PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

3 As Equações de Navier-Stokes

Neste capítulo vamos deduzir as equações de Navier-Stokes a partir dos princípios físicos que governam a dinâmica dos fluidos:

1. A conservação da massa.
2. A segunda lei de Newton, $F = ma$.
3. A conservação da energia.

Resolveremos as equações de Navier-Stokes usando métodos numéricos. Esses métodos serão descritos posteriormente. Para deduzir as equações, primeiro estudaremos os modelos de fluxo e, a partir deles, encontrar relações, que serão expressas na forma de equações diferenciais.

3.1 Modelos de Fluxo

Esta seção faz referência aos modelos de fluxo usados na dedução das equações de Navier-Stokes.

3.1.1 Volume de Controle Finito

Considere um campo de fluxo, isto é, um campo vetorial possuindo todas as informações que descrevem um fluido durante um espaço de tempo. A um ponto x no espaço, e a um tempo fixo t, relacionamos as propriedades do fluido, tais como pressão, velocidade e temperatura.

Suponha um volume fechado $\tilde{V}$. Dentro de uma região finita desse campo, chamemos $\tilde{V}$ de volume de controle e definamos a superfície que cobre $\tilde{V}$ como superfície de controle S.

Podemos adotar um volume de controle movendo-se com o fluxo, de forma que as mesmas partículas sempre façam parte de $\tilde{V}$. Neste caso, estamos trabalhando com um modelo de fluxo de volume de controle finito que se move com o fluido, adotando um modelo com volume de controle fixo no espaço e com o fluido passando através dele. Neste caso, estamos trabalhando com um modelo de fluxo de volume de controle finito fixo no espaço.

As equações obtidas de modelo fixo no espaço são denominadas conservativas. As equações derivadas de modelo com volume que se move com o fluido são denominadas não-conservativas.

3.1.2
Elemento Infinitesimal de Fluido

Novamente tome um campo de fluxo. Imagine um elemento infinitesimal de fluido, com um volume $d\tilde{V}$, dentro do domínio do campo de fluxo. O elemento será infinitesimal, no mesmo sentido do cálculo diferencial.

Se o elemento infinitesimal estiver fixo no fluido, estamos trabalhando com um modelo de fluxo de elemento infinitesimal fixo no espaço. Caso contrário, com o elemento infinitesimal movendo-se junto do fluxo, com vetor velocidade $\mathbf{V}$ igual à velocidade do fluxo, estamos trabalhando com um modelo de elemento infinitesimal que se move com o fluido.

As equações obtidas de modelo fixo no espaço são denominadas conservativas. As equações derivadas de modelo com volume que se move com o fluido são denominadas não-conservativas.

3.2
A Derivada Material

Acatando como modelo de fluxo o do elemento infinitesimal, movendo-se junto do fluido e adotando os vetores unitários i, j e k ao longo dos eixos x, y e z, o campo vetorial de velocidades do modelo de fluxo é dado por:

$$\mathbf{V} = ui + vj + wk,$$

os componentes u, v e w da velocidade são:

$$u = u(x, y, z, t),$$
$$v = v(x, y, z, t) \text{ e}$$
$$w = w(x, y, z, t).$$

E o campo escalar da densidade

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

A propriedade densidade informa se a substância que compõe um corpo é mais, ou menos, compacta. Por definição, a densidade de um corpo é o quociente de sua massa pelo volume delimitado por sua superfície externa.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

Supondo que o elemento infinitesimal de fluido está localizado no ponto x_1 no tempo t_1, evidentemente a densidade desse elemento é

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

mais tarde, no tempo t_2 o mesmo elemento de fluido estará localizado no ponto x_2, cuja densidade é

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

expandindo em série de Taylor em torno do ponto x_1

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)(y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)(z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)(t_2 - t_1) + (\text{termos de ordem superior}).$$

Dividindo por $(t_2 - t_1)$ e ignorando os termos de ordem elevada, auferimos:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right). \quad (3\text{-}1)$$

Fisicamente, o lado esquerdo desta equação é a taxa de mudança de densidade do elemento infinitesimal de fluido, quando este se move do ponto x_1 para o ponto x_2.

