

3

Análises Probabilísticas de Estabilidade

3.1

Introdução

Para facilitar o entendimento das metodologias de análise de confiabilidade serão apresentados neste capítulo alguns conceitos básicos de probabilidade e estatística.

3.2

Conceitos de Estatística

3.2.1

Definições Gerais

O objeto da análise estatística é denominado de Universo. No caso do estudo da estabilidade de um talude, o universo seria constituído por todos os parâmetros envolvidos que de alguma forma estivessem ligados direta ou indiretamente ao coeficiente de segurança contra a ruptura.

O conjunto de todos os valores possíveis de serem medidos com uma mesma característica é a População. No exemplo da análise de estabilidade de um talude, o ângulo de atrito, a coesão, o nível de água, a densidade natural do solo entre outros seriam as populações que compõem o universo.

As unidades de amostragem são os valores atribuídos para a população estudada. No caso da população "peso específico", cada determinação corresponde a uma unidade de amostragem. Uma amostra de uma população é constituída de várias unidades de amostragem.

Uma amostragem aleatória é um processo de escolha de determinado número de unidades de amostragem de uma população, efetuado de tal maneira que qualquer unidade tenha a mesma oportunidade de ser escolhida.

3.2.2

Tendência Central

Se forem realizadas várias séries de determinações com "n" números de medidas aleatórias de uma mesma população, no caso do peso específico de um solo, pode-se calcular a média aritmética para cada série de medidas, de acordo com a Equação 27:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{eq.(27)}$$

onde:

$\bar{X}$ = média da amostra;

n = nº de medidas da série (tamanho da amostra);

x_i = valor individual de cada medida.

Com os valores das médias aritméticas das amostras, obtidos para cada série de medidas, obtem-se o histograma da Figura 3.1, correspondente à população estudada do universo em questão. No eixo horizontal, são assinalados os diversos valores de intervalos das médias aritméticas $\bar{X}_i$, e no eixo vertical as percentagens de valores que ocorrem em cada intervalo (Frequência).

O histograma ilustra o fato de que as maiores porcentagens de valores ocorrem em torno do intervalo de valor central μ , correspondente à média da população estudada. Em outras palavras, as séries de médias $\bar{X}_1 \dots \bar{X}_n$ tendem para o valor de μ .

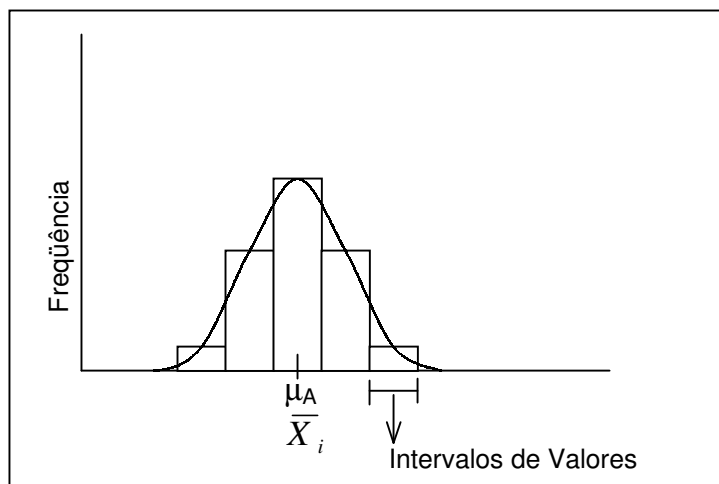


Figura 3.1 – Distribuição estatística das médias das amostras da população $\bar{X}_i$.

Como praticamente não é possível medir todas as unidades de amostragem de uma população, a média $\bar{X}$, correspondente a n unidades, obtida de uma maneira aleatória, constitui a melhor estimativa possível da média " μ " da população.

Expressando μ de forma matemática, vem:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) d(x) \quad \text{eq.(28)}$$

onde:

$f(x)$ = função distribuição de probabilidade;

μ = 1º momento probabilístico.

