

3

O modelo da partícula pontual

No capítulo anterior, foi montado um panorama estrutural da LQG. Determinamos que o espaço de estados apropriado não é (ao menos a priori) um espaço de Hilbert, como de costume, e sim o *dual algébrico* de um espaço pré-Hilbert. Temos assim uma estrutura de “rigged Hilbert space” $\mathcal{E}^* \supset \bar{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$, em que $\mathcal{E}^*$ não está necessariamente dotado de um produto interno. No capítulo 2, a invariância por difeomorfismos possibilitou definir um produto interno físico num subespaço de funcionais que adotamos como estados físicos, mas este produto interno não admite extensão ao espaço dual inteiro. No presente capítulo, temos uma métrica fixa e portanto nem ao menos faz sentido invocar a noção de invariância por difeomorfismos; portanto, teremos que considerar como “estados” elementos de um espaço sem produto interno.

Nosso interesse principal neste capítulo é o de como investigar propriedades deste tipo de estados, numa situação em que a atitude canônica da QM (baseada em tomar produtos internos como valores esperados) não pode ser aplicada diretamente. Em particular, desejamos definir propriedades estatísticas de tais estados (como expectâncias e variâncias de certos operadores) e, com base nisso, obter definições razoáveis do que constituiriam estados “semiclássicos”. Vamos abordar este problema no contexto de uma teoria mais simples – a partícula pontual em uma dimensão.

3.1

A representação de Schrödinger

Normalmente se toma o espaço de estados para o sistema de uma partícula pontual como sendo $\mathcal{H}_{\text{Sch}} = L^2(\mathbf{R}, dx)$. Ao invés de definir de imediato os operadores correspondentes aos observáveis posição e momento, vamos começar por definir uma álgebra abstrata que possui uma ação bem-definida sobre $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$ inteiro. Trata-se da *álgebra de Weyl-Heisenberg*, que codifica toda a dinâmica do sistema. Esta é a álgebra (complexa) $\mathbf{W}$ com geradores $\{W(\zeta), \zeta \in \mathbf{C}\}$, munida do produto e involução

$$\begin{aligned} W(\zeta_1)W(\zeta_2) &= e^{\frac{i}{2}\text{Im}(\zeta_1\bar{\zeta}_2)} W(\zeta_1 + \zeta_2) \\ W(\zeta)^\star &= W(-\zeta) \end{aligned}$$

Note que $\mathbf{W}$ contém dois grupos a um parâmetro (real), a saber, os grupos $U(\lambda) = W(\lambda d)$, $V(\mu) = W(i\mu/d)$.¹

(d é uma constante de escala que podemos fixar arbitrariamente.) Vê-se facilmente que qualquer elemento de $\mathbf{W}$ pode ser expresso de forma única como $W(\lambda d + i\mu/d) = e^{\frac{i}{2}\lambda\mu} U(\lambda)V(\mu)$. Ademais, estes elementos satisfazem $U(\lambda)V(\mu) = e^{-i\lambda\mu} V(\mu)U(\lambda)$.

A álgebra $\mathbf{W}$ é representada em $\mathcal{H}_{\text{Sch}} = L^2(\mathbf{R}, dx)$ pelos operadores

$$\begin{aligned} (\hat{U}(\lambda)\psi)(x) &= e^{i\lambda x} \psi(x) \\ (\hat{V}(\mu)\psi)(x) &= \psi(x + \mu) \\ (\hat{W}(\lambda d + i\mu/d)\psi)(x) &= \left(e^{\frac{i}{2}\lambda\mu} \hat{U}(\lambda)\hat{V}(\mu)\psi \right)(x) \\ &= e^{\frac{i}{2}\lambda\mu} e^{i\lambda x} \psi(x + \mu) \end{aligned}$$

Vemos que estes operadores são todos unitários. De fato, esta representação de $\mathbf{W}$ em $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$ é unitária e irredutível.

Como os grupos unitários de operadores $\hat{U}(\lambda)$, $\hat{V}(\mu)$ são fracamente contínuos², o Teorema de Stone garante a existência de operadores auto-adjuntos $\hat{q}$, $\hat{p}$ tais que

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda) &= e^{i\lambda\hat{q}} \\ \hat{V}(\mu) &= e^{i\mu\hat{p}} \end{aligned}$$

¹É simples verificar que estes de fato são grupos a um parâmetro considerando-se a involução $\star$ como inversa, ou seja, que

$$\begin{aligned} U(\lambda)^\star &= U(-\lambda), \quad U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \\ V(\mu)^\star &= V(-\mu), \quad V(\mu_1)V(\mu_2) = V(\mu_1 + \mu_2) \end{aligned}$$

²Diz-se que $\hat{U}(\lambda)$ é *fracamente contínuo* se a aplicação $\lambda \mapsto (\psi, \hat{U}(\lambda)\psi)$ é contínua para todo ψ . Em particular, diz-se que $\hat{U}(\lambda)$ é *fortemente contínuo* se $\lambda \mapsto \hat{U}(\lambda)\psi$ for contínua para todo ψ .

Agora é evidente, pela forma de $\hat{U}$, que $(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x)$. Fora isso, para ϕ analítica,

$$\begin{aligned} (e^{i\mu\hat{p}}\psi)(x) &= \psi(x + \mu) \\ &= \sum_n \frac{\mu^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \psi(x) \\ &= e^{\mu \frac{d}{dx}} \psi(x) \end{aligned}$$

Assim, $\hat{p}$ é uma extensão do operador $-i\frac{d}{dx}$ (definido apenas no espaço das funções deriváveis) para um subespaço denso de $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$.

Note que $\hat{q}$ não possui autofunções não-triviais. De fato, as únicas soluções de $x\psi(x) = \alpha\psi(x)$ são distribucionais: $\psi(x) = C\delta(x - \alpha)$, que não pertencem ao espaço de estados.