Admitindo o limite quando t_2 aproxima-se de t_1

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{D\rho}{Dt},$$

nesta equação, $D\rho/Dt$ é um símbolo para a taxa instantânea de mudança de densidade do elemento de fluido no momento em que ele transpõe o ponto x_1. Definimos este símbolo como a *derivada material* D/Dt, advertindo que essa derivada é diferente de $\partial\rho/\partial t$, cujo significado físico é a taxa de variação da densidade no ponto x_1.

Observando também que

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u,$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v \text{ e}$$
$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$$

e assumindo o limite na equação (3-1)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (3\text{-}2)$$

Desta equação obtemos uma expressão para a derivada material, em coordenadas cartesianas

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (3\text{-}3)$$

nesse sistema coordenado, o operador ∇ é definido da seguinte forma

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (3\text{-}4)$$

diante disso, a equação (3-3) converte para

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla). \qquad (3\text{-}5)$$

Enfatizando, $\frac{D}{Dt}$ é a *derivada material* e refere-se à taxa de variação ao acompanharmos o elemento infinitesimal de fluido. Entretanto, $\frac{\partial}{\partial t}$ é a *derivada local* e faz referência à taxa de variação ao observar um ponto fixo no fluxo.

$\mathbf{V} \cdot \nabla$ é designada *derivada convectiva* e fisicamente representa a taxa de variação devido ao movimento do elemento de fluido, de uma posição a outra no campo de fluxo, onde as propriedades do fluxo são diferentes. A derivada material pode ser aplicada a qualquer variável do campo de fluxo, por exemplo, Dp/Dt onde p representa a pressão.

3.3
O Divergente da Velocidade

Investigaremos o divergente da velocidade $\nabla \cdot \mathbf{V}$, uma vez que este termo constantemente aparece em equações relativas à dinâmica de fluidos. Considerando o modelo de fluxo de volume de controle finito movendo-se junto do fluxo, o volume de controle comporta sempre as mesmas partículas e sua massa é fixa. Mas seu volume $\tilde{V}$ e a superfície de controle S irão variar com o tempo.

Considere-se um elemento infinitesimal da superfície dS, deslocando-se com a velocidade local $\mathbf{V}$. Esse movimento causa uma mudança no volume do corpo de controle $\Delta\tilde{V}$, que durante um intervalo de tempo Δt é igual ao volume do cilindro com base dS e altura $(\mathbf{V}\Delta t) \cdot n$, onde n é o vetor unitário perpendicular à superfície em $\mathbf{d}S$.

$$\Delta\tilde{V} = [(\mathbf{V}\Delta t) \cdot n]dS = (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{d}S. \qquad (3\text{-}6)$$

Definina-se o vetor $\mathbf{d}S$ como $\mathbf{d}S = ndS$. Com o incremento de tempo Δt, a variação total do volume de controle é igual à soma de $\Delta\tilde{V}$ sobre toda a superfície de controle. Permitimos o limite quando $dS \to 0$. A soma se torna

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

a seguinte integral de superfície

$$\int\int_S (\mathbf{V}\Delta t)\cdot \mathbf{d}S.$$

Dividindo esta integral por Δt, resulta a taxa de mudança no corpo de controle, denotada por $D\tilde{V}/Dt$.

$$\frac{D\tilde{V}}{Dt} = \frac{1}{\Delta t}\int\int_S (\mathbf{V}\Delta t)\cdot \mathbf{d}S = \int\int_S \mathbf{V}\cdot \mathbf{d}S. \tag{3-7}$$