A média é a principal informação de uma variável aleatória. Geralmente, ela é o valor assumido para os parâmetros envolvidos em uma análise determinística de estabilidade de uma obra geotécnica. Em um estudo probabilístico, outras informações sobre a distribuição de frequência dessas variáveis são necessárias para que tal abordagem possa ser executada.

3.2.3

Medidas de Dispersão

A Figura 3.2 apresenta o histograma da distribuição estatística das médias das amostras da população $\bar{Y}_i$.

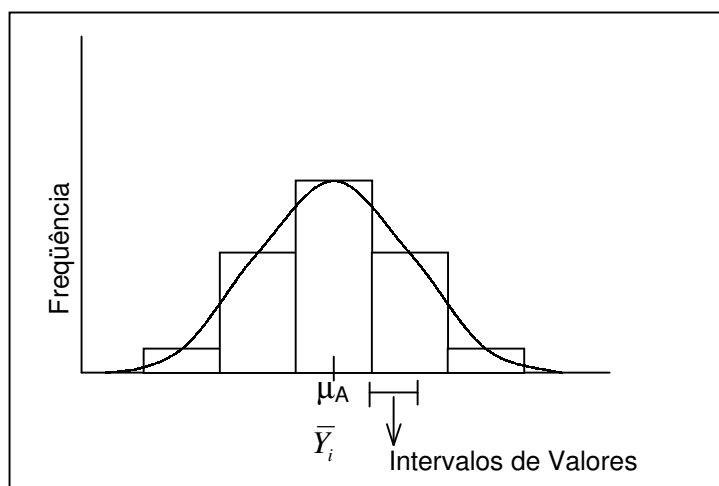


Figura 3.2 – Distribuição estatística das médias das amostras da população $\bar{Y}_i$.

Sobrepondo-se as Figuras 3.1 e 3.2, verifica-se que a população $\bar{Y}_i$ apresenta uma dispersão maior do que a população $\bar{X}_i$ conforme mostrado na Figura 3.3

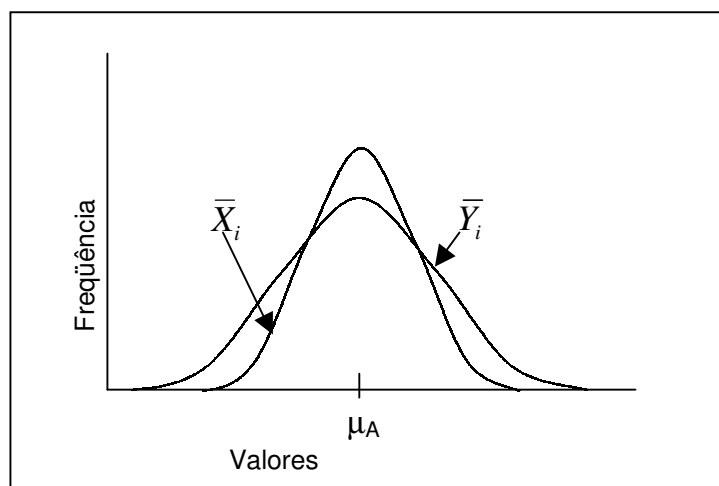


Figura 3.3 – Comparação das dispersões entre as distribuições $\bar{X}_i$ e $\bar{Y}_i$

A melhor forma de estimar-se a dispersão de uma amostra ou de uma população é através do desvio padrão e do coeficiente de variação.

Normalmente, o desvio padrão da amostra é designado por “s” e o da população por σ , como indicam respectivamente as Equações 28 e 29

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad \text{eq.(28)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}} \quad \text{eq.(29)}$$

onde:

$\bar{X}$ = Média das amostras;

x_i = Valores individuais;

n = Número de valores (tamanho das amostras);

μ = Média da população.

O quadrado do desvio padrão é chamado de variância. No caso de amostras, designa-se “ s^2 ” e nos de população “ σ^2 ”.

