma variável x que cresce ou diminui indefinidamente, tal que ela admita índices finitos em seu processo

> de crescimento [ou diminuição] infinitos. Tais relações, sem dúvida, podem ser consideradas como razões disfarçadas daquilo que é finito (ou, pelo menos, redutíveis aos domínios finitos) [...]; em contraste, as leis do [...] inteiros propriamente infinitos são, desde o início, diferentes do que é dependente do finito, embora isto não implique que os inteiros finitos devem receber novas determinações por conta dos números inteiros infinitos e determinados (CANTOR, [1999], §1, [7]).

De acordo com as próprias palavras de Cantor, os novos inteiros são inteiramente atuais e determinados; e se, ocasionalmente, este se apresentam com os mesmos princípios de formação dos inteiros finitos, é somente na medida em que eles admitem ser índices sucessivos de um processo de crescimento ou diminuição infinito de uma variável. Todavia, longe de serem uma roupagem nova para o infinito potencial, os inteiros estendidos ao infinito estão associados com totalidades infinitas absolutamente completas e atuais.

Para que tal compromisso essencial com o infinito atual se mostre inequívoco, é fundamental elucidar os *três princípios de geração dos inteiros infinitos* (CANTOR, *ibid*, §11; §12, [1]-[10]). Na já mencionada carta a Dedekind, de novembro de 1882, há uma exposição clara e sucinta de tais princípios, de tal forma que, na medida em que Cantor vai ascendendo aos inteiros infinitos, os princípios vão sendo apresentados:

> Denomino a seqüência $1,2,3,...,v,...$ a primeira classe dos números inteiros reais e a designo por (v) [...] Chego até a segunda classe de números como se segue: [...] Assim como o número v é a expressão para um número definido de ν unidades tomadas em conjunto, inicio criando um novo número ω que é a expressão do fato de que a totalidade (v) foi dada inteiramente; imagino ω como o limite dos números v, se, por isso, entendo nada além de que ω é o primeiro inteiro criado após *todos* os v, i.e., o primeiro que deverá ser chamado maior que todos os v [...]. Se aplico novamente a adição de uma unidade a ω, então obtenho o número $\omega +1$, que expressa que o primeiro ω está incluído em uma totalidade completa, o que me leva a um novo número. Denomino a transição de um número v ou ω ao imediatamente seguinte de *primeiro princípio de geração*; e denomino a transição de uma seqüência crescente de inteiros que não tem maior número ao número que é maior que todos eles de *segundo* princípio de geração (CANTOR, p.875, [1999]).

Mediante estes dois princípios de geração, Cantor pôde estender seus números transfinitos, de tal forma que a sucessão seguinte de inteiros infinitos surja naturalmente:

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega+\nu, \ldots, \omega^2.\lambda+\omega\mu+\nu, \ldots, \sigma.\omega^k+\rho.\omega^{k-1}+\ldots+\omega\mu+\nu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^\omega+\nu, \ldots, \alpha, \ldots$$

Tal seqüência dos inteiros pode ser continuada, por meio dos dois princípios supracitados, *ad infinitum.* Todavia, ao continuarmos tal seqüência indefinidamente, não há como chegarmos a um termo, a um *limite* que esgote a possibilidade de geração de números inteiros mediante a passagem ao limite de uma sucessão enumerável ou por meio da adição sucessiva de uma unidade. Em outras palavras, para poder *sair do domínio do enumerável*, Cantor necessita de um princípio de geração que autorize a introdução de um inteiro infinito que seja *inacessível*, através da passagem ao limite, aos inteiros inferiores dispostos em uma seqüência infinita de termos crescentes, assim como, obviamente, mediante a justaposição de uma unidade. Isto é, Cantor precisa esgotar, por completo, a totalidade dos números inteiros associados a *todas as seqüências enumeráveis possíveis.* Para tanto, Cantor faz uso da noção de *classe de números* (CANTOR, *ibid*, §1, [7]-[9]). Definindo os inteiros finitos como a primeira classe de número, Cantor define os inteiros infinitos maiores ou iguais a ω como a segunda classe de números. Como os inteiros infinitos são *ilimitados* em sentido amplo, é possível, então, postular um inteiro ω_1 maior que qualquer inteiro da segunda classe, com o qual se iniciam os inteiros infinitos da terceira classe; estes, por sua vez, são inacessíveis aos inteiros da segunda classe por meio da passagem ao limite de uma seqüência infinita e enumerável de inteiros infinitos da segunda classe. Por meio deste procedimento, novas classes de números são introduzidas sucessivamente. Desta forma, a totalidade dos inteiros infinitos se subdivide em classes de números sucessivas:

$$\text{(I)} = [1, \omega) \;;\; \text{(II)} = [\omega, \omega_1) \;;\; \text{(III)} = [\omega_1, \omega_2) \;;\; \text{(IV)} = [\omega_2, \omega_3) \;;\ldots;\; \text{(N)} = [\omega_{n-1}, \omega_n);\ldots,$$

de tal forma que, dada uma seqüência $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, ...$de uma classe de número **(J)**, o limite de tal seqüência situa-se, necessariamente, dentro do intervalo **(J) = [**ω_{J-1}, ω_J)[5].

Tais ordinais, que iniciam as sucessivas classes de números, são introduzidos por meio de um terceiro princípio de geração, denominado por Cantor de *limitação.* Conforme diz Cantor a Dedekind:

A primeira impressão que lhe causará tal seqüência [a dos inteiros finitos e infinitos gerados pelos primeiro e segundo princípios de geração] é que não se vê uma maneira pela qual pode-se chegar a um tipo de conclusão em sua continuação – uma conclusão que, entretanto, seria necessária, posto que o que se intenta é fornecer-nos uma *potência nova e determinada*, isto é, a potência da segunda classe [de números] que *imediatamente* segue a potência da primeira classe. [A] fim de obter esta conclusão, então um *terceiro* princípio de geração tem de ser adicionado aos dois momentos de geração definidos anteriormente; chamo tal princípio de *limitação*. Este consiste na exigência de que a criação de qualquer inteiro, por meio dos princípios [já explicitados], só possa ocorrer se a totalidade de todos os números precedentes é *contável* por uma classe de números já conhecida e existente em toda a sua extensão (CANTOR, *ibid*, p.876)

De forma geral, os inteiros infinitos de Cantor são números associados a contagens realizadas no âmbito do infinito. Se o infinito a ser contado for enumerável, então a contagem se realizará conforme a adição sucessiva de unidades e a passagem ao limite, a qual pode ocorrer um número *ilimitado* de vezes, conforme a estrutura posicional dos elementos deste infinito. Entretanto, tais procedimentos, em princípio, só permitem contar o que é enumerável ou da mesma extensão dos números naturais. Quando o infinito a ser contado é da potência imediatamente superior a dos naturais, a numeração completa de seus elementos não se dá somente com o primeiro e o segundo princípios de geração; faz-se necessário, então, introduzir um número maior que qualquer número da segunda classe e que não esteja associado, como limite, a nenhuma seqüência enumerável de números inferiores a ele. Para tanto, o inteiro a que se chega tem de estar associado à totalidade, *completa e atual*, de todos os limites, dispostos em

[5]De fato, tal propriedade começa a valer a partir da segunda classe de números, pois, quanto às seqüências infinitas de números finitos, o limite destas é ω, não sendo, portanto, um número finito ou da primeira classe (CANTOR, p.158, [1941]).

ordem crescente, de todas as seqüências infinitas e enumeráveis possíveis no âmbito dos números da segunda classe. Utilizando-se o mesmo raciocínio, torna-se possível atribuir um número inteiro à totalidade de números da terceira, quarta ou da enésima classe de números.