Como estamos lidando com a taxa de variação do volume de controle enquanto este se move com o fluxo e, fisicamente, esse é o significado da derivada material, então, usamos a notação de derivada material de $\tilde{V}$. Aplicando o teorema do divergente do cálculo vetorial, obtemos

$$\frac{D\tilde{V}}{Dt} = \int\int\int_{\tilde{V}} (\nabla\cdot\mathbf{V})d\tilde{V}. \tag{3-8}$$

Considerando o volume de controle suficientemente pequeno e denotando-o por $\delta\tilde{V}$, permite-se que ele seja considerado um elemento infinitesimal de fluido deslocando-se junto do fluxo. Nesse caso, esta equação pode ser escrita como

$$\frac{D(\delta\tilde{V})}{Dt} = \int\int\int_{\delta\tilde{V}} (\nabla\cdot\mathbf{V})d\tilde{V}, \tag{3-9}$$

levando em consideração a pequena magnitude de $\delta\tilde{V}$ e interpretando $\nabla\cdot\mathbf{V}$ constante em todo $\delta\tilde{V}$. Essa equação integral converte para

$$\frac{D(\delta\tilde{V})}{Dt} = (\nabla\cdot\mathbf{V})\delta\tilde{V},$$

ou

$$(\nabla\cdot\mathbf{V}) = \frac{1}{\delta\tilde{V}}\frac{D(\delta\tilde{V})}{Dt}.$$

Ao lado esquerdo desta equação temos o divergente da velocidade, e do lado direito seu significado físico: a taxa de variação de volume de um elemento de fluido por unidade de volume.

3.4 Equação de Conservação de Massa

Nesta seção, aplicando o princípio físico da conservação de massa, deduziremos a equação da conservação de massa. A forma da equação depende diretamente do modelo de fluxo utilizado. Assim, subdividiremos esta seção em partes relativas ao modelo de fluxo que será usado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

3.4.1 Modelo do Volume de Controle Finito Fixo no Espaço

Encarando o modelo de volume de controle fixo em um campo de fluxo, temos que o fluido escoa, transpassando a superfície de controle. Sobre um ponto da superfície é definida a velocidade do fluxo $\mathbf{V}$ e o vetor $\mathbf{d}S$ e definimos $d\tilde{V}$ como um elemento infinitesimal de volume, dentro do volume de controle.

Empregando o princípio da conservação de massa ao volume de controle, temos que *a massa total deixando o volume de controle, passando pela superfície de controle S, é igual à taxa de decréscimo dentro do corpo de controle.*

A propósito, o fluxo de matéria que se desloca transversalmente por uma superfície fixa tem o seguinte valor: (densidade)×(área da superfície)×(componente da velocidade perpendicular à superfície), isto é, o fluxo sobre o elemento de superfície dS é

$$\rho \mathbf{V}_{\vec{n}}\, dS = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{d}S. \tag{3-10}$$

Adote-se $\mathbf{d}S$ com sentido para fora da superfície. Assim, enquanto o produto $\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{d}S$ for positivo, o fluido estará deixando o volume de controle. Se o produto for negativo, o fluxo estará penetrando no volume de controle.

O fluxo de massa total do volume de controle através da superfície de controle S é o montante de todos os fluxos de massa infinitesimais dS, que constitui a integral

$$\int\int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{d}S, \tag{3-11}$$

por outro lado, a massa contida no volume elementar de fluido $d\tilde{V}$ é $\rho d\tilde{V}$, diante deste fato, a massa total no interior do corpo de controle alcança o valor:

$$\int\int\int_{\tilde{V}} \rho d\tilde{V}.$$

Ora, a taxa de mudança de massa dentro de $\tilde{V}$ é

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\tilde{V}} \rho d\tilde{V},$$

utilizando o principio físico, é verdade que

$$\int\int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{d}S = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\tilde{V}} \rho d\tilde{V},$$

ou ainda melhor

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\tilde{V}} \rho + \int\int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{d}S = 0. \tag{3-12}$$

Esta equação é conhecida como *forma integral da equação de conservação de massa.* E como esta equação é deduzida de um modelo onde o volume de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

controle está fixo no espaço, ela está na *forma conservativa*.