Lembramos que, se $\psi(x)$ pertence a $L^2(\mathbf{R}, dx)$, sua transformada de Fourier $\psi(k) = \int \psi(x) e^{-ikx} dx$ pertence a $L^2(\mathbf{R}, dk)$. Podemos assim considerar igualmente elementos $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$ como funções do momento ou “número de onda” k , ao invés da coordenada x . Escritos nessa forma, é fácil verificar que os operadores são

$$\begin{aligned} (\hat{q}\psi)(k) &= i \frac{d}{dk} \psi(k) \\ (U(\lambda)\psi)(k) &= \psi(k - \lambda) \\ (\hat{p}\psi)(k) &= k\psi(k) \\ (V(\mu)\psi)(k) &= e^{i\mu k} \psi(k) \end{aligned}$$

3.2

A representação “polímero”

Nesta seção, vamos construir outra representação irredutível da álgebra de Weyl-Heisenberg, e demonstraremos que *não* é unitariamente equivalente à representação de Schrödinger vista antes.³ O espaço de Hilbert desta representação será construído de forma exatamente análoga à construção feita no

³O teorema de Stone-von Neumann garante que toda representação irredutível de $\mathbf{W}$ é equivalente à representação de Schrödinger, *contanto que* os operadores sejam fracamente contínuos no parâmetro ζ . Como veremos, isto não será verdade.

capítulo anterior, em termos de funções cilíndricas. A maior simplificação neste caso é que aqui não temos que lidar com questões de invariância de gauge.

Defina um *grafo* γ como sendo um conjunto enumerável de pontos $\{x_i\} \subset \mathbf{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades: (1) $\{x_i\}$ não contém subsequências com pontos de acumulação em $\mathbf{R}$; (2) existem constantes ℓ_γ, ρ_γ tais que cada intervalo I de comprimento $\ell(I) \geq \ell_\gamma$ contém no máximo $\rho_\gamma \ell(I)$ pontos de $\{x_i\}$. O motivo destas duas condições técnicas ficará claro mais à frente.

Seja Cyl_γ o espaço de funções complexas da forma

$$f(k) = \sum_j f_j e^{-ix_j k}$$

onde $x_j \in \gamma$ e os f_j são números complexos tais que $\sum_j |f_j|^2 < \infty$. Estas “funções cilíndricas” em $\mathbf{R}$ são somas *discretas* de ondas planas no espaço de momento, e logo não pertencem a $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$. Agora tome $\text{Cyl} = \bigcup_\gamma \text{Cyl}_\gamma$, o espaço de todas as funções cilíndricas. Este espaço possui como base o conjunto *não-enumerável* $\{|x\rangle = k \mapsto e^{-ixk}\}_{x \in \mathbf{R}}$. Podemos introduzir um produto interno em Cyl pedindo que esta base seja ortonormal: $\langle x_1 | x_2 \rangle = \delta_{x_1 x_2}$. (Note que este é o δ de Kronecker, e não o de Dirac!) Seja $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ o complemento de Cyl em relação a este produto interno. (De fato, $\mathcal{H}_{\text{Poly}} = L^2(\mathbf{R}, d\mu_d)$, onde equipamos a reta real $\mathbf{R}$ com a topologia discreta e com a medida discreta μ_d .⁴)

Agora podemos definir a ação da álgebra de Weyl-Heisenberg $\mathbf{W}$ em $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ da mesma forma que fizemos para funções do momento:

$$\begin{aligned} (\hat{U}(\lambda) f)(k) &= f(k - \lambda) \\ (\hat{V}(\mu) f)(k) &= e^{i\mu k} f(k) \end{aligned}$$

Ou, escrevendo em termos da base de “kets” $\{|x\rangle\}$,

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda) |x\rangle &= e^{-ix(k-\lambda)} \\ &= e^{i\lambda x} |x\rangle \\ \hat{V}(\mu) |x\rangle &= e^{i(x+\mu)k} \\ &= |x + \mu\rangle \end{aligned}$$

⁴Obtém-se a topologia discreta definindo quaisquer conjuntos como sendo abertos. A medida discreta é simplesmente a medida de contagem, f é integrável se $\sum_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| < \infty$, e nesse caso $\int_A f d\mu_d = \sum_{x \in A} f(x)$.

Claramente estes são operadores unitários. Como ocorria em $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$, o grupo unitário $\hat{U}(\lambda)$ é fortemente contínuo - e, em particular, fracamente contínuo. Portanto, existe um operador auto-adjunto $\hat{q}$ tal que $\hat{U}(\lambda) = e^{i\lambda\hat{q}}$, e evidentemente $\hat{q}|x\rangle = x|x\rangle$. Note que, enquanto em $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$ os autovetores de $\hat{q}$ são distribuições de Dirac, e portanto não são elementos do espaço de Hilbert, aqui os próprios $|x\rangle$ são autovetores de norma 1.

Para o grupo $\hat{V}(\mu)$, no entanto, a situação é outra. De fato, se $\mu \neq 0$, temos $\langle x|x+\mu\rangle = 0$, donde $\lim_{\mu \rightarrow 0} \langle x|\hat{V}(\mu)|x\rangle = 0$, enquanto que $\langle x|\hat{V}(0)|x\rangle = \langle x|x\rangle = 1$. Portanto, este grupo não é fracamente contínuo em $\mu = 0$, e logo não corresponde à exponencial de nenhum operador auto-adjunto $\hat{p}$. (Logo, o teorema de Stone-Von Neumann não vale, e de fato as duas representações de $\mathbf{W}$ são genuinamente não-equivalentes. Isto é evidente pois, se fossem equivalentes, haveria uma transformação unitária levando uma álgebra de operadores fracamente contínua em outra, descontínua ao longo da reta $\zeta = \lambda + 0\mu$.) Em outras palavras, o operador momento $-i\frac{d}{dx}$ não está disponível em $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$, o que traduz exatamente o fato de trabalharmos num espaço com topologia discreta: apesar de qualquer valor de x ser admitido em $\mathbf{R}_d$, não existem “pontos arbitrariamente próximos” de x , e logo não há “transformações infinitesimais”.