Mediante os seus três princípios de geração, Cantor, de fato, consegue, por assim dizer, *contar qualquer infinito, de qualquer potência*. Mais precisamente, dado um agregado infinito de qualquer potência, sempre é possível *contá-lo* ou *bem ordena-lo*[6], a tal ponto de, como acontece com os agregados finitos, ser possível atribuir-lhe um número inteiro. Isto porque contar, para Cantor, é bem ordenar um conjunto, colocando os seus termos, tomados um a um, em sucessão. No caso dos agregados finitos, a enumeração ou contagem dos termos –"*Anzahl*"- resulta em um número coincidente com a potência do agregado (CANTOR, *ibid*,§1, [11]); para os agregados infinitos, a boa ordenação ou contagem pode ocorrer de diversas maneiras, tal que, para cada agregado de potência infinita **(K)**, há **(K+1)** maneiras de contá-lo ou bem ordená-lo- ou, dito de outro modo, para cada agregado infinito de potência **(K)**, há **(K+1)** inteiros infinitos atribuíveis a tal agregado como o resultado de uma boa ordenação tomando um a um de seus termos.

2.4
A inteligência humana e a sua capacidade de entender o infinito

Uma das características da obra de Cantor é a naturalidade com que o infinito é tratado. Tacitamente, em toda a análise cantoriana, existe o pressuposto de que a inteligência humana pode acessar às realidades infinitas, da mesma forma como tem acesso aos domínios finitos. Segundo Cantor, com exceção de Deus – o absolutamente infinito -, todas as coisas são determinadas pelo intelecto, de tal forma que qualquer realidade, mesmo que infinita, admite uma determinação numérica. Essencialmente, a tese de Cantor é a de que, ao lado das grandezas

[6]Segundo Cantor, "um agregado *bem ordenado* é um agregado bem definido em que seus elementos estão relacionados entre si por uma determinada sucessão, tal que (i) há um primeiro elemento do conjunto; (ii) cada elemento do agregado (desde que não seja o último) é seguido por outro elemento do agregado; e, (iii) para qualquer [segmento] deste agregado, finito ou infinito, há um determinado elemento que é o *sucessor imediato de todos os elementos* [*que compõem tal segmento*] (a menos que não haja nada sucedendo os elementos de tal segmento)" (CANTOR, *ibid*, §2, [2]).

finitas e do absolutamente infinito, inacessível ao intelecto, há uma esfera intermediária que consiste no domínio do *Transfinitum* ou do *Suprafinitum*:

> O que afirmo e acredito ter provado [...] é o seguinte: sucedendo ao finito, há o *Transfinitum* (que também pode denominar-se *Suprafinitum*) – isto é, há um domínio gradual e ilimitado de modos determinados que em sua natureza não são finitos, mas infinitos. [Todavia], como o finito, [tais modos] podem ser determinados por números bem definidos e distintos. Estou convencido de que o domínio das quantidades definidas *não* é exaurido pelas quantidades finitas, e os limites de nosso conhecimento podem ser, de acordo com isto, estendidos sem violentarmos a nossa natureza (CANTOR, *ibid*, §5, [3]).

A extensão dos inteiros positivos para o infinito não é, conforme nos aponta Cantor, contrária à natureza humana. Um dos argumentos contra a teoria cantoriana reside na essencial finitude da inteligência humana, o que, em princípio, limitaria o seu acesso ao âmbito do finito. Por conseguinte, não seria possível qualquer discurso sobre o infinito, posto que a inteligência, por limitações inerentes, é incapaz de conceber o infinito de forma atual. Em especial, na atribuição de um número a um agregado, os detratores do infinito aduzem o argumento de que, posto que o infinito é ilimitado, não há como estipular um último termo que expresse a contagem de todos os seus elementos, dado que estes não têm fim. Neste sentido, o infinito atual, é *incontável* à inteligência humana; e, qualquer tentativa de contá-lo, leva fatalmente a contradições (CANTOR, *ibid*, §4, [4]-[10]).