Quando n é grande (> 30), os valores “ σ ” e “ s ” são muito próximos (Manual de Pavimentação Urbana, Controle Estatístico de ABPV, 1991).

Outro parâmetro muito utilizado é o coeficiente de variação “C.V.”. Ele representa o desvio padrão amostral como percentagem da média conforme indicado pela Equação 30:

$$C.V. = \frac{s}{\bar{X}} 100 \quad \text{ou} \quad C.V. = \frac{\sigma}{\mu} 100 \quad \text{eq.(30)}$$

3.2.4

Distribuição da Probabilidade dos Parâmetros Geotécnicos

A literatura mostra vários tipos de distribuições probabilísticas: normal, log-normal, binomial, geométrica, poisson, exponencial, gama, hiperbólica, beta,

etc. Os tipos mais usados em geotecnia são os dois primeiros que serão apresentados a seguir.

3.2.5

Distribuição Normal

Conhecida também como distribuição de Gauss, a distribuição normal é uma das mais usadas na teoria da probabilidade e será assumida nas análises dos estudos de caso contidos nos Capítulos 4 e 5. Essa função plotada em um gráfico apresenta uma curva simétrica em forma de sino conforme mostrada na Figura 3.4.

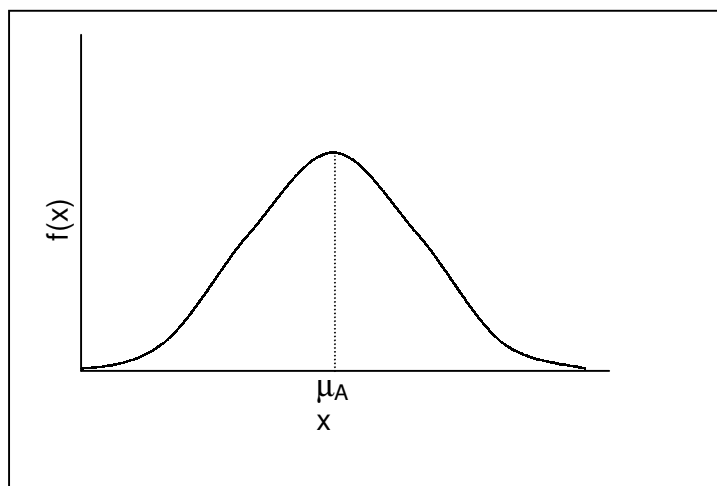


Figura 3.4—Gráfico de uma distribuição normal da variável x

A função de distribuição normal é dada pela Equação 31:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{eq.(31)}$$

Para saber qual a probabilidade de uma variável aleatória ser menor do que um valor a , é necessário integrar a Equação 32 de $-\infty$ até a conforme mostrado a seguir:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{eq.(32)}$$

Não existe solução analítica para Equação 3.7 podendo, no entanto, ser resolvida por métodos numéricos. Os resultados da integração da função distribuição de probabilidade encontram-se tabelados para os valores de $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ (Tabela A1.2). Substituindo na Equação 3.7 os valores de μ e de σ a probabilidade de uma variável aleatória (x) ser menor ou igual a z é dada pela Equação 33.

$$f(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{eq.(33)}$$

onde z é uma variável aleatória padronizada definida por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma(x)} \quad \text{eq.(34)}$$

Assim, qualquer distribuição normal pode ser transformada em uma distribuição normal padrão, conforme mostrado na figura 3.5 na qual duas curvas com tendências centrais e desvios padrões distintos adquirem a mesma forma após as alterações feitas pelas Equações 33 e 34.

3.2.6 Distribuição Log-Normal

A distribuição log-normal ocorre, na prática, quando o logaritmo de uma variável aleatória obedece a uma distribuição normal como é o caso das medidas de deflexões Benkelman em um pavimento rodoviário (Lassable e Langumier, 1967). Este tipo de distribuição tem como características apresentar a assimetria em relação à μ e ser sempre positiva. A Figura 3.6 mostra o gráfico de uma distribuição log-normal.

