

### 3 Formulação numérica

#### 3.1. Metodologia para solução do problema

Para obtermos numericamente a expansão sobre base elástica, dividimos o problema em duas partes. Uma parte corresponde ao volume devido à expansão sobre base rígida e a outra ao volume devido à deformação da base elástica. Na Figura 3.1 ilustramos a metodologia utilizada, com a linha pontilhada delimitando as duas partes, sendo a superior a parte da base rígida e a inferior a da base elástica, sendo expandido o lençol de borracha na parte superior e a base do expensor de pele na parte inferior.

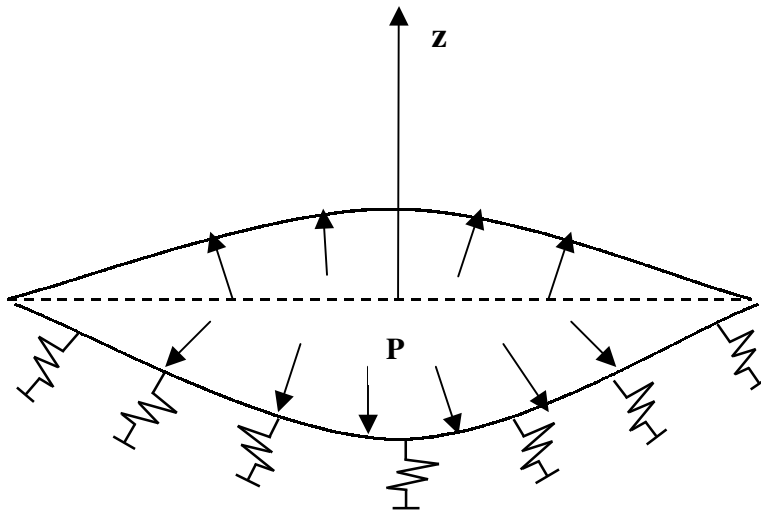


Figura 3.1 – Estudo da expansão sobre base elástica

#### 3.2. Formulações de energia para a borracha

O processo de expansão da borracha foi descrito por diferentes formulações de energia, que são a Neo-Hookeana, Mooney-Rivlin e de Ogden. Também foi utilizada a equação de Delfino para uma análise da expansão de pele humana.

### 3.2.1. Neo-Hookeano

Para o modelo Neo-Hookeano, a densidade de energia de deformação,  $W$ , é dada por:

$$W = C(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{1}{D_1}(J_{el} - 1)^2 \quad (3.1)$$

Onde  $C$  é a constante elástica do material,  $\lambda_i$  são as extensões principais e  $(J_{el})$  é a deformação volumétrica elástica. A constante  $D_1$  está relacionada com o grau de incompressibilidade do material, ou seja, quando  $D_1$  é igual a 0, o material é considerado incompressível. Essa equação nos forneceu um modelo simples, mas real de um material elástico.

### 3.2.2. Mooney-Rivlin

A densidade de energia de deformação,  $W$ , é dada por:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right) + \frac{1}{D_1}(J_{el} - 1)^2 \quad (3.2)$$

Onde  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes elásticas do material,  $\lambda_i$  são as extensões principais e  $(J_{el})$  é a deformação volumétrica elástica e  $D_1$  está relacionada com o grau de incompressibilidade do material.

### 3.2.3. Ogden

A densidade de energia de deformação,  $W$ , é dada por:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i} \quad (3.3)$$

Onde  $\lambda_i$  são as extensões principais,  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  e  $D_i$  são parâmetros do material,  $N$  é o número de termos da formulação e  $(Jel)$  é a deformação volumétrica elástica.

### 3.2.4. Delfino

A densidade de energia de deformação,  $W$ , é:

$$W = \frac{a}{b} (\exp(\frac{b}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)) - 1) \quad (3.4)$$

Onde  $a$  é a constante elástica,  $b$  é um parâmetro de ajuste e  $\lambda_i$  são as extensões principais.

### 3.3. Geometria

Consideramos neste trabalho uma membrana inicialmente plana e com raio  $a$ , espessura  $H$ , fixa em suas bordas. A membrana foi submetida a uma pressão interna uniforme hidrostática  $P$ , com isso pudemos considerar a deformação como sendo axissimétrica.