De maneira perspicaz, Cantor aponta a falácia do argumento que *demonstra* a incapacidade humana de entender conceitualmente o infinito, em razão da finitude do entendimento humano. Basicamente, o que mostra Cantor é que, por *finitude* do entendimento humano, compreende-se a capacidade de formar *somente* números finitos. Obviamente, um tal argumento pressupõe que o entendimento humano, *a priori*, está vedado às realidades infinitas, o que não é, de forma alguma, evidente para Cantor. Pelo contrário, a tese cantoriana é a de que muitas características do infinito estão presentes na inteligência humana, uma vez que, sem tal presença, o próprio infinito absoluto não seria reconhecido como tal. Daí se segue que o entendimento humano, embora limitado pela própria natureza humana, não é essencialmente finito, no sentido mencionado, mas tem, em si mesmo, a infinitude como uma de suas qualidades reconhecíveis. Nas palavras de Cantor:

> A finitude do *entendimento* humano é geralmente apresentada como a razão do por que somente números finitos podem ser pensados; Mas [...] vejo nesta asserção um círculo vicioso [...]. Claramente, está tácito aqui que o significado de "finitude do entendimento" engloba o de capacidade de formação de números [exclusivamente] finitos. Todavia, deve-se lembrar que o entendimento pode também, em um sentido determinado, distinguir e definir o infinito, isto é, os números *superfinitos*, de tal forma que uma extensão do significado da expressão "entendimento finito" faz-se oportuno; ou, então, deve-se, em um certo sentido, inserir o predicado "infinito" ao entendimento humano. Ao meu ver, a última opção é a mais adequada. A expressão "entendimento finito" [...] é, a mim, de todo inadequada; pois, embora limitado por sua natureza humana, *muito* do infinito é aderente a ele; e, ouso dizer, se assim não fosse, as inabaláveis crença e certeza que temos no ser absoluto, sobre o qual todos estamos de acordo, seriam inexplicáveis (CANTOR, *ibid*, §5, [4]).

Para Cantor, o infinito atual pode-se manifestar sob três formas distintas. Em primeiro lugar, há o infinito atual que nos chega ao entendimento, mesmo que de forma paradoxal, sob a forma do infinito absoluto, o qual reflete a infinitude de Deus ou de seus atributos. Além do infinito em seu sentido absoluto, Cantor também aduz, como uma segunda forma do infinito apreensível pelo entendimento, o *transfinito como concretude*, isto é, na qualidade da totalidade das criaturas criadas por Deus. Em uma carta ao Cardeal Franzelin, de Janeiro de 1886, Cantor explicita de forma clara a distinção entre o absoluto infinito e o transfinito, como concretude. Em seus termos:

> [E]mprego as expressões "natura naturans" e "natura naturata" com o mesmo significado que os tomistas lhes deram, tal que a *primeira* significa Deus, situado fora das substâncias criadas por Ele do nada, como Criador e Preservador das mesmas; a outra, por outro lado, significa o mundo criado por Ele. Correspondentemente [a estas expressões], distingo o "Infinitum aeternum sive Absolutum", que se refere a Deus e e seus atributos, e o "Infinitum creatum sive Transfinitum", que se refere a todas as coisas presentes na [*natura creata*], dado que o infinito atual deve ser asseverado como existente no mundo, posto que, *por exemplo*, de acordo com minha forte convicção, o número de coisas individualmente criadas, não somente em todo o universo, mas mesmo, com toda probabilidade, em uma ínfima região do espaço, é infinito (CANTOR, p.103, [1994]).

Completando, há o infinito em *abstrato*, identificado por Cantor com os seus números transfinitos. Em uma carta a G. Eneström, de novembro de 1885, Cantor afirma que:

> O Infinito Atual [pode ser abordado] sob *três aspectos fundamentais*: *primeiramente, enquanto Deo in extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*, como tal chamado de *Absoluto*; *em segundo lugar*, enquanto ocorre *in concreta seu in natura naturata*, o que lhe rende a denominação, de minha parte, de *Transfinitum*; e, *em terceiro lugar*, o Infinito Atual pode ser visto *in abstracto*, enquanto passível de ser compreendido pelo entendimento humano na forma [efetiva] de um *infinito atual* ou, como os denomino [nesta situação], de *números transfinitos*, em sentido ordinal (CANTOR, p.99, [1994]).