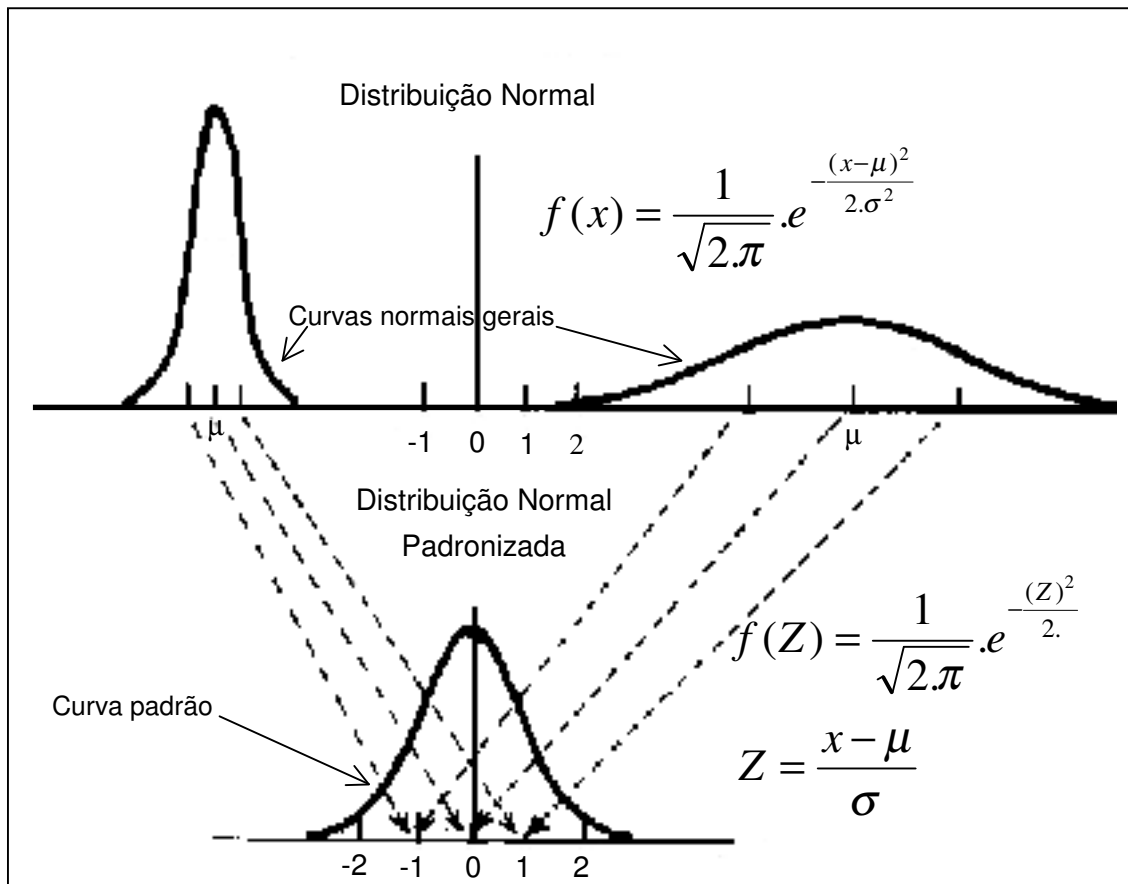


Figura 3.5 – Transformação linear da curva normal geral em curva normal padrão.