- Estado indeformado, Figura 3.2:

$X_1 \Rightarrow$  coordenada curvilínea relativa às linhas de meridiano da membrana indeformada

$X_2 \Rightarrow$  coordenada curvilínea relativa às linhas de latitude da membrana indeformada

$X_3 \Rightarrow$  coordenada relativa à espessura da membrana indeformada

$$\text{onde : } \begin{cases} X_1 = \rho \\ X_2 = \rho \theta \\ X_3 = X_3 \end{cases} \quad (3.5)$$

com  $\frac{-H}{2} \leq X_3 \leq \frac{H}{2}$  (superfície média)

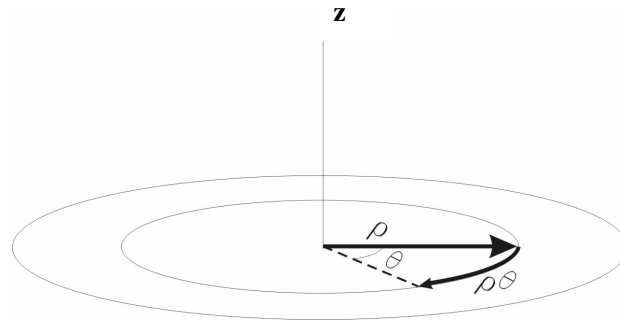


Figura 3.2 – Membrana indeformada

- Estado deformado, Figura 3.3:

$x_1 \Rightarrow$  coordenada curvilínea relativa às linhas de meridiano da membrana deformada

$x_2 \Rightarrow$  coordenada curvilínea relativa às linhas de latitude da membrana deformada

$x_3 \Rightarrow$  coordenada relativa à espessura da membrana deformada

$$\text{onde: } \begin{cases} x_1 = \xi \\ x_2 = r\phi \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{com } \frac{-h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \quad (h \rightarrow \text{espessura deformada})$$

sendo  $d\xi$  um elemento de linha na direção  $\xi$  da figura 3.3, tal que:

$$d\xi = \sqrt{dr^2 + dz^2}$$

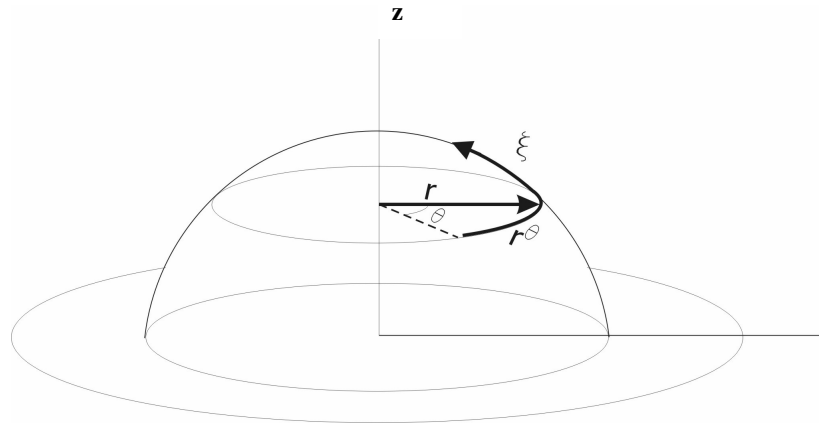


Figura 3.3 – Membrana deformada

A deformação na membrana pode ser definida pelas relações:

$$\begin{cases} r = r(\rho) \\ \phi = \theta \\ z = z(\rho) \end{cases}, \text{ devido a axissimetria} \quad (3.7)$$

Com isso, as coordenadas deformadas são:

$$\begin{cases} x_1 = \xi(X_1) \\ x_2 = \frac{r X_2}{\rho} \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}, \text{ pois } \theta = \frac{X_2}{\rho} \quad (3.8)$$

### 3.4. Extensões principais e gradientes de deformação

Definiu-se extensão principal a razão entre os comprimentos deformado e indeformado,  $ds$  e  $dS$ , respectivamente, nas direções principais:

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{dS_i} \quad (3.9)$$

Assim, temos que:

$$\lambda_1 = \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{d\rho} = \sqrt{r'^2 + z'^2} \quad (3.10-a)$$

$$\lambda_2 = \frac{r d\theta}{\rho d\theta} = \frac{r}{\rho} \quad (3.10-b)$$

onde  $\frac{\partial(\ )}{\partial\rho} = (\ )'$

Levando-se em conta a condição de incompressibilidade do material,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , logo:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\rho}{r \sqrt{r'^2 + z'^2}} = \frac{h}{H} \quad (3.11)$$

Os gradientes de deformação são definidos pela razão entre a derivada da coordenada deformada e indeformada.

$$x_{1,1} = \frac{dx_1}{dX_1} = \frac{d\xi}{dX_1} = \frac{\sqrt{dr^2 + dz^2}}{d\rho} = \sqrt{r'^2 + z'^2} = \lambda_1$$

$$x_{2,2} = \frac{dx_2}{dX_2} = \frac{r d\theta}{\rho d\theta} = \frac{r}{\rho} = \lambda_2 \quad (3.12)$$

$$x_{3,3} = \lambda_3$$

$$x_{i,j} = 0 \quad , \text{ para } i \neq j$$

$$[x_{i,j}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

### 3.5. Equações de equilíbrio da membrana

O sistema de equações de equilíbrio de uma membrana axissimétrica, no estado deformado, pode ser expresso conforme o desenvolvimento presente no trabalho de Green e Adkins (1960):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(T_1 r)}{d\xi} = T_2 \frac{dr}{d\xi} \\ K_1 T_1 + K_2 T_2 = P \end{array} \right. \quad (3.13-a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 T_1 + K_2 T_2 = P \end{array} \right. \quad (3.13-b)$$

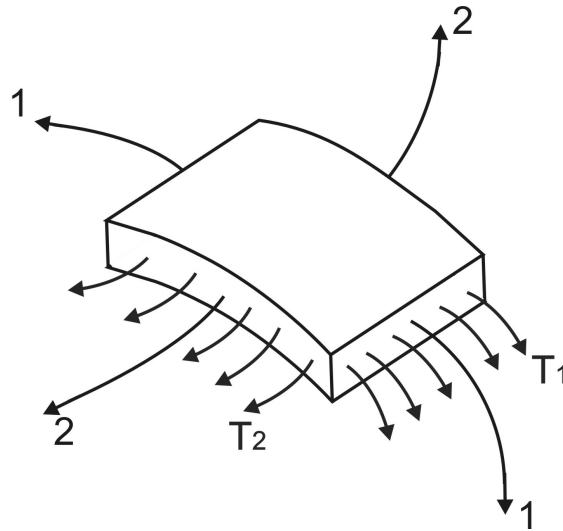


Figura 3.4 – Tensões na membrana

Onde ,

$K_i \rightarrow$  são as curvaturas principais

$P \rightarrow$  é a pressão interna, que age normal à superfície média

$T_i \rightarrow$  são as resultantes das tensões principais por unidade de comprimento

direção principal 1  $\rightarrow$  direção relativa às linhas de meridiano da membrana

direção principal 2  $\rightarrow$  direção relativa às linhas de latitude da membrana

Pode-se determinar  $T_i$  através da integração das tensões principais ao longo da espessura da membrana deformada  $h$ :

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 = h \sigma_{11} \quad (3.14-a)$$

$$T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 = h \sigma_{22} \quad (3.14-b)$$

Da equação (3.10-a) pudemos escrever que:

$$d\xi = \lambda_1 d\rho \quad (3.15)$$

Usando (3.14-a e b) e (3.15) na equação (3.13-a), obtivemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(h\sigma_{11}r)}{\lambda_1 d\rho} &= h\sigma_{22} \frac{dr}{\lambda_1 d\rho} \\ (h\sigma_{11}r)' &= h\sigma_{22}r' \\ r(h\sigma_{11})' + r'(h\sigma_{11}) &= h\sigma_{22}r' \\ r(h\sigma_{11})' + r'h(\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= 0 \\ \frac{1}{h}(h\sigma_{11})' + \frac{r'}{r}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sendo a curvatura principal  $K_1$  :

$$K_1 = -\frac{d^2r/d\xi^2}{\left[1 - \left(dr/d\xi\right)^2\right]^{1/2}} \quad (3.17)$$