3.3

A relação entre representações

A representação de Schrödinger codifica o que é geralmente considerado como o “comportamento correto” esperado para uma partícula pontual na mecânica quântica. Portanto, não há nenhuma utilidade em obter uma representação genuinamente não-equivalente da álgebra de Weyl-Heisenberg se não for possível recuperar este comportamento na nova representação. Faremos isto nesta seção.

Lembramos que, no capítulo anterior, descobrimos que o “lar natural” para os estados que nos interessavam era o dual algébrico do espaço das funções cilíndricas, que admitia uma ação natural, por dualidade, dos operadores de interesse. Vamos fazer o mesmo aqui: seja Cyl^* o espaço dos funcionais lineares complexos $\sigma : f \mapsto \langle \sigma | f \rangle$. $\mathbf{W}$ age em Cyl^* por

$$\left[\langle \sigma | \hat{W}(\zeta) \right] |f\rangle = \langle \sigma | \left[\hat{W}(\zeta)^* |f\rangle \right]$$

Por motivos que veremos mais à frente, para entender como a mecânica do sistema surge em Cyl^* , bastará codificar o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$, o espaço (denso em $\mathcal{H}_{\text{Sch}}$) das funções ψ para as quais existem constantes C_n tais que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |x^n \frac{d^n \psi}{dx^n}(x)| \leq C_n \forall n \quad (3-1)$$

Somos levados a considerar a imersão natural $Q : \mathcal{S} \rightarrow \text{Cyl}^*$, associando a ψ o funcional linear $Q\psi$ que age nos “kets” $|x\rangle$ por:

$$\langle Q\psi | x \rangle = \overline{\psi(x)}$$

Devemos então mostrar que $Q\psi$ é bem-definido, ou seja, que $|\langle Q\psi | f \rangle| < \infty$ para qualquer $f \in \text{Cyl}$. Ora, qualquer função cilíndrica se escreve como $|f\rangle = \sum_j f_j |x_j\rangle$, e portanto

$$\langle Q\psi | \left[\sum_j f_j |x_j\rangle \right] = \sum_j \overline{\psi(x_j)} f_j$$

Lembramos que existem constantes ℓ_γ, ρ_γ tais que cada intervalo I de comprimento $\ell(I) \geq \ell_\gamma$ contém no máximo $\rho_\gamma \ell(I)$ pontos de γ . Assim, se particionarmos a reta em intervalos de comprimento ℓ_γ – especificamente, da forma $I_n = [n \ell_\gamma, (n+1) \ell_\gamma)$ – então cada intervalo contém no máximo $\rho_\gamma \ell_\gamma$ pontos do grafo. Assim, podemos reordenar os pontos de γ como $x_{n,k}$, onde $k \leq \rho_\gamma \ell_\gamma$.

Como f é cilíndrica, temos $\sum_j |f_j|^2 < \infty$. Escrevendo $|f\rangle = \sum_{n,k} f_{n,k} |x_{n,k}\rangle$, isto implica a existência de N tal que, para todo intervalo I_n com $|n| > N$, $|f_{n,k}| < 1$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\langle Q\psi | f \rangle| &= \left| \sum_{n,k} \overline{\psi(x_{n,k})} f_{n,k} \right| \\ &\leq \sum_{n,k} |\psi(x_{n,k})| |f_{n,k}| \\ &= \sum_{\substack{n,k \\ |n| < N}} |\psi(x_{n,k})| |f_{n,k}| + \sum_{\substack{n,k \\ |n| \geq N}} |\psi(x_{n,k})| |f_{n,k}| \end{aligned}$$

O primeiro somatório acima é finito, portanto igual a uma constante C . Fora isso, a condição de Schwartz (3.1) implica (6) a existência de M tal que

$$(1 + x^2) |\psi(x)| < M$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
|\langle Q\psi | f \rangle| &\leq C + \sum_{\substack{n,k \\ |n| \geq N}} |\psi(x_{n,k})| |f_{n,k}| \\
&< C + \sum_{\substack{n,k \\ |n| \geq N}} |\psi(x_{n,k})| \\
&< C + \sum_{\substack{n,k \\ |n| \geq N}} \frac{M}{1+x_{n,k}^2}
\end{aligned}$$

Ora, em cada I_n , como $k \leq \rho_\gamma \ell_\gamma$ e $x_{n,k} \geq x_{n,0}$, temos $\sum_k \frac{M}{1+x_{n,k}^2} \leq \rho_\gamma \ell_\gamma \frac{M}{1+x_{n,0}^2}$; fora isso, $x_{n,0} > n\ell_\gamma$, e portanto

$$\begin{aligned}
|\langle Q\psi | f \rangle| &< C + \sum_{|n| \geq N} \rho_\gamma \ell_\gamma \frac{M}{1+x_{n,0}^2} \\
&\leq C + \rho_\gamma \ell_\gamma M \sum_{|n| \geq N} \frac{1}{1+n^2 \ell_\gamma^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

