Rafael Kaufmann Nedal

Estados Semiclássicos na Gravidade Quântica

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. George Svetlichny

Rio de Janeiro
Março de 2006

Rafael Kaufmann Nedal

Estados Semiclássicos na Gravidade Quântica

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. George Svetlichny

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Sérgio Bernardo Volchan

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Francisco Carlos Pinheiro Nunes

Departamento de Física — UFRRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de Março de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rafael Kaufmann Nedal

Graduou-se em Matemática Aplicada na PUC-Rio. Em projeto de iniciação científica orientado pelo professor George Svetlichny, desenvolveu um modelo computacional de dinâmica molecular. Outros interesses incluem teoria da medição quântica, ciência cognitiva, nanotecnologia, linguagens de programação e sistemas operacionais.

Ficha Catalográfica

Nedal, Rafael Kaufmann

Estados Semiclássicos na Gravidade Quântica / Rafael Kaufmann Nedal; orientador: George Svetlichny. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 74 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Física Teórica. 3. Mecânica Quântica. 4. Relatividade Geral. I. Svetlichny, George. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus pais, que me apoiaram em todas as minhas escolhas e me aconselharam com sabedoria e amor.

Aos meus amigos e meu irmão, pelo companheirismo nos bons momentos e pelo encorajamento nas horas de dúvida.

Aos grandes professores com os quais tive a sorte de aprender.

Resumo

Nedal, Rafael Kaufmann; Svetlichny, George. **Estados Semiclássicos na Gravidade Quântica**. Rio de Janeiro, 2006. 74p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A teoria da gravidade quântica em laços ("loop quantum gravity" ou LQG) é atualmente uma das mais promissoras abordagens para descrever a relatividade geral em termos quânticos. Um dos problemas-chave é detectar na teoria quântica estados semiclássicos, que apresentem propriedades macroscópicas iguais às de configurações específicas da teoria clássica. Nesta dissertação, começamos apresentando o formalismo da LQG e sua interpretação física. Do ponto de vista matemático, a LQG pode ser pensada como uma quantização canônica de uma teoria de gauge de $SU(2)$ em uma 3-variedade. No entanto, diferentemente da abordagem usual, que gera uma representação apenas por operadores auto-adjuntos, a abordagem "polimérica" da LQG gera uma representação mista que usa operadores auto-adjuntos e unitários. Tomamos então um modelo "polimérico", análogo à LQG, do sistema físico mais simples: o movimento unidimensional de uma partícula pontual. Neste contexto, desenvolvemos um arcabouço que resolve o problema dos estados semiclássicos, que são estudados em detalhe. Finalmente, consideramos a quantização "polimérica" do campo eletromagnético livre, resultando numa teoria abeliana muito similar à LQG. Neste contexto, o mesmo arcabouço desenvolvido para o caso anterior pode ser aplicado.

Palavras-chave

Física Teórica. Mecânica Quântica. Relatividade Geral.

Abstract

Nedal, Rafael Kaufmann; Svetlichny, George. **Semiclassical states in quantum gravity**. Rio de Janeiro, 2006. 74p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Loop quantum gravity (LQG) is currently one of the most promising approaches to describing general relativity in quantum terms. One of its key issues is to detect in the quantum theory semiclassical states whose macroscopic properties are the same as those of specific configurations of the classical theory. In this dissertation, we begin by presenting the LQG formalism and its physical interpretation. From a mathematical point of view, LQG can be thought of as a canonical quantization of a $SU(2)$ gauge theory in a 3-manifold. However, whereas the usual approach generates a representation exclusively by self-adjoint operators, LQG's "polymer" approach generates a mixed representation using both self-adjoint and unitary operators. We then take a "polymer" model, analogous to LQG, of the simplest physical system: the one-dimensional movement of a point particle. In this context, we develop a framework that solves the problem of semiclassical states, which are studied in detail. Finally, we consider the "polymer" quantization of the free electromagnetic field, which results in an abelian theory which is very similar to LQG. In this context, it is possible to apply the same framework that was developed for the previous case.

Keywords

Theoretical Physics. Quantum Mechanics. General Relativity.

Sumário

1	Introdução	8
2	A gravidade quântica em laços	12
2.1	Introdução	12
2.2	A representação por laços	14
2.3	A ação do grupo de gauge	16
2.4	Redes de spin	18
2.5	Estados invariantes por difeomorfismos	21
2.6	Operadores	23
3	O modelo da partícula pontual	30
3.1	A representação de Schrödinger	30
3.2	A representação “polímero”	32
3.3	A relação entre representações	34
3.4	Estados coerentes no espaço dual	36
3.5	“Shadow states”	38
4	Estados semiclássicos para o caso $U(1)$	50
4.1	A representação de Fock	50
4.2	A representação por laços	54
4.3	Representações r -Fock	58
4.4	Redes de carga	62
4.5	O vácuo no espaço dual	63
4.6	Conclusão e comentários	66
A	A mecânica clássica da conexão	70
B	Expressões auxiliares	73