Usando a relação de Gauss-Codazzi:

$$\frac{d}{d\xi}(rK_2) = K_1 \frac{dr}{d\xi} \quad (3.18)$$



obtivemos também a curvatura principal  $K_2$  :

$$rK_2 = \left[ 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \left( \frac{dr}{d\rho} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ \frac{r'^2 + z'^2 - r'^2}{\lambda_1^2} \right]^{1/2} = \frac{z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \quad (3.19)$$

$$K_2 = \frac{z'}{r\sqrt{r'^2 + z'^2}} \quad (3.20)$$

A segunda derivada de r em função de  $\xi$  é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dr}{d\xi} \right) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{r'}{\lambda_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \left( \frac{r''}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} - \frac{r'(r'r'' + z'z'')}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \left( \frac{r''(r'^2 + z'^2) - r'r'' - r'z'z''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{1}{(r'^2 + z'^2)^2} (r''z'^2 - r'z'z'') = \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^2} (r''z' - r'z'') \end{aligned}$$

$$\frac{d^2r}{d\xi^2} = \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^2} (r''z' - r'z'') \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) na equação (3.17):

$$K_1 = - \frac{\frac{z'}{r'^2 + z'^2} (r''z' - r'z'')}{\frac{z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}} = - \frac{(r''z' - r'z'')}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (3.22)$$

Usando as equações (3.20) e (3.22) na equação (3.13-b):

$$-\frac{(r''z' - r'z'')}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} h\sigma_{11} + \frac{z'}{r\sqrt{r'^2 + z'^2}} h\sigma_{22} = P$$

$$-\frac{(r''z' - r'z'')}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \sigma_{11} + \frac{z'}{r\sqrt{r'^2 + z'^2}} \sigma_{22} - \frac{P}{h} = 0 \quad (3.23)$$

A relação entre a espessura indeformada e a espessura deformada, para uma membrana incompressível, é  $h = \lambda_3 H$ .

Assim:

$$\frac{1}{\lambda_3} (\lambda_3 \sigma_{11})' + \frac{r'}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0 \quad (3.24-a)$$

$$\frac{r''z' - r'z''}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \sigma_{11} - \frac{z'}{r\sqrt{r'^2 + z'^2}} \sigma_{22} + \frac{P}{\lambda_3 H} = 0 \quad (3.24-b)$$

Substituindo as extensões principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , através das equações (3.10-a e b), obtivemos o sistema de equações de equilíbrio:

$$\frac{1}{\lambda_3} (\lambda_3 \sigma_{11})' + \frac{r'}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0 \quad (3.25-a)$$

$$\frac{(r''z' - r'z'')}{(\lambda_1)^3} \sigma_{11} - \frac{z'}{r\lambda_1} \sigma_{22} + \frac{P}{\lambda_3 H} = 0 \quad (3.25-b)$$

Seja  $W$  a função de densidade de energia de deformação, descrita no início deste capítulo, no item 3.2, tal que:

$$\sigma_{ii} = \lambda_i W_i \quad (3.26)$$

$$\text{onde, } W_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}$$

$$\sigma_{11} = \lambda_1 W_1 \quad (3.27\text{-a})$$

$$\sigma_{22} = \lambda_2 W_2 \quad (3.27\text{-b})$$

Colocando (3.27-a e b) em (3.25-b), temos:

$$\begin{aligned} \frac{r''z' - r'z''}{\lambda_1^3} \sigma_{11} - \frac{z'}{r\lambda_1} \sigma_{22} + \frac{P}{\lambda_3 H} &= 0 \\ \frac{r''z' - r'z''}{\lambda_1^3} \lambda_1 W_1 - \frac{z'}{r\lambda_1} \lambda_2 W_2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 P}{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Colocando (3.27-a e b) em (3.25-a), temos:

$$(\lambda_1 W_1)' + \lambda_1 W_1 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{H} \left( \frac{H}{\lambda_1 \lambda_2} \right)' + \frac{r'}{r} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) = 0 \quad (3.29)$$

$$(\lambda_1 W_1)' = \lambda_1' W_1 + \lambda_1 \lambda_1' W_{11} + \lambda_1 \lambda_2' W_{12} \quad (3.30)$$