As três maneiras que o entendimento humano tem de compreender o infinito se relacionam, em certo sentido, com uma *cosmogonia cantoriana*, fortemente influenciada pela tradição judaico-cristã. No início, há Deus, fora do tempo e do espaço, absolutamente infinito em seu ser e em seus atributos. Este Deus, do nada, cria o mundo espácio-temporal e, por sua benevolência e magnificência, criou o mundo necessariamente infinito, como reflexo de seu ser (CANTOR, *ibid*, p.102); este infinito criado é a totalidade de todas as entidades individualmente criadas – como, por exemplo, a totalidade dos pontos do espaço - tomadas em sua singularidade, uma a uma; de certo modo, tal *Infinitum creatum* se identificaria com o conceito de potência, já que este último também consiste de um agregado infinito de *unidades consideradas distintamente, sem considerarmos as relações de ordem que há entre elas.* Se considerarmos as *possíveis* inter-relações entre estas unidades, então temos o infinito *in abstracto*, o qual coincide com os números inteiros infinitos, se tais inter-relações forem as características de um agregado bem ordenado – caso contrário, o infinito *in abstracto* coincide com os tipos ordinais, significativos das inúmeras relações inter posicionais que possam haver entre tais unidades[7].

[7]Dado um agregado infinito, as inter relações entre seus elementos podem não caracterizar uma boa ordenação. Por exemplo, o intervalo real $a < x < b$ constitui um agregado ordenado que não é bem ordenado. A fim de dar conta destes agregados, que aparecem amiúde na análise, Cantor definiu tipos ordinais em sentido amplo, os quais surgem de um agregado qualquer quando desconsideramos a natureza dos elementos que o compõem, atendo-nos somente às relações de ordem entre seus elementos.

Analisados como realidades objetiva, os números, finitos ou infinitos, se mostram sob dois aspectos: o *intrasubjetivo* – ou *imanente* – e o *transsubjetivo* – ou *transciente*. Na qualidade de realidade intrasubjetiva, os números são compreendidos como *entes de razão*, bem determinados em nosso pensamento e capazes de modificar, em um certo sentido, o conteúdo ou substância da razão humana. Introduzidos por definição, os números, vistos intrasubjetivamente, mantêm relações diretas com outros conteúdos da razão, gerando-se, assim, modificações efetivas no escopo dos instrumentos racionais de análise. Compreendidos como de natureza transsubjetiva, os números são vistos como expressões, no entendimento humano, do que realmente *é* no mundo exterior. Sob tal acepção, os números assumem, por assim dizer, um compromisso com a realidade dos fatos e, portanto, se portam como imagens intelectuais dos eventos exteriores ou independentes do entendimento humano. De acordo com Cantor:

> É possível atribuir uma existência real aos números inteiros, sejam finitos ou infinitos, em *dois* sentidos; mas, rigorosamente falando, é sob estes dois sentidos que qualquer conceito [...], no que diz respeito à sua existência, pode ser considerado. Primeiramente, podemos olhar os inteiros como reais na medida em que eles ocupam um lugar determinado em nosso entendimento, como bem distinguidos de todas as outras partes do nosso pensamento, relacionando-se com elas de determinadas formas, modificando, de fato, a substância de nosso pensamento de uma certa maneira; chamo este tipo de realidade dos números de *intrasubjetiva* ou *imanente* [...] Todavia, posso, da mesma forma, considerar os números com expressões ou cópias dos eventos e relações do mundo exterior, que se confronta com o intelecto [...] Chamo tal forma de realidade de *transsubjetiva* ou *transciente*[8](CANTOR, [1999], §8, [1]).

Em seus *Grundlagen*, Cantor não abordou os tipos ordinais, deixando para seu artigo de 1895 – as "*Beiträge*" - um tratamento detalhado e sistemático deste tópico (CANTOR, §§ 7-11, [1941]). Entretanto, na já aludida carta a Eneström, de novembro de 1885, Cantor diz que, *in abstracto*, o infinito atual tanto se mostra como inteiros infinitos, se bem ordenados, ou como tipos ordinais, denominados por Cantor de "números da mente" ou "vistos pelo olho da mente" (p.102, [1994]).