3.4

Estados coerentes no espaço dual

Na mecânica quântica, não é possível obter estados para os quais possamos especificar com precisão arbitrária os valores dos observáveis – em particular, o Princípio da Incerteza garante que os produtos das incertezas nos operadores básicos (por exemplo, $\hat{q}$ e $\hat{p}$) será no mínimo $\hbar/2$. É interessante investigar se o produto $(\Delta\hat{q})(\Delta\hat{p})$ pode ser minimizado. Para ser específico, se tomarmos um ponto no espaço de configurações (x_0, p_0) e definirmos uma escala de comprimento d , podemos procurar um estado cujos valores esperados de posição e momento sejam (x_0, p_0) e cujas incertezas valham $\Delta\hat{q} = \frac{d}{\sqrt{2}}$ e $\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d}$. Uma classe de estados que satisfazem isto é dada pelos chamados *estados coerentes* (para o oscilador harmônico⁵), ou seja, soluções da equação

$$\left(\hat{q} + i \frac{d^2}{\hbar} \hat{p} \right) \psi = \left(x_0 + i \frac{d^2}{\hbar} p_0 \right) \psi$$

ou, explicitamente, $\psi_{\zeta_0}(x) = C \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2} + ik_0(x-x_0) \right)$, onde $k_0 = p_0/\hbar$ é o número de onda e $\zeta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}d}x_0 + i\frac{d}{\sqrt{2}}k_0$. Podemos reescrever a equação acima

⁵Eles são assim chamados porque sua evolução temporal sob o hamiltoniano do oscilador harmônico reflete exatamente o movimento clássico.

como

$$\hat{a} \psi = \zeta_0 \psi \quad (3.2)$$

onde $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2d}} \left(\hat{q} + i \frac{d^2}{\hbar} \hat{p} \right)$ é chamado *operador de aniquilação*.

Como $\psi_{\zeta_0} \in \mathcal{S}$, este estado define um elemento σ_{ζ_0} de Cyl^* . Vamos mostrar que a solução da equação equivalente, em Cyl^* , a (3.2) é exatamente este σ_{ζ_0} .

Como vimos, o operador $\hat{p}$ não está definido em Cyl , e tampouco em Cyl^* . Logo, devemos reformular a equação apenas em termos de $\hat{x}$ e dos $\hat{V}(\mu)$. Para fazer isto, iremos exponenciar o operador $\hat{a}$, multiplicado por uma constante arbitrária. Usando a identidade de Baker-Hausdorff-Campbell, $e^x e^y = e^{x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\dots}$ (onde os “...” são termos que envolvem apenas comutadores de ordem 2 ou mais alta em x, y), e lembrando que $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$ (e logo os comutadores de ordem 2 em $\hat{q}, \hat{p}$ são todos nulos), obtemos

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{2}\alpha \hat{a}} \psi &= e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q} + i \frac{\alpha d}{\hbar} \hat{p}} \psi \\ &= e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} e^{i \frac{\alpha d}{\hbar} \hat{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \hat{I}} \psi \\ &= e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} \hat{V}(\alpha d) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \psi \end{aligned}$$

Logo, podemos tomar a ação (adjunta) em Cyl^* do operador definido acima, para obter uma equação supostamente equivalente a (3.2):

$$e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} \hat{V}(-\alpha d) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sigma_{\zeta_0} = e^{\sqrt{2}\alpha \bar{\zeta}_0} \sigma_{\zeta_0}$$

Aplicando ambos os lados da equação a um “ket” arbitrário $|x\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} \hat{V}(-\alpha d) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sigma_{\zeta_0} | x \rangle &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \langle e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} \hat{V}(-\alpha d) \sigma_{\zeta_0} | x \rangle \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \langle e^{\frac{\alpha}{d} \hat{q}} \sigma_{\zeta_0} | x - \alpha d \rangle \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{\frac{\alpha}{d} x} \langle \sigma_{\zeta_0} | x - \alpha d \rangle \\ &= e^{\sqrt{2}\alpha \bar{\zeta}_0} \langle \sigma_{\zeta_0} | x \rangle \end{aligned}$$

Portanto, a função $\sigma_{\zeta_0}(x) = \langle \sigma_{\zeta_0} | x \rangle$ satisfaz

$$\sigma_{\zeta_0}(x + \alpha d) = \exp \left(\sqrt{2}\alpha \bar{\zeta}_0 - \frac{\alpha x}{d} + \frac{\alpha^2}{2} \right) \sigma_{\zeta_0}(x)$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha}{d}(x_0 - x) - i\alpha d k_0 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \sigma_{\zeta_0}(x)$$

Em particular, tomando $x = 0$ e $\alpha = \frac{y}{d}$ e completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta_0}(y) &= C \exp\left(\frac{yx_0}{d^2} - iyk_0 - \frac{y^2}{2d^2}\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{(y - x_0)^2}{2d^2} - i(y - x_0)k_0\right) \exp\left(\frac{x_0^2}{2d^2} - ik_0x_0\right) \\ &= C' \exp\left(-\frac{(y - x_0)^2}{2d^2} - i(y - x_0)k_0\right) \end{aligned}$$

Portanto, temos $\langle \sigma_{\zeta_0} | x \rangle = \bar{\psi}_{\zeta_0}(x)$, ou seja, σ_{ζ_0} é exatamente o funcional de Cyl^* definido por ψ_{ζ_0} usando a imersão canônica Q . Isto nos dá motivos para crer que σ_{ζ_0} é semiclássico no mesmo sentido em que o estado coerente ψ_{ζ_0} o é, ou seja: é concentrado em (x_0, p_0) e minimiza o produto das incertezas. No entanto, Cyl^* não possui um produto interno, logo não sabemos *a priori* como calcular médias e incertezas. Na próxima seção veremos como contornar este problema.

3.5

“Shadow states”

Como vimos acima, gostaríamos de mostrar, em algum sentido, que o estado σ_{ζ_0} é concentrado em (x_0, p_0) , e que suas incertezas são pequenas. Para fazer isto, vamos definir uma “projeção” P do funcional $\langle \sigma |$ sobre um grafo γ , obtendo uma “sombra”, ou seja, um estado cilíndrico $|\sigma^{(\gamma)}\rangle \in \text{Cyl}_\gamma$.⁶ Vamos então mostrar que o conjunto de todas as sombras de $\langle \sigma |$ contém todas as informações necessárias para determinar as propriedades desejadas.