já que  $W = W(\lambda_1, \lambda_2)$ , sendo obtido pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\quad)}{\partial \rho} &= (\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial \lambda_1} \lambda_1' + \frac{\partial(\quad)}{\partial \lambda_2} \lambda_2' \\ \lambda_1 W_1 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{H} \left( \frac{H}{\lambda_1 \lambda_2} \right)' &= \lambda_1 W_1 \lambda_1 \lambda_2 \left[ -\frac{\lambda_1' \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_1 \lambda_2} \right] \\ &= -\frac{\lambda_1 W_1 \lambda_1' \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\lambda_1 W_1 \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_1 \lambda_2} = -W_1 \lambda_1' - \frac{W_1 \lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo (3.30) e (3.31) em (3.29):

$$\begin{aligned}
\lambda_1' W_1 + \lambda_1 \lambda_1' W_{11} + \lambda_1 \lambda_2' W_{12} - W_1 \lambda_1' - W_1 \frac{\lambda_1 \lambda_2'}{\lambda_2} + \frac{r'}{r} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) &= 0 \\
\lambda_1' W_1 + \lambda_2' W_{12} - W_1 \frac{\lambda_2'}{\lambda_2} + \frac{r'}{r \lambda_1} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) &= 0 \\
\lambda_1' W_{11} + \lambda_2' \left( W_{12} - \frac{W_1}{\lambda_2} \right) + \frac{r'}{r \lambda_1} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) &= 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Através de uma simplificação proposta por Haughton (1996) neste tipo de sistema de equações diferenciais, temos que:

$$r'' = \frac{(r'F + z'G)}{\lambda_1^2} \tag{3.33-a}$$

$$z'' = \frac{(z'F - r'G)}{\lambda_1^2} \tag{3.33-b}$$

Com  $F=F(\rho)$  e  $G=G(\rho)$ .

Temos que:

$$-r'z'' + r''z' = \frac{1}{\lambda_1^2} (r'z'F + z'^2G - r'z'F + r'^2G) = G$$

$$G = -r'z'' + r''z'$$

Substituindo em (3.28):

$$\begin{aligned}
\frac{G}{\lambda_1^3} \lambda_1 W_1 - \frac{z'}{r \lambda_1} \lambda_2 W_2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 P}{H} &= 0 \\
G &= \frac{\lambda_1^2}{W_1} \left( -\frac{\lambda_1 \lambda_2 P}{H} + \frac{z'}{r \lambda_1} \lambda_2 W_2 \right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Derivando a extensão principal  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1' = \left( \sqrt{r'^2 + z'^2} \right)' = \frac{(r'r'' + z'z'')}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}$$

$$\lambda_1' = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} \frac{(r'z'G + r'^2F - r'z'G + z'^2F)}{(r'^2 + z'^2)}$$

$$\lambda_1' = \frac{F}{\lambda_1} \quad (3.35)$$

Substituindo a equação (3.35) em (3.32):

$$\frac{F}{\lambda_1} W_{11} + \lambda_2' \left( W_{12} - \frac{W_1}{\lambda_2} \right) + \frac{r'}{r\lambda_1} (W_1\lambda_1 - W_2\lambda_2) = 0$$

$$F = \frac{\lambda_1}{W_{11}} \left[ \lambda_2' \left( \frac{W_1}{\lambda_2} - W_{12} \right) - \frac{r'}{r\lambda_1} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) \right] \quad (3.36)$$

Assim, obtivemos um sistema de quatro equações de equilíbrio de 1ª ordem, que descrevem o problema:

$$r' = U$$

$$z' = V$$

$$r'' = U' = \frac{(r'F + z'G)}{\lambda_1^2} \quad (3.37)$$

$$z'' = V' = \frac{(z'F - r'G)}{\lambda_1^2}$$

Sendo F descrito em (3.36) e G em (3.34).