[8] Em uma nota final dos *Grundlagen*, Cantor expõe bem precisamente a distinção entre realidades intrasubjetiva e transsubjetiva. Enquanto a natureza intrasubjetiva de um conceito é de escopo da lógica, seu caráter transsubjetivo – ou transciente – pertence à metafísica, porquanto lida com sua correspondência com o mundo exterior. Segundo Cantor, "o procedimento na correta formação de conceitos é [...] sempre o mesmo. Postula-se algo com propriedades que, inicialmente, não é nada mais que um nome ou um símbolo *A*. [E]ntão, de uma forma ordenada, atribui-se [a tal símbolo] um ou muitos predicados inteligíveis, cujos significados são conhecidos por meio de idéias já disponíveis [na razão] e não contraditórios entre si. Deste modo, determina-se a conexão de *A* com conceitos já [definidos][...]. Uma vez que tal procedimento seja levado a termo, então temos todas as condições prévias para o aparecimento do conceito *A*, o qual, adormecendo dentro de nós, adquire um ser garantido por sua realidade intrasubjetiva, que consiste em tudo que se pede a um conceito; determinar seu significado transciente – ou o seu conteúdo transsubjetivo – é uma questão da metafísica" (CANTOR, *ibid*, p.919)

O fato de Cantor considerar que os conceitos matemáticos – e, em geral, qualquer conteúdo conceitual – admitem ser compreendidos de maneira intrasubjetiva ou transsubjetiva, exerce um papel fundamental na atitude de Cantor diante da matemática. Para Cantor, qualquer teoria matemática deve se comprometer com sua natureza intrasubjetiva e, sendo assim, não pode permitir contradições internas. O lado transsubjetivo da matemática não interessa a Cantor; em sua natureza última, a matemática é *livre* de qualquer relação com os fatos exteriores, o que a torna uma disciplina que, essencialmente, prima pela liberdade criativa, desde que esta não engendre paradoxos (CANTOR, *ibid*, §8, [4]-[5]).

2.5
O conceito de contínuo nos "Grundlagen"

Uma das missões que Cantor se propôs nos *"Grundlagen"* foi a de bem definir a natureza de um agregado contínuo, como, por exemplo, o contínuo dos números reais. Após uma breve discussão das concepções tradicionais sobre o contínuo – como as de Aristóteles ou de Santo Tomás de Aquino (§10, [1]-[3]), Cantor expõe a tese de que o conceito de contínuo é independente das intuições de tempo e de espaço; ao contrário, é pelo fato de podermos definir logicamente – ou intrasubjetivamente – a continuidade que surge a possibilidade de entendermos o tempo e o espaço como coisas objetivas ou como representações subjetivas. Segundo Cantor, não há nada na percepção sensorial do tempo e do espaço que nos garanta que ambos sejam *estruturalmente* contínuos. Conforme Cantor:

> Em minha opinião, trazer à tona o *conceito de tempo* ou a *intuição de tempo* na discussão muito mais fundamental do conceito de contínuo *não* é o procedimento correto; o tempo, para mim, é uma representação e, para sua clara exposição, é pressuposto o conceito de continuidade, sobre o qual ele depende e sem cuja assistência ele não admite ser compreendido objetivamente (como uma substância) ou subjetivamente (como uma forma de intuição *a priori*) [...] Da mesma forma, minha convicção é a de que a assim chamada *forma de intuição do espaço* não pode nos ajudar na aquisição de conhecimento sobre o contínuo. É somente por que temos o auxílio do conceito de contínuo já *completamente* [desenvolvido], podem o *espaço* e sua estrutura [interna] ser objetos de sóbria e exata investigações matemáticas, e não somente ser temas comparações filosóficas (CANTOR, *ibid*, §10, [1]).

A fim de entender o espaço e o tempo em termos estritamente lógicos, Cantor inicia um tratamento *aritmético* do contínuo. Inicialmente, Cantor define um *espaço aritmético plano n-dimensional* G_n, como sendo o agregado de todos os *pontos aritméticos* definidos pelas *n*-uplas $(x_1, x_2,..,x_n)$, em que cada x_k, ,tal que $1 \leq k \leq n$, pode tomar como valores, independentemente, todos os números reais do intervalo (∞, ∞).