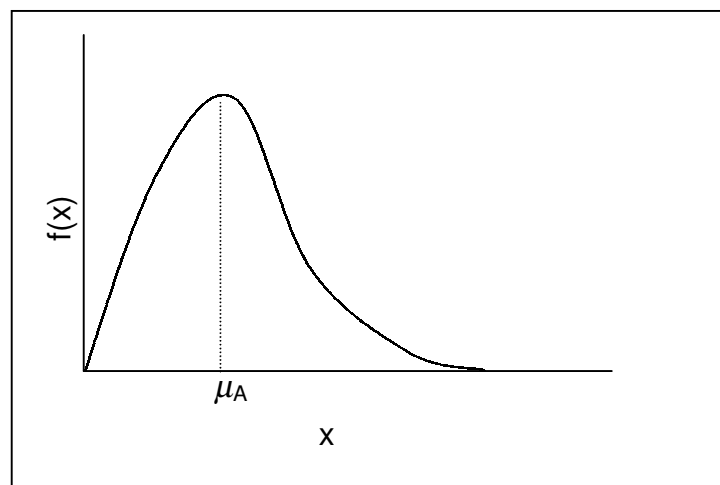


Figura 3.6 – Gráfico de X vs $f(x)$ de uma distribuição log-normal da variável x.

No caso de $f(x)$ seguir uma distribuição log-normal, a função de probabilidade é dada pela Equação 35.

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{eq.(35)}$$

3.2.7

Estimativa de Intervalos de Confiança

Nos itens anteriores, foi dito que a melhor estimativa da média μ de uma população é feita através do cálculo da média $\bar{X}$ de n amostras aleatórias. Ficou, portanto, explícito que no cálculo de μ estar-se-á sempre cometendo um erro para mais ou para menos, de acordo com o intervalo de confiança indicado pela Equação 36:

$$\mu = \bar{X} \pm e \quad \text{eq.(36)}$$

onde:

μ = média;

$\bar{X}$ = média das amostragens;

e = erro da amostragem.

Por outro lado, quando os desvios padrões das amostras aleatórias são conhecidas, pode-se utilizar as tabelas da curva normal ou da variável de Student, mostradas respectivamente nas Tabelas A1.2 e A1.1, para a determinação da probabilidade de ocorrências de valores limites pré-estabelecidos (máximos e mínimos), de acordo com a precisão requerida. Basta, para isto, uma transformação que consiste em se multiplicar os desvios padrões calculados pelos valores de z_0 e t_0 tabelados. As tabelas da Curva Normal e da Variável de Student referem-se à toda uma família de curvas dependentes do Grau de Liberdade (g.l.), que é o valor correspondente ao número de unidades da amostra menos 1, ou seja "g.l. = $n - 1$ ".

A Figura 3.7 mostra a comparação entre uma curva normal e as curvas correspondentes à distribuição de Student.

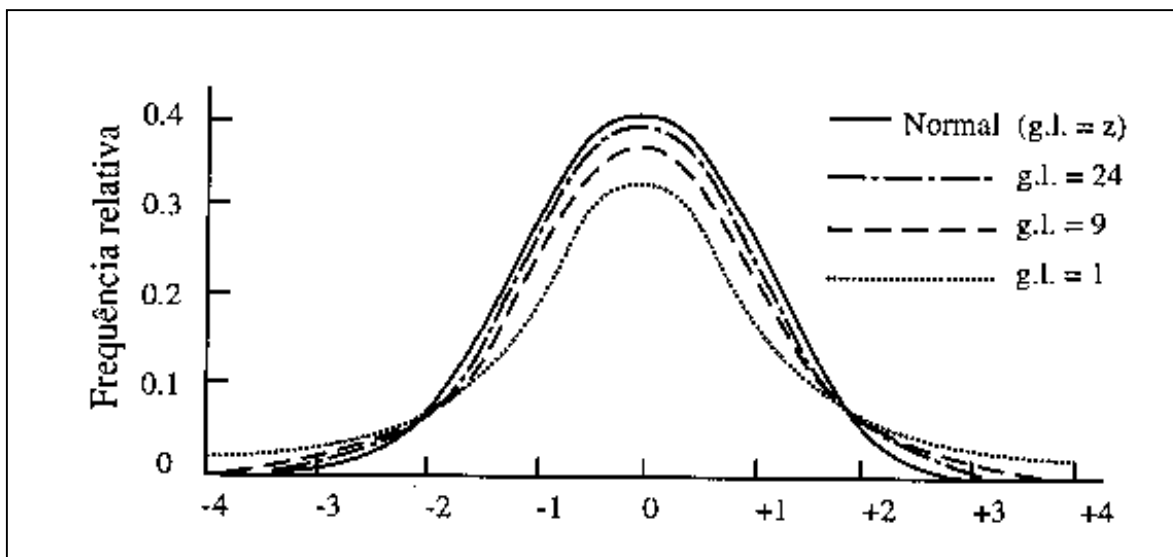


Figura 3.7 – Comparação entre a curva normal e as curvas de Student (Manual de Pavimentação Urbana, Controle Estatístico de Pavimentos Publicado pela ABPV, 1991).