### Condições de contorno

Tendo em vista que a membrana é fixa no bordo,  $r = a$ , as condições de contorno são:

$$r(0) = 0$$

$$z(0) = 0$$

$$z'(0) = 0 \quad (3.38)$$

$$r(a) = a$$

onde,  $a$  = raio da membrana indeformada

### 3.6. Base elástica

Um modelo simples e bastante utilizado para o estudo do comportamento estrutural sobre base elástica é o modelo de Winkler. Nesse modelo assume-se que a deflexão da base em um ponto,  $w$ , dependa somente da pressão,  $p$ , agindo nesse ponto, com uma constante de proporcionalidade,  $k$ , portanto:

$$p = kw. \quad (3.39)$$

Ele consiste em uma distribuição contínua de molas lineares.

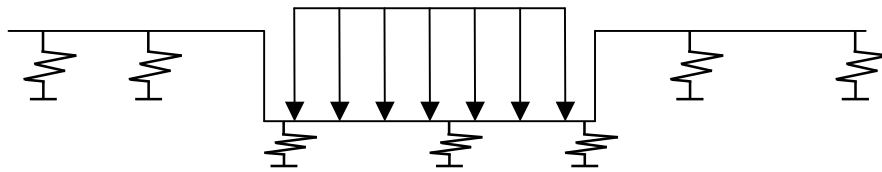


Figura 3.5 - Modelo de Winkler

A limitação deste modelo é que ele não considera a existência de interações entre as molas. O modelo usa apenas um parâmetro para expressar a resistência específica da base elástica. Existem outros modelos que contêm mais de um parâmetro para descrever o comportamento da base elástica como um contínuo, como os que foram propostos por Hetényi, Vlasov, Pasternak, Reissner e Filonenko e Borodich entre outros. Matematicamente todos estes modelos são equivalentes e diferem somente na definição dos parâmetros que caracterizam a fundação. Quando estes parâmetros são constantes ao longo do comprimento do elemento que está sendo sustentado, a equação diferencial possui coeficientes constantes, e a solução pode ser dada por uma combinação linear de funções elementares. Mas se os parâmetros de fundação variam, a equação diferencial na maioria dos casos não pode ser resolvida de maneira exata, e técnicas numéricas devem ser utilizadas.

Em Serebrenick (2004) observamos como foi analisada a estabilidade de colunas em uma fundação elástica, usando uma formulação não-linear.

A maioria dos modelos de base elástica encontrados na literatura é obtida a partir da especialização da expressão:

$$p = kw + k_1 w_{,xx} + k_2 w_{,xxx}, \quad (3.40)$$

onde  $p$  representa a força exercida pela fundação sobre o elemento.

Pode-se ter ainda o caso de fundações com um comportamento não-linear, onde pode haver, ganho ou perda de rigidez, à medida que aumentamos os deslocamentos verticais. Nestes casos a parte não-linear da reação da base elástica sobre a estrutura tem sido geralmente expressa por um termo cúbico em  $w$ , e tem-se então:

$$p = kw + k_1 w_{,xx} + k_2 w_{,xxx} \pm 2k_3 w^3. \quad (3.41)$$

O sinal positivo na expressão acima corresponde a uma base elástica com ganho de rigidez (*hardening foundation*), e o sinal negativo a uma base elástica com perda de rigidez (*softening foundation*).

Na tabela são apresentados os modelos de base elástica mais usados na literatura e são definidas dentre as constantes  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), usados em (3.41), as que caracterizam cada um dos modelos.

No modelo de Filolenko-Borodich considera-se uma membrana elástica sobre as molas, sendo então, a constante  $k_1$  o valor da tensão exercida nesta membrana. No modelo de Hetényi, a constante  $k_2$  é o coeficiente de rigidez do elemento. E no modelo de Pasternak a constante  $k_1$  representa a força cortante existente entre os elementos verticais.