3.4.2
Modelo do Volume de Controle Finito Movendo-se com o Fluido

Analisando um modelo de fluxo de volume de controle finito movendo-se com o fluxo, temos que esse corpo é composto sempre pelas mesmas partículas. Assim sendo, sua massa é constante e, ao mesmo tempo, sofre deformações.

Imaginando um elemento infinitesimal de volume $d\tilde{V}$ pertencente ao volume, a sua massa é $\rho d\tilde{V}$, onde ρ é a densidade. Assim, a massa total do volume de controle é

$$\int\int\int_{\tilde{V}} \rho \, d\tilde{V}. \tag{3-13}$$

Com o tempo o volume estará mudando, porém, a integral se mantém constante, empregando o significado da derivada material, ou seja, a mudança de uma propriedade combinada com o movimento do fluxo. O corpo de controle é constituído por inúmeros elementos infinitesimais de fluido, cuja massa é fixa, todos com a derivada material de suas massas constantes, iguais a zero. Concluímos que:

$$\frac{D}{Dt}\int\int\int_{\tilde{V}} \rho \, d\tilde{V} = 0. \tag{3-14}$$

Esta é a *equação integral de conservação de massa* em sua forma *não-conservativa*, pois é obtida com o modelo que se move com o fluido.

3.4.3
Modelo do Elemento Infinitesimal Fixo no Espaço

Encare-se como modelo de fluxo o modelo do elemento infinitesimal fixo no espaço e adote-se um sistema cartesiano de coordenadas, de modo que a densidade e velocidade sejam funções do espaço (x, y, z) e do tempo t e defina-se como dx, dy e dz os lados do elemento infinitesimal.

Se existe fluxo de matéria nesse elemento, e considerando as faces esquerda e direita, perpendiculares ao eixo x, a área dessas faces é $dy\ dz$. Assim sendo, o fluxo de massa pela face esquerda é

$$(\rho u)\ dy\ dz,$$

onde u é a componente x da velocidade.

Lembrando que a densidade e a velocidade são funções que se subordinam à posição espacial, o montante de matéria atravessando cada uma das faces será diferente, e a diferença entre os fluxos é $[\partial(\rho u)/\partial x]dx$. Por conseguinte, o fluxo de massa na face direita converte para

$$\{\rho u + [\partial(\rho u)/\partial x]dx\}dydz$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

e aproveitando o mesmo raciocínio para as faces frontal e traseira, perpendiculares ao eixo y, o fluxo de massa dessas faces é, respectivamente,

$$(\rho v)\ dx\ dz$$

$$\{\rho v + [\partial(\rho v)/\partial y]dy\}dxdz.$$

Congenericamente, para as faces inferior e superior, perpendiculares ao eixo z, obtém-se os fluxos de matéria

$$(\rho w)\ dx\ dy$$

$$\{\rho w + [\partial(\rho w)/\partial z]dz\}dxdy.$$

Pondere-se, ao tomar u, v e w positivos nas direções de x, y e z positivos; acolha-se como positivo o fluxo para fora do elemento infinitesimal; e apure-se que a quantidade de fluxo para fora do elemento na direção x é representado por

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right] dydz - (\rho u)dydz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz,$$

na direção y

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right] dxdz - (\rho v)dxdz = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydz$$

e em z

$$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\right] dxdy - (\rho w)dxdy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydz.$$

Imediatamente, o fluxo de massa deixando o elemento fica

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdydz. \tag{3-15}$$

Por outro lado, sua massa tem o montante $\rho(dxdydz)$ e a taxa de aumento de massa constituinte vale

$$\frac{\partial p}{\partial t}dxdydz. \tag{3-16}$$

Aproveitando o princípio da conservação de massa, o total de matéria ausentando-se do elemento é igual à taxa de declínio de massa. Denotando a massa como uma quantidade negativa, consegue-se:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dxdydz = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydz,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = 0 \text{ e}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \tag{3-17}$$

Esta é a *equação diferencial parcial da equação de conservação de massa.* Como o elemento está fixo no espaço, esta equação está na forma *conservativa.* Esta equação também pode ser obtida, de forma indireta, a partir da equação integral da conservação de massa.