A projeção, no caso, é

$$\langle \sigma | P_\gamma = |\sigma^{(\gamma)}\rangle = \sum_{x \in \gamma} \overline{\langle \sigma | x \rangle} |x\rangle$$

O “ket” $|\sigma^{(\gamma)}\rangle$ define a sombra de $\langle \sigma |$ sobre o grafo γ no seguinte sentido: para qualquer $f \in \text{Cyl}_\gamma$, vale

⁶Podemos de fato considerar P como um operador linear definido em Cyl^* , com imagem $\text{Cyl} \subset \text{Cyl}^*$ (usando a imersão canônica); com esta definição, realmente $P^2 = P$, e portanto faz sentido dizer que este operador é uma projeção no sentido usual. Mas isto não será importante para o que vamos fazer; portanto, considere P simplesmente como uma aplicação de Cyl^* em Cyl .

$$\begin{aligned}
\langle \sigma^{(\gamma)} | f \rangle &= \left(\sum_{x \in \gamma} \langle \sigma | x \rangle \langle x | \right) \left(\sum_{y \in \gamma} f(y) | y \rangle \right) \\
&= \sum_{x \in \gamma} f(x) \langle \sigma | x \rangle \\
&= \langle \sigma | f \rangle
\end{aligned}$$

(Note que, no lado esquerdo, temos a ação de Cyl^* em Cyl , e, no direito, o produto interno em Cyl_γ .)

Agora vamos formalizar as noções que queremos investigar. Na formulação de Schrödinger, fixado um estado ψ , interpretamos a expressão $\frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ como sendo o valor esperado do operador $\hat{A}$ (denotado por $\mathbf{E}[\hat{A}]$), e a expressão $\mathbf{E}[\hat{A}^2] - \mathbf{E}[\hat{A}]^2$ como sendo a variância de $\hat{A}$ (sua raiz quadrada, o desvio padrão, é a incerteza, denotada $\Delta \hat{A}$). Gostaríamos de obter para a representação polímero expressões equivalentes para os observáveis de interesse – posição e momento.

Aqui já enfrentamos um primeiro problema: como demonstramos, ao observável p não corresponde nenhum operador autoadjunto. No entanto, podemos obter um operador que *aproxime* a ação do operador momento, da seguinte maneira. Suponha que houvesse um operador $\hat{p}$; então valeria

$$\begin{aligned}
\hat{V}(\mu) &= e^{i\mu\hat{p}} \\
&= \hat{I} + i\mu\hat{p} - \frac{\mu^2}{2}\hat{p}^2 + \dots \\
\hat{V}(-\mu) &= e^{-i\mu\hat{p}} \\
&= \hat{I} - i\mu\hat{p} - \frac{\mu^2}{2}\hat{p}^2 + \dots
\end{aligned}$$

Portanto, teríamos

$$\frac{1}{2i\mu} \left(\hat{V}(\mu) - \hat{V}(-\mu) \right) = \hat{p} + O(\mu)$$

Nossa estratégia então será selecionar um parâmetro μ_0 suficientemente pequeno, e utilizar como aproximação para $\hat{p}$ o operador

$$\hat{K}_{\mu_0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\mu_0} \left(\hat{V}(\mu_0) - \hat{V}(-\mu_0) \right)$$

Agora passamos à outra questão – a de quais serão nossas medidas de

valores esperados, ou seja, qual será o equivalente à expressão $\frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ se não possuímos um produto interno. Para resolver isso, note que as sombras $|\sigma^{(\gamma)}\rangle$ satisfazem $\langle \sigma | \hat{A} | \sigma^{(\gamma)} \rangle = \langle \sigma^{(\gamma)} | \hat{A} | \sigma^{(\gamma)} \rangle$, se e somente se $\hat{A}$ é um operador que deixa Cyl_γ invariante. Por outro lado, considere por exemplo um operador como $\hat{A}|x\rangle = |x + \mu\rangle$; então, com a definição usual de valor esperado, obteríamos 0 para toda sombra – dificilmente um resultado adequado. Motivados pela idéia de que a “informação física” está no estado físico σ em si (e cada sombra dá apenas informação parcial), nossa solução é considerar os shadow states como os “kets” correspondentes aos “bras” $\langle \sigma |$. Enunciamos, então:

Definição 1 Fixado um estado $\sigma \in \text{Cyl}^*$, para cada grafo γ definimos o γ -valor esperado e a γ -variância do operador $\hat{A}$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{A}] &= \frac{\langle \sigma | \hat{A} | \sigma^{(\gamma)} \rangle}{\|\sigma^{(\gamma)}\|^2} \\ (\Delta^{(\gamma)} \hat{A})^2 &= \mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{A}^2] - (\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{A}])^2 \end{aligned}$$

(É fácil verificar que, de fato, se Cyl_γ for invariante por $\hat{A}$, as expressões acima recuperam *exatamente* a expectância e variância usuais.)

Com esta definição, podemos definir uma noção adequada de semiclassicidade.

Definição 2 Dadas tolerâncias $\tau_q^{(i)}, \tau_p^{(i)} > 0$, para $i = 1, 2$, e uma família de grafos Γ , dizemos que um estado σ é Γ -semiclássico para (x_0, p_0) se, para qualquer grafo $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{q}] - x_0| &\leq \tau_q^{(1)} \\ (\Delta^{(\gamma)} \hat{q})^2 &\leq \tau_q^{(2)} \\ |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{K}_{\mu_0}] - p_0| &\leq \tau_p^{(1)} \\ (\Delta^{(\gamma)} \hat{K}_{\mu_0})^2 &\leq \tau_p^{(2)} \end{aligned}$$

Esta definição diz apenas que, num estado τ -semiclássico, a γ -expectância dos operadores correspondentes aos observáveis fundamentais é próxima dum certo valor clássico, e as γ -variâncias são pequenas.