É importante salientar que quando as características das populações estudadas são conhecidas (Desvio Padrão e C. V) emprega-se a tabela da curva normal. Ao contrário, quando se conhecem apenas as características das unidades de amostragem das populações estudadas, utiliza-se a tabela de Student.

Observar que para n maior ou igual a 30, a curva de Student praticamente confunde-se com a curva de Gauss (Manual de Pavimentação Urbana, Controle Estatístico de Pavimentos Publicado pela ABPV, 1991).

Ao se trabalhar com estimativas da média real ou da população (μ), é conveniente estabelecerem-se os intervalos de confiança nos quais deverá estar inserida a média da população " μ ". Isto pode ser feito através das Equações 3.7 a 3.17, respectivamente, para o intervalo de confiança, o limite inferior (LI) e o limite superior (LS) em duas situações distintas:

a) Situação em que as características da população do Universo são conhecidas (s ou C.V.)

Neste caso, trabalha-se com a distribuição de Gauss.

$$\bar{X} - z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{X} + z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{eq.(37)}$$

$$\bar{X} - z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \quad \text{LI = Limite Inferior} \quad \text{eq.(38)}$$

$$\bar{X} + z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \geq \mu \quad \text{LS = Limite Superior} \quad \text{eq.(39)}$$

onde:

$\bar{X}$ = média das amostras;

σ = valores individuais;

n = número de valores da amostra;

μ = média da população;

$z_0 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ = acurácia.

b) Situação em que só se conhecem as características das unidades de amostragem da população

Neste caso, trabalha-se com a distribuição de Student.

$$\bar{X} - t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{X} + t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{eq.(40)}$$

$$\bar{X} - t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \quad \text{LI = Limite Inferior} \quad \text{eq.(41)}$$

$$\bar{X} + t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \geq \mu \quad \text{LS = Limite Superior} \quad \text{eq.(42)}$$

onde:

t_0 = valor tabelado para g.l. = $n - 1$ (Tabela A1.1);

s = desvio padrão da amostra;

$t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$ = acurácia.

3.3

Tipos de Análises Probabilísticas

A análise clássica da estabilidade de uma obra geotécnica é representada por um fator de segurança. Geralmente, são tomados valores médios para todos os parâmetros envolvidos no seu cálculo não levando em consideração a variação dos mesmos. Em um estudo probabilístico essa variação é quantificada através de um índice de confiabilidade correlacionado a uma probabilidade de fracasso fornecendo ao engenheiro geotécnico um poderoso complemento da análise clássica. O valor desse índice não é absoluto, pois alguns parâmetros são difíceis ou às vezes impossíveis de serem quantificados. Geralmente só as incertezas relativas aos valores dos parâmetros do solo, à geometria do problema e às cargas atuantes são levadas em conta. Quanto maior o número de incertezas considerado na análise probabilística, melhor será a qualidade do estudo. O índice de confiabilidade também varia de acordo com o método determinístico escolhido para a análise de estabilidade da obra geotécnica.