A partir dos resultados alcançados em 1874 e 1878, Cantor parte da tese de que qualquer espaço aritmético, de qualquer dimensão, tem a mesma potência de um intervalo retilíneo do tipo $(0,1)$, a qual, já em 1878, Cantor havia conjecturado ser igual a **(II) –** a famosa hipótese do contínuo (CANTOR, *ibid*, §10, [5]-[7]). Como um enunciado equivalente, a hipótese do contínuo admite a seguinte formulação: *dada uma porção infinita* ***P*** *de um espaço aritmético de dimensão qualquer, ou tal porção tem potência igual a da primeira ou igual a da segunda classe de números.* Tomando os pontos de acumulação desta porção –vide ***(1.1)***-, pode-se então chegar a duas possibilidades: ou o primeiro conjunto derivado tem potência igual a **(I),** a potência da primeira classe de números, ou tem potência igual a **(II)**, a potência da segunda classe de números. Se tiver potência igual a **(I),** então há um número inteiro α, da primeira ou da segunda classe de números, tal que tal porção do espaço aritmético seja de primeiro gênero e de α-espécie – isto é, P^{α} é um conjunto finito. Mas se tiver potência igual a **(II)**, então seu primeiro conjunto derivativo satisfaz a equação (CANTOR, *ibid*, §10, [9]):

$$P^{(1)} = R + S,$$

sendo que R é um conjunto de primeiro gênero e de γ-espécie e S é tal que $S = S^{\gamma}$, em que γ são números da primeira ou segunda classe, *tomados sucessivamente*; em outros termos: o processo de eliminação sucessiva de S de seus pontos de acumulação, mesmo que levado ao infinito, dá por resultado o próprio conjunto S. Qualquer conjunto infinito de pontos aritméticos que se comporte como S Cantor denomina de *perfeito* (CANTOR, *ibid*, §10, [11]).

Para Cantor, um conjunto de pontos aritméticos é contínuo se, e somente se, for *perfeito* e *conexo*. Por *conjunto conexo de pontos aritméticos*, Cantor entende um conjunto tal que, dados dois de seus pontos T e T', para qualquer número tão pequeno quanto queiramos ε, sempre existe um número *finito* de pontos t_1, t_2,..., t_v

de T, tais que as distâncias $/T - t_1/, /t_1 - t_2/, /t_2 - t_3/, ..., /t_v - T'/$ são todas menores que ε (CANTOR, *ibid*, §10, [15]). Desta forma, Cantor define um conjunto de pontos - entendidos aritmeticamente- como contínuo, se ele satisfizer, necessária e suficientemente, as condições de ser *perfeito* e *conexo*. Com tal caracterização do contínuo, Cantor integra, em uma única definição, as definições anteriores e incompletas de Dedekind e Bolzano (CANTOR, *ibid*, §10, [17]-[18])[9].

Caberia então a Cantor demonstrar que entre as potências **(I)** e **(II)** não há potências intermediárias, isto é, a estrutura ordinal das potências infinitas ascendentes é isomórfica à estrutura dos inteiros finitos ou potências finitas. A demonstração de Cantor é, em linhas gerais, como se segue (CANTOR, *ibid*, §13, [1]-[9]). Em primeiro lugar, Cantor escolhe arbitrariamente um agregado ***(a')*** de diferentes números ***a'*** da segunda classe de números. Necessariamente, pelo fato da segunda classe de números ser um agregado bem ordenado, valem para ***(a')*** as propriedades seguintes:

(1) Entre os números de ***(a')***, há um *menor* número;

(2) Se os números de ***(a')*** admitem ser postos em uma seqüência decrescente $a_1, a_2, ..., a_b, ...$, então tal seqüência tem um último termo a_k, com a_k sendo o menor número de ***(a')***, e, alem disso, tem um *número finito de termos*.