3.4.4 Modelo do Elemento Infinitesimal Movendo-se com o Fluxo

Tomando o modelo de elemento de fluido infinitesimal que se move com o fluxo, observamos que sua massa será constante, mas o seu volume e formato irão mudar. Denominando δm a massa desse elemento e $\delta \tilde{V}$ o volume, é verdade que

$$\delta m = \rho \delta \tilde{V}.$$

lembrando que massa é constante durante o movimento do elemento e empregando o significado físico da derivada material, obtém-se

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = 0.$$

Imediatamente,

$$\frac{D(\rho \delta \tilde{V})}{Dt} = \delta \tilde{V} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\delta \tilde{V})}{Dt} = 0$$

e diante disso,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\delta \tilde{V}} \frac{D(\delta \tilde{V})}{Dt} \right] = 0.$$

O termo em colchetes pode ser substituído por $\nabla \cdot \mathbf{V}$, como observado na sessão sobre o divergente da velocidade. Nesse caso, vale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3-18}$$

Esta é a *equação diferencial da conservação de massa*, e como o modelo usado está em movimento com o fluxo, dizemos que esta equação está em sua forma *não-conservativa.*

3.5 A Equação do Momentum

A fim de deduzir a equação do momentum, aplica-se outro princípio físico, a segunda lei de Newton $F = ma$, a um modelo de fluxo. Adote-se como modelo de fluxo o do elemento infinitesimal de fluido, de modo a simplificar os cálculos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

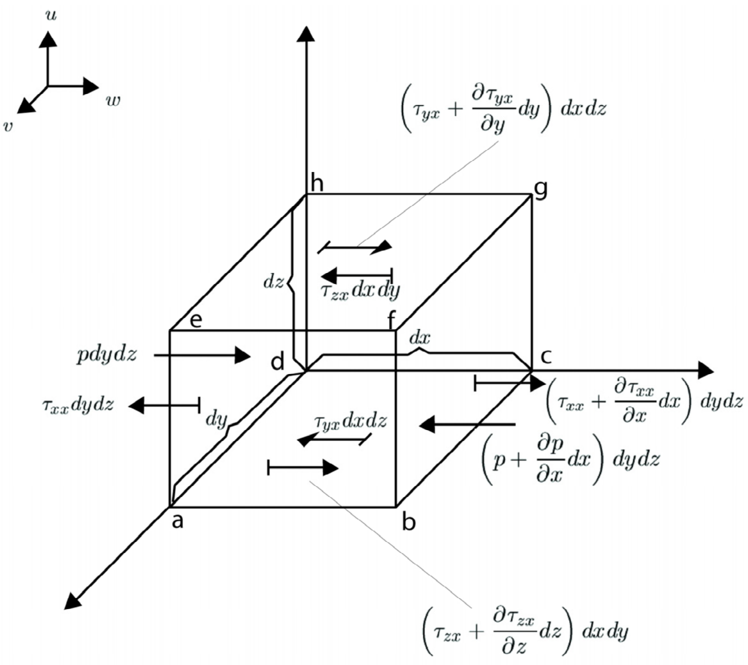

Figura 3.1: Elemento infinitesimal movendo-se com o fluido, somente com as forças na direção x

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

Aplicando a segunda lei de Newton a um elemento infinitesimal de fluido, como o da figura 3.1, nota-se que a força total sobre o elemento de fluido é igual à sua massa multiplicada pela aceleração do elemento. Esta relação é vetorial e cada um dos eixos x, y e z é tratado separadamente.