Na tabela 1 temos a especificação de cada modelo de fundação:

Modelos	Constantes da fundação
Winkler	$k \neq 0$ $k_1, k_2, k_3 = 0$
Filolenko-Borodich	$k \text{ e } k_1 \neq 0$ $k_2 \text{ e } k_3 = 0$
Hetényi	$k \text{ e } k_2 \neq 0$ $k_1 \text{ e } k_3 = 0$
Pasternak	$k \text{ e } k_1 \neq 0$ $k_2 \text{ e } k_3 = 0$
Fundação Generalizada	$k \neq 0$ $k_1, k_2, k_3 = 0$
Reissner	$k \text{ e } k_1 \neq 0$ $k_2 \text{ e } k_3 = 0$

Tabela 3.1 – Modelos de Fundação

No nosso estudo usamos o princípio do modelo de Winkler, porém com uma modificação na sua formulação, considerando uma angulação nas deformações. Nesse caso a constante  $k$  é multiplicada por um fator, o qual fornece um ângulo formado pelas molas, ficando a expressão da pressão fica da seguinte forma:

$$p = \frac{k a z r'}{\lambda_1}. \quad (3.42)$$

Para incluirmos o efeito da base elástica no problema, basta incorporar a força correspondente. Tomando  $k$  como sendo a constante elástica da base, temos algumas mudanças nas formulações numéricas anteriores.



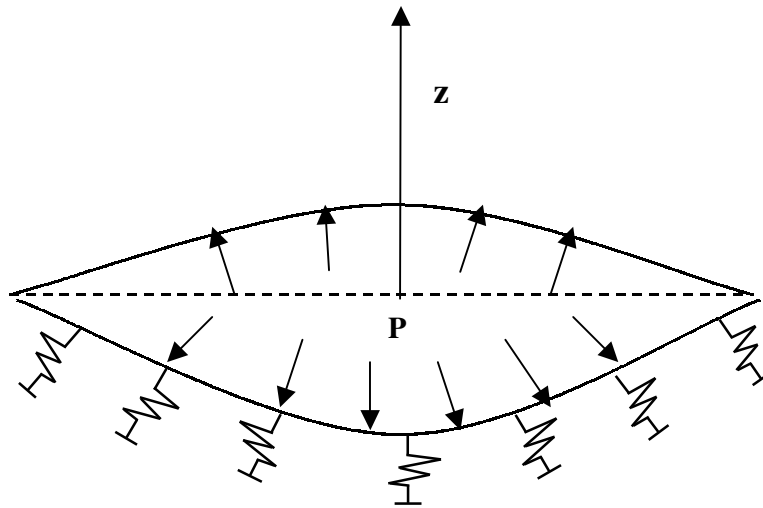


Figura 3.6 - Pressão dentro do expansor

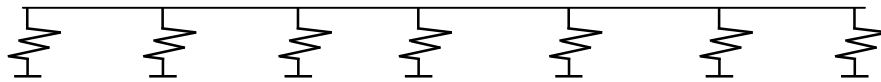


Figura 3.7 - Base elástica

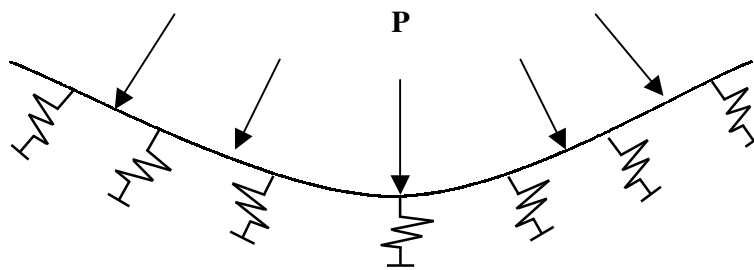


Figura 3.8 - Base elástica implementada

### 3.6.1. Equações de equilíbrio da membrana sobre base elástica

As equações ficam da seguinte maneira, substituindo-se o  $P$  da equação (3.34) por  $p$ , que é descrito pela equação (3.42):

$$G = \frac{\lambda_1^2}{W_1} \left( -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \left( P - \frac{kazr'}{\lambda_1} \right)}{H} + \frac{z'}{r\lambda_1} \lambda_2 W_2 \right)$$

$$F = \frac{\lambda_1}{W_{11}} \left[ \lambda_2' \left( \frac{W_1}{\lambda_2} - W_{12} \right) - \frac{r'}{r\lambda_1} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) \right]$$

Com o sistema de quatro equações:

$$r' = U$$

$$z' = V$$

$$r'' = U' = \frac{(r'F + z'G)}{\lambda_1^2}$$

$$z'' = V' = \frac{(z'F - r'G)}{\lambda_1^2}$$

As condições de contorno estão descritas na equação (3.38).