3.4

Formulação do Índice de Confiabilidade e da Probabilidade de Ruptura

Considerando o fator de segurança FS de uma obra geotécnica como uma variável aleatória normalmente distribuída e que para essa obra ser estável FS necessariamente tem que ser maior ou igual a 1, o índice de confiabilidade β , formulado por Morlá-Catalán e Cornel (1976) é definido como:

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sigma_R} \quad \text{eq.(43)}$$

Dividindo-se a Equação 44 por, $\bar{S}$ tem-se:

$$\beta = \frac{\bar{R}/\bar{S} - 1}{\sigma_R/\bar{S}} \quad \text{eq.(44)}$$

$$\beta = \frac{\overline{FS} - 1}{\sigma_{FS}} \quad \text{eq.(45)}$$

onde:

β = Índice de confiabilidade;

$\overline{R}$ = Média da capacidade resistiva;

$\overline{S}$ = Média da capacidade solicitante;

$\overline{FS}$ = Fator de segurança médio;

σ_R = Desvio padrão da capacidade resistiva;

σ_{FS} = Desvio padrão do fator de segurança.

A probabilidade de ruptura é definida como:

$$Pr = 1 - \Phi(\beta) \quad \text{eq.(46)}$$

onde:

Pr = Probabilidade de ruptura;

$\Phi(\beta)$ = Curva normal padronizada.

$$Pr = \int_{-\infty}^1 f(FS) dFS = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sigma_{FS} \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(FS - \overline{FS})^2}{2(\sigma_{FS})^2}} dFS = \quad \text{eq.(47)}$$

$$1 - \int_{-\infty}^1 \Phi(Z) dZ = 1 - \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-Z^2}{2}} dZ$$

A Equação 47 fica melhor compreendida graficamente conforme mostrado na Figura.3.8.

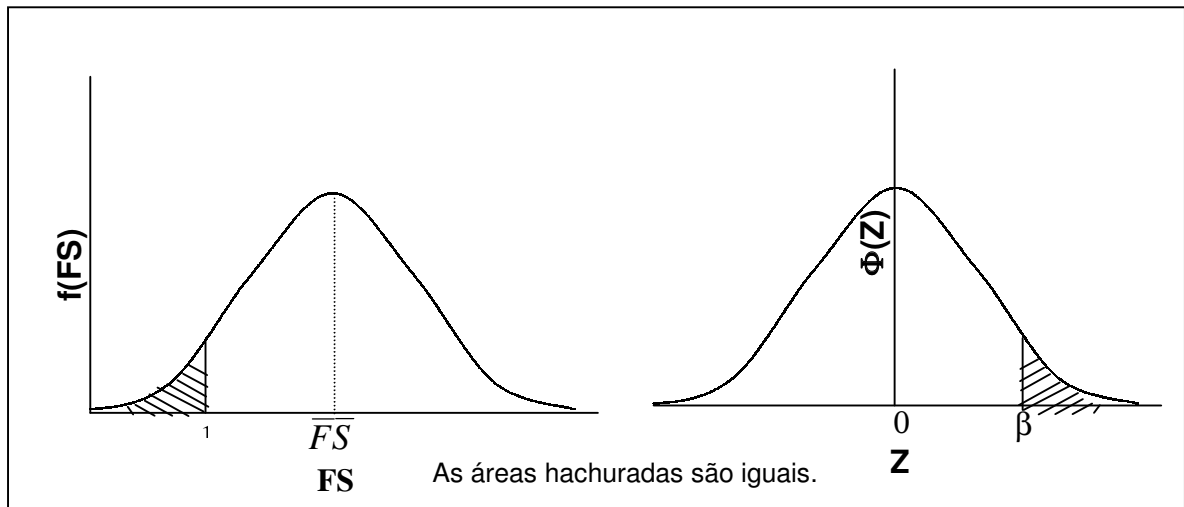


Figura 3.8 – Curvas de distribuição de probabilidade do Fator de Segurança e a curva de Gauss normalizada.