Considerando, somente a componente x, a segunda lei de Newton mostra que

$$F_x = ma_x.$$

Se o fluido recebe uma força na direção x, a natureza dessa força é classificada como:

- *Força sobre o corpo*: denomina o conjunto das forças que operam diretamente sobre a substância do fluido, como, por exemplo, a gravidade.
- *Força sobre a superfície*: denomina o conjunto das forças que atuam diretamente sobre a superfície do elemento. Este grupo divide-se em dois:
  - A distribuição de pressão atuando na superfície, imposta pelo fluido cercando o elemento.
  - A força de cisalhamento e a força normal operando na superfície, também impostas pelo fluido cercando o elemento.

Indicando as forças sobre o corpo influindo no elemento de fluido como f, e definindo f_x como a componente dessa força na direção x, usando, também,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

o fato de que o volume do elemento é $(dxdydz)$, apura-se que a força sobre o corpo atuando no elemento de fluido na direção x é

$$\rho f_x(dxdydz). \tag{3-19}$$

As forças de superfície na direção x estão presentes na Fig. 3.1, denotadas com τ_{ij}. O estresse exercido na direção j sobre o plano perpendicular ao eixo i, contra a face `abcd`. A única força na direção x é a força de cisalhamento $\tau_{yx}dxdz$.

A força cisalhante na face `efgh`, que está a uma distância dy da face `abcd`, vale $[\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy]dx\ dz$. Na face `cghd` atua somente a força cisalhante $\tau_{zx}dxdy$. Na face `abfe`, que está a uma distância dz de `cghd`, a força é $[\tau_{zx} + (\partial\tau_{zx}/\partial z)dz]dx\ dy$.

Na face `aehd`, além das forças de cisalhamento, que atuam por exemplo sugando o elemento, atua a força $\tau_{xx}dydz$ e também a força normal que a pressão faz, na direção x, está é $pdydz$.

Como a face `bcgf` está a uma distância dx da face `aehd`, a força cisalhante é $[\tau_{xx}+(\partial\tau_{xx}/\partial x)dx]dy\ dz$, e a força normal devido à pressão na direção x vale $(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dy\ dz$.

Constatando com isso que o total das forças de superfície atuando no elemento é

$$\begin{aligned} &\left[p - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz\right] + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx\right) - \tau_{xx}\right] dydz \\ &+ \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right] dxdz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right) - \tau_{zx}\right] dxdy, \end{aligned} \tag{3-20}$$

conclui-se que a força total que atua na direção x, denotada po F_x, é a combinação das forças descritas em (3-19) e (3-21)

$$F_x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] dxdydz + \rho f_x dxdydz. \tag{3-21}$$

Supondo que o elemento de fluido possui densidade constante, sua massa é dada por,

$$m = \rho dxdydz \tag{3-22}$$

e sua aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo. Então, a aceleração na direção x, denotada por a_x, é a variação com o tempo de u (o componente x da velocidade). Conjeturando que o elemento se move com o fluido, logo a taxa de variação da velocidade é expressa pela derivada material, sendo

$$a_x = \frac{Du}{Dt}. \tag{3-23}$$

Ao combinar as equações (3-22) e (3-23), obtém-se

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x, \tag{3-24}$$

Use-se o mesmo raciocínio para conseguir, igualmente, as equações

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \tag{3-25}$$

e

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z. \tag{3-26}$$

Estas equações são as *equações diferenciais parciais da equação do momentum*. Também dizemos que elas estão em sua forma *não-conservativa*, pois o elemento de fluido está em movimento.

Estas equações são escalares, e são designadas de *equações de Navier-Stokes*, em homenagem a dois homens, o francês M. Navier e o inglês G. Stokes, que descobriram, independentemente, estas equações na primeira metade do século XIX.