Para os propósitos desta dissertação, vamos nos restringir a uma classe muito particular: a classe Γ_R de *grafos regulares* com espaçamento pequeno, ou seja, grafos da forma $\gamma = \{n\ell\}_{n \in \mathbf{Z}}$, $\ell \ll d$. Por suas propriedades de simetria e

periodicidade, os “shadow states” sobre grafos regulares são particularmente simples de manipular, e conseguimos obter formas fechadas para expressões que seriam intratáveis em casos mais gerais. Por outro lado, como admitimos espaçamentos arbitrariamente pequenos, acreditamos que esta classe fornece estrutura suficiente para obtermos resultados bastante gerais.

Neste momento, vamos considerar apenas o caso $\zeta_0 = 0$, deixando o caso geral para a seção seguinte. Nosso objetivo então é mostrar que o estado σ_0 obtido na seção anterior de fato é Γ_R -semiclássico para $(0, 0)$, com tolerâncias τ razoavelmente pequenas (especificamente, as expectâncias serão exatas e as variâncias serão iguais às variâncias do estado coerente correspondente, a menos de termos de ordem muito pequena na escala relevante).

O estado σ_0 tem uma forma particularmente simples:

$$\langle \sigma_0 | x \rangle = C \exp \left(-\frac{x^2}{2d^2} \right)$$

A sombra de σ_0 sobre um grafo regular γ será

$$\begin{aligned} |\sigma_0^\ell\rangle &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle \sigma_0 | n\ell \rangle |n\ell\rangle \\ &= C \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp \left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2} \right) |n\ell\rangle \end{aligned}$$

Vamos começar calculando a norma deste estado: como os $|n\ell\rangle$ são ortonormais entre si, temos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0^\ell | \sigma_0^\ell \rangle &= \bar{C} C \sum_{m \in \mathbf{Z}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp \left(-\frac{m^2 \ell^2}{2d^2} - \frac{n^2 \ell^2}{2d^2} \right) \langle m\ell | n\ell \rangle \\ &= |C|^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp \left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} \right) \end{aligned}$$

Como $\ell \ll d$, a exponencial decai muito lentamente com n , logo não podemos estimar o valor do somatório usando apenas os primeiros termos. Felizmente, podemos utilizar a fórmula 1 do apêndice B, obtendo

$$\langle \sigma_0^\ell | \sigma_0^\ell \rangle = |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d}{\ell} \sum_{m \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2}} = |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d}{\ell} \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})$$

onde usamos o fato de que $d \gg \ell$ para tomar apenas os termos $m = -1, 0, 1$.

Agora calcularemos a expectância e variância de $\hat{q}$. Para a primeira, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0 | \hat{q} | n\ell \rangle &= (n\ell) \langle \sigma_0 | n\ell \rangle \\ &= C (n\ell) \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2}\right)\end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0 | \hat{q} | \sigma_0^\ell \rangle &= \bar{C} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2}\right) \langle \sigma_0 | \hat{q} | n\ell \rangle \\ &= |C|^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2}\right) (n\ell)\end{aligned}$$

Sendo ímpar, este somatório vale zero, e portanto $\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{q}] = \frac{\langle \sigma_0 | \hat{q} | \sigma_0^\ell \rangle}{\|\sigma_0^\ell\|^2} = 0$.

A maioria das contas que faremos no restante deste capítulo seguirá este modelo, e portanto nos absteremos de fornecer todos os detalhes. Seguimos calculando a variância de $\hat{q}$. Vê-se que

$$\langle \sigma_0 | \hat{q}^2 | \sigma_0^\ell \rangle = |C|^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2}\right) (n\ell)^2$$

Usando novamente a fórmula 1, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2}\right) (n\ell)^2 &= \frac{\sqrt{\pi} d^3}{2\ell} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left(1 - \frac{2\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi} d^3}{2\ell} 1 + 2 \left(1 - \frac{2\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \\ &\quad + O\left(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}\right)\end{aligned}$$

A variância de $\hat{q}$ é dada por

$$(\Delta^{(\ell)} \hat{q})^2 = \frac{\langle \sigma_0 | \hat{q}^2 | \sigma_0^\ell \rangle}{\|\sigma_0^\ell\|^2} - \left(\frac{\langle \sigma_0 | \hat{q} | \sigma_0^\ell \rangle}{\|\sigma_0^\ell\|^2} \right)^2$$

Ora, o segundo termo vale zero, e logo, usando $\frac{1}{1+A} = 1 - A + O(A^2)$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta^{(\ell)} \hat{q})^2 &= \frac{d^2}{2} \frac{1 + 2 \left(1 - \frac{2\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})}{1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})} \\
&= \frac{d^2}{2} \left(1 - 4 \frac{\pi^2 d^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right)\right) + O(e^{-\frac{2\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\
&\leq \frac{d^2}{2} + O(e^{-\frac{2\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a expectância de $\hat{K}_{\mu_0}$. Vemos primeiramente que

$$\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu) | n\ell \rangle = \exp\left(-\frac{(n\ell - \mu)^2}{2d^2}\right)$$

logo, reorganizando os termos,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu) | \sigma_0^\ell \rangle &= |C|^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2}\right) \exp\left(-\frac{(n\ell - \mu)^2}{2d^2}\right) \\
&= |C|^2 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2d^2}\right) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} + \frac{n\ell\mu}{d^2}\right)
\end{aligned}$$

Usando novamente a fórmula 1, temos

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} + \frac{n\ell\mu}{d^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \exp\left(\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{i\mu\pi m}{\ell}\right)$$

Inserindo de volta na equação, temos

$$\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu) | \sigma_0^\ell \rangle = |C|^2 \exp\left(-\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{i\mu\pi m}{\ell}\right)$$

Desta expressão vemos que $\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu) | \sigma_0^\ell \rangle = \langle \sigma_0 | \hat{V}(-\mu) | \sigma_0^\ell \rangle$, donde

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_0 | \hat{K}_{\mu_0} | \sigma_0^\ell \rangle &= \frac{1}{2i\mu_0} \left(\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu_0) | \sigma_0^\ell \rangle - \langle \sigma_0 | \hat{V}(-\mu_0) | \sigma_0^\ell \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}] = 0$. Falta calcular a variância $(\Delta^{(\ell)} \hat{K}_{\mu_0})^2 = \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}^2]$.