A partir destas duas propriedades de qualquer agregado da segunda classe de números, Cantor passa à demonstração do seguinte teorema, equivalente à tese de que entre as potências **(I)** e **(II)** não há potências intermediárias:

*Se **(a')** é qualquer agregado da segunda classe de números, então, necessariamente, surgem três alternativas: ou **(a')** tem um número finito de termos, ou tem potência igual a **(I)**, ou tem potência igual a **(II)**.*

---

[9] Para Dedekind, o contínuo dos números reais caracteriza-se essencialmente pela propriedade de que cada número real ***b*** define um *corte*, isto é, uma secção nos números racionais tais que $(-\infty, b]$ e (b, ∞). Além disso, cada corte definido nos racionais define um, e somente um número real (DEDEKIND, p.21 ,[1964]). Obviamente, para que a definição de Dedekind se sustente, é necessário o pressuposto de que cada número real é um ponto de acumulação de um conjunto de racionais, isto é, na vizinhança de cada número real, por menor que esta seja, há infinitos números racionais, o que coincide com a definição cantoriana de conjunto de pontos perfeito. Por sua vez, Bolzano define uma grandeza contínua como sendo aquela que, dado um de seus elementos qualquer e uma vizinhança deste elemento, por menor que esta seja, sempre há, no mínimo, um outro elemento da grandeza em questão (BOLZANO, §38, [1999]). Em linhas gerais, a definição bolzaniana de grandeza contínua coincide com a noção cantoriana de conjunto conexo.

A prova de tal teorema se faz da seguinte maneira: seja **Ω** o primeiro número da *terceira classe de números* (**III**). Então qualquer número de ***(a')*** é menor do que **Ω**, posto que ***(a')*** está contido em (**II**). Imaginemos que os números de ***(a')*** estejam ordenados crescentemente, de tal forma que seja atribuído o índice ω ao menor deles. Portanto, a seqüência dos números ***(a')***, em ordem crescente, seria a_{ω}, $a_{\omega+1}$,.., $a_{\omega+\nu}$,... Se postularmos que tal seqüência tem um termo máximo, então, ao enumerarmos todos os termos de ***(a')***, chegamos a um número de índice $\omega + k$, o que, pela propriedade (2), implica que ***(a')*** é finito. Por outro lado, pode ser que ***(a')*** não tenha um termo máximo, o que abre a possibilidade de duas alternativas: ao enumerarmos todos os termos de ***(a')***, podemos chegar a um inteiro infinito limite da segunda classe, o que implica que a potência de ***(a')*** seja igual a (**I**) ou, finalmente, podemos continuar a enumeração passando por *todos* os números da segunda classe. Neste caso, o inteiro infinito atribuído a ***(a')*** seria o primeiro número da terceira classe de números, sendo, por conseguinte, igual a **Ω**. Pelo terceiro princípio de geração dos inteiros, isto implica que a totalidade ***(a')*** tem potência igual a (**II**), porquanto tem a mesma extensão da segunda classe de números em sua completude. Desta maneira, se ***(a')*** é enumerado, em sua totalidade, por um *segmento* da segunda classe de números, então ***(a')*** é finito ou tem potência igual a (**I**); se ***(a')*** é enumerado por completo com *todos os números* da segunda classe, então ***(a')*** tem potência igual a (**II**), não havendo, assim, uma quarta possibilidade – *quartum non datur*-, como Cantor queria demonstrar.

É mediante o mesmo raciocínio que Cantor demonstra que, *para quaisquer agregados infinitos* A, B e C, se $A \subset B \subset C$ e se ***(A~C)***, então ***(A~B)*** e ***(B~C)*** (CANTOR, *ibid*, §13, [10]-[11]). De fato, para que o teorema acerca das classes de números possa se verificar para *quaisquer agregados*, é necessário postular que qualquer agregado possa ser bem ordenado da mesma maneira que as classes de números. Em outros termos, tem de se admitir que um agregado infinito qualquer tenha uma potência igual a alguma potência de uma classe de número determinada. A partir disto, postula-se que seus elementos possam ser contados um a um, de tal forma que um inteiro infinito seja atribuído à totalidade de seus elementos, dispostos como um conjunto bem ordenado. Se estas condições são satisfeitas, o infinito em questão será analisado como um segmento isomórfico a algum segmento contido em alguma classe de número, e o supracitado teorema é demonstrado de forma análoga à demonstração de que, entre duas potências ascendentes, pressupostamente imediatas, *não pode haver uma potência intermediária*.