Da forma não-conservativa desta equação é possível deduzir a forma *conservativa*. Aplique-se a definição de derivada material ao lado esquerdo da equação (3-24)

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\mathbf{V}\cdot\nabla u \\
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\mathbf{V}\cdot\nabla u \\
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u\mathbf{V}) - u\nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) \\
&= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right] + \nabla\cdot(\rho u\mathbf{V}).
\end{aligned} \tag{3-27}$$

Recorde-se que o termo em colchetes é o lado esquerdo da equação da continuidade da massa (3-17), ou seja, zero, resumindo a equação para

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u\mathbf{V}), \tag{3-28}$$

substituindo na equação (3-24)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x, \tag{3-29}$$

e da mesma forma

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \tag{3-30}$$

e

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho w\mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z. \tag{3-31}$$

Estas são as equações de Navier-Stokes na forma *conservativa*.

No fim do século XVII, Isaac Newton propôs que as forças de cisalha-

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

mento e normais (forças de superfície) são proporcionais ao gradiente de velocidade. Os fluidos com essa propriedade são nomeados de *fluidos Newtonianos*. Baseado nessa propriedade, em (1845) Stokes concluiu

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
\tau_{yy} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
\tau_{zz} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned}
\tag{3-32}
$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade molecular e λ é o segundo coeficiente de viscosidade. Stokes supôs que

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu,$$

dando origem às *equações completas de Navier-Stokes na forma conservativa*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \\
&- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \\
&- \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = \\
&- \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}
$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

$$+ \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho f_z. \tag{3-33}$$

3.6 As Equações de Euler

Tomando as equações de Navier-Stokes com a hipótese adicional de que o fluido é inviscido, ou seja, supondo que o fluido não tem viscosidade, e simplesmente retirando as parcelas das equações de Navier-Stokes dependentes de fricção, o resultado são as denominadas equações de Euler.

Equações da Continuidade da Massa:

Forma não-conservativa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3-34}$$

Forma conservativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \tag{3-35}$$

Equações do Momentum:

Forma não-conservativa

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x, \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y, \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z. \end{aligned}$$

Forma conservativa

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y, \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z. \end{aligned}$$

3.7 As Equações de Navier-Stokes para fluidos Incompressíveis

Suponha-se que o fluido é incompressível, ou seja, tem a densidade ρ constante. Com isso a equação (3-18) torna-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{3-36}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

Assumindo que a viscosidade, μ, é constante, as equações (3-24) a (3-26) combinadas com as equações (3-32) garantirão:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \rho f_x,\\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \rho f_y,\\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho f_z.
\end{aligned} \tag{3-37}$$

Para obter as equações (3-37), os termos de (3-32) que contêm parcelas $\nabla \cdot \mathbf{V}$ são anuladas. Temos ainda uma apresentação mais elegante dessas equações

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3-38}$$

Conseqüentemente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3-39}$$

e derivando em relação a x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{3-40}$$

Some-se $\partial^2 u/\partial x^2$ aos dois lados da equação e multiplique-se por μ

$$2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{3-41}$$

substituindo em (3-37)

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} = & - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\\
& + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\
& + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho f_x.
\end{aligned} \tag{3-42}$$

Assim

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho f_x, \tag{3-43}$$

ou

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho f_x, \tag{3-44}$$

onde $\nabla^2 u$ é o Laplaciano da componente x da velocidade, u. Analogamente, obtém-se as equações para os componentes y e z da velocidade. Assim, as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis ficam

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{3-45}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho f_x, \tag{3-46}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho f_y, \tag{3-47}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho f_z. \tag{3-48}$$

Usando a equação (3-5) as equações se tornam

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{3-49}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \rho f_x, \tag{3-50}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho f_y, \tag{3-51}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + \rho f_z, \tag{3-52}$$

reescrevendo

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V} + F, \tag{3-53}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3-54}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410400/CA