Mas

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\mu_0}^2 &= \left(\frac{1}{2i\mu_0} \right)^2 (\hat{V}(\mu_0) - \hat{V}(-\mu_0))^2 \\ &= -\frac{1}{4\mu_0^2} (\hat{V}(2\mu_0) - 2\hat{I} + \hat{V}(-2\mu_0))\end{aligned}$$

e logo

$$\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}^2] = \frac{1}{4\mu_0^2} \left(2 - \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(2\mu_0)] - \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(-2\mu_0)] \right)$$

Então basta calcular $\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(\mu)]$ para μ arbitrário. Tomando novamente apenas os termos $m = -1, 0, 1$, temos

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0 | \hat{V}(\mu) | \sigma_0^\ell \rangle &= |C|^2 \exp\left(-\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{i\mu\pi m}{\ell}\right) \\ &= |C|^2 \exp\left(-\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \cos\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right) \right) \\ &\quad + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})\end{aligned}$$

e assim temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(\mu)] &= \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \cos\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right) \right)}{\frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \right)} + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ &= \exp\left(-\frac{\mu^2}{4d^2}\right) \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \left(\cos\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right) - 1 \right) \right) \\ &\quad + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})\end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}^2] &= \frac{1}{2\mu_0^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{d^2}\right) \left(1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}\right) \left(\cos\left(\frac{2\mu_0\pi}{\ell}\right) - 1 \right) \right) \right) \\ &\quad + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})\end{aligned}$$

Como $\left| \cos \left(\frac{2\mu_0\pi}{\ell} \right) - 1 \right| \leq 2$, temos

$$\left| \exp \left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2} \right) \left(\cos \left(\frac{2\mu_0\pi}{\ell} \right) - 1 \right) \right| \leq \left| 2 \exp \left(-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2} \right) \right|$$

Dado que $d \gg \ell$, desprezamos este termo e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}^2] &= \frac{1}{2\mu_0^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\mu_0^2}{d^2} \right) \right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0^2} \left(1 - 1 + \frac{\mu_0^2}{d^2} + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^2}\right) \right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ &= \frac{1}{2d^2} + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^2}\right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \end{aligned}$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1 *O estado σ_0 é Γ_R -semiclássico para $(0, 0)$; especificamente, satisfaz*

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{q}] - 0| &= 0 \\ (\Delta^{(\gamma)}\hat{q})^2 &\leq \frac{d^2}{2} + O(e^{-\frac{2\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{K}_{\mu_0}] - 0| &= 0 \\ (\Delta^{(\gamma)}\hat{K}_{\mu_0})^2 &\leq \frac{1}{2d^2} + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^2}\right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \end{aligned}$$

Como foi prometido, as γ -variâncias são quase idênticas às variâncias do estado coerente correspondente, $(\Delta\hat{q})^2 = \frac{d^2}{2}$ e $(\Delta\hat{p})^2 = \frac{\hbar^2}{2d^2}$.

3.5.1

Estados coerentes gerais

Vamos agora estender a análise feita acima a estados gerais σ_{ζ_0} , com $\zeta_0 = \frac{x_0}{\sqrt{2d}} + \frac{idk_0}{\sqrt{2}}$. As técnicas usadas serão as mesmas, e os resultados similares, a menos de uma certa perda de precisão nas estimativas – com uma exceção importante, que será mostrada abaixo.

Como vimos, $\langle \sigma_{\zeta_0} | x \rangle = C \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2} - i(x-x_0)k_0 \right)$ e logo

$$\begin{aligned}
|\sigma_{\zeta_0}^\ell\rangle &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{\langle \sigma_{\zeta_0} | n\ell \rangle} |n\ell\rangle \\
&= \bar{C} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2d^2} - ix_0 k_0\right) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2} - n\ell \left(\frac{x_0}{d^2} + ik_0\right)\right) |n\ell\rangle
\end{aligned}$$

Logo, utilizando os resultados obtidos na seção anterior, a norma da sombra é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{\zeta_0}^\ell | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle &= |C|^2 e^{-\frac{x_0^2}{d^2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} - \frac{2n\ell x_0}{d^2}\right) \\
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} e^{-\frac{x_0^2}{d^2}} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{2ix_0 \pi m}{\ell}\right) \\
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} e^{-\frac{x_0^2}{d^2}} \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos\left(\frac{2x_0 \pi}{\ell}\right)\right) + O(e^{-\frac{4\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

Agora determinamos a expectância de $\hat{q}$. Começamos por

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{q} | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle &= \bar{C} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2d^2} - ix_0 k_0\right) \\
&\quad \times \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{2d^2} - n\ell \left(\frac{x_0}{d^2} + ik_0\right)\right) (n\ell) \langle \sigma_{\zeta_0} | n\ell \rangle \\
&= |C|^2 e^{-\frac{x_0^2}{d^2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (n\ell) \exp\left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} - \frac{2n\ell x_0}{d^2}\right) \\
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d^3}{2\ell^2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left(2\pi i m - \frac{2\ell x_0}{d^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} - \frac{2\pi i x_0 m}{\ell}\right) \\
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \left(x_0 \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\ell}\right)\right)\right) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{q}] &= \frac{x_0 \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\ell}\right)\right) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})}{1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\ell}\right)} \\
&= x_0 + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

Para determinar a variância de $\hat{q}$, calculamos

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{q}^2 | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle &= |C|^2 e^{-\frac{x_0^2}{d^2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (n\ell)^2 \exp \left(-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} - \frac{2n\ell x_0}{d^2} \right) \\
 &= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d^3}{2\ell} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left(1 - \frac{4\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} - \frac{4i\pi m x_0}{\ell} + \frac{2x_0^2}{d^2} \right) \\
 &\quad \times \exp \left(-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} - \frac{2\pi i x_0 m}{\ell} \right) \\
 &= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d}{\ell} \left(\left(x_0^2 + \frac{d^2}{2} \right) \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos \left(\frac{2x_0 \pi}{\ell} \right) \right) \right) \\
 &\quad + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\Delta^{(\ell)} \hat{q}) &= \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{q}^2] - \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{q}]^2 \\
 &= \frac{\left(x_0^2 + \frac{d^2}{2} \right) \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos \left(\frac{2x_0 \pi}{\ell} \right) \right) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})}{1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos \left(\frac{2x_0 \pi}{\ell} \right)} \\
 &\quad - \left(x_0 + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \right)^2 \\
 &= \frac{d^2}{2} + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
 \end{aligned}$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{V}(\mu) | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{\langle \sigma_{\zeta_0} | n\ell \rangle} \langle \sigma_{\zeta_0} | n\ell - \mu \rangle \\
 &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{C} e^{-\frac{(n\ell - x_0)^2}{2d^2} + ik_0(n\ell - x_0)} C e^{-\frac{(n\ell - x_0 - \mu)^2}{2d^2} - ik_0(n\ell - x_0 - \mu)} \\
 &= |C|^2 e^{-\frac{(x_0 - \mu)^2 + x_0^2}{2d^2} + ik_0 \mu} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{n^2 \ell^2}{d^2} + \frac{n\ell(2x_0 + \mu)}{d^2}} \\
 &= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d}{\ell} e^{-\frac{(x_0 - \mu)^2 + x_0^2}{2d^2} + ik_0 \mu} \sum_{m \in \mathbf{Z}} e^{\frac{(2x_0 + \mu)^2}{4d^2} - \frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{i(2x_0 + \mu)\pi m}{\ell}} \\
 &= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi} d}{\ell} e^{\frac{\mu^2}{4d^2} + ik_0 \mu} \sum_{m \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{\pi^2 m^2 d^2}{\ell^2} + \frac{i(2x_0 + \mu)\pi m}{\ell}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} e^{\frac{\mu^2}{4d^2} + ik_0\mu} \left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}} \cos \left(\frac{(2x_0 + \mu)\pi}{\ell} \right) \right) \\
&\quad + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

e com isso determinamos

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{K}_{\mu_0} | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle &= \frac{1}{2i\mu_0} \left(\langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{V}(\mu_0) | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle - \langle \sigma_{\zeta_0} | \hat{V}(-\mu_0) | \sigma_{\zeta_0}^\ell \rangle \right) \\
&= |C|^2 \frac{\sqrt{\pi}d}{\ell} \frac{1}{\mu_0} e^{\frac{\mu_0^2}{4d^2}} \sin(k_0\mu_0) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}] &= \frac{1}{\mu_0} e^{\frac{\mu_0^2}{4d^2}} \sin(k_0\mu_0) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\
&= k_0 + O(k_0^3\mu_0^4) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

Enquanto, que, para a variância de $\hat{K}_{\mu_0}$, novamente obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{K}_{\mu_0}^2] &= \frac{1}{4\mu_0^2} \left(2 - \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(2\mu_0)] - \mathbf{E}^{(\ell)}[\hat{V}(-2\mu_0)] \right) \\
&= \frac{1}{2\mu_0^2} \left(1 - e^{\frac{\mu_0^2}{d^2}} \cos(2k_0\mu_0) \right) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\
&= \frac{1}{2\mu_0^2} \left(1 - \left(1 + \frac{\mu_0^2}{d^2} + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^4}\right) \right) (1 - O(k_0^2\mu_0^2)) \right) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\
&= \frac{1}{2d^2} + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^4}\right) + O(k_0^2\mu_0^2) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})
\end{aligned}$$

e portanto

$$(\Delta^{(\ell)} \hat{K}_{\mu_0})^2 = \frac{1}{2d^2} - k_0^2 + O\left(\frac{\mu_0^4}{d^4}\right) + O(k_0^2\mu_0^2) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}})$$

Note aqui as diferenças entre este caso e o caso mais simples $\zeta_0 = 0$ visto anteriormente: aqui, só podemos garantir que a expectância e variância

de $\hat{K}_{\mu_0}$ se aproximam do valor canônico quando o produto $k_0\mu_0$ é pequeno. Felizmente, como o valor μ_0 é ele próprio pequeno, valores do número de onda grandes o suficiente para ameaçar esta estimativa já correspondem a estados com momento muito alto, onde o modelo não-relativístico de Schrödinger já não tem mais validade. Portanto, podemos enunciar o resultado desta seção:

Teorema 2 *Para k_0 suficientemente pequeno, o estado σ_{ζ_0} é Γ_R -semiclássico para (x_0, k_0) , satisfazendo*

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{q}] - x_0| &= O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ (\Delta^{(\gamma)}\hat{q})^2 &\leq \frac{d^2}{2} + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ |\mathbf{E}^{(\gamma)}[\hat{K}_{\mu_0}] - k_0| &= O(k_0^3 \mu_0^4) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \\ (\Delta^{(\gamma)}\hat{K}_{\mu_0})^2 &\leq \frac{1}{2d^2} - k_0^2 + O(\frac{\mu_0^4}{d^4}) + O(k_0^2 \mu_0^2) + O(e^{-\frac{\pi^2 d^2}{\ell^2}}) \end{aligned}$$