O gráfico da Figura 3.9 mostra a probabilidade de ruptura variando-se o valor de β

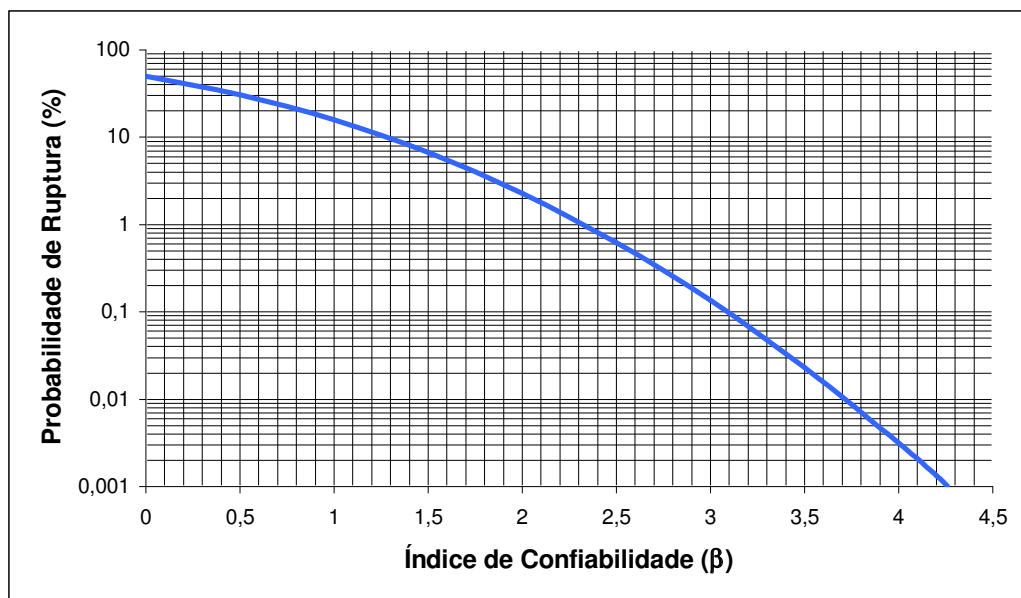


Figura 3.9 - Confiabilidade x Probabilidade de Ruptura.

Analisando a Figura 3.8 conclui-se que:

- Se $\overline{FS}$ aumenta mantendo-se constante σ_{FS} , a curva $f(FS)$ alarga-se e a área hachurada diminui, logo o índice de confiabilidade β aumenta conforme mostrado na Figura 3.10

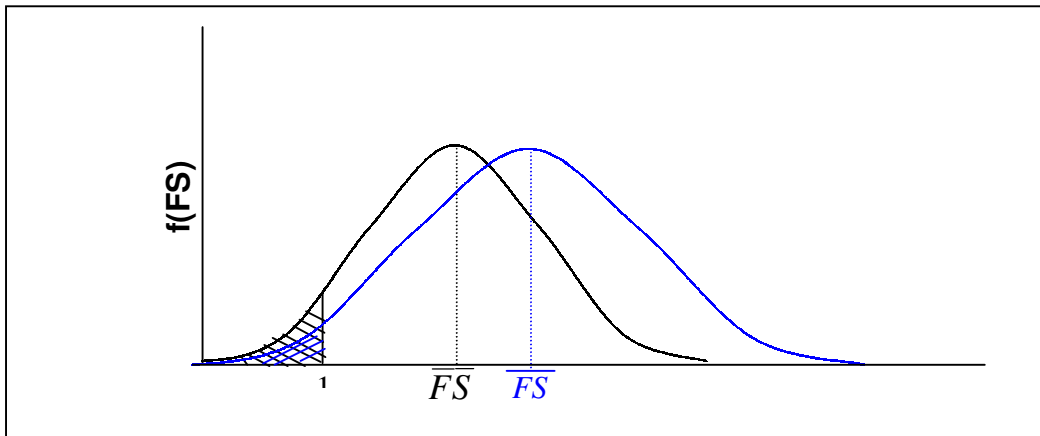


Figura 3.10 – Aumento do $\overline{FS}$ mantendo-se constante σ_{FS} .

- Se σ_{FS} aumenta mantendo-se $\overline{FS}$ constante, a curva $f(FS)$ achata-se e alarga-se tornando a área hachurada maior, logo β diminui conforme mostrado na Figura 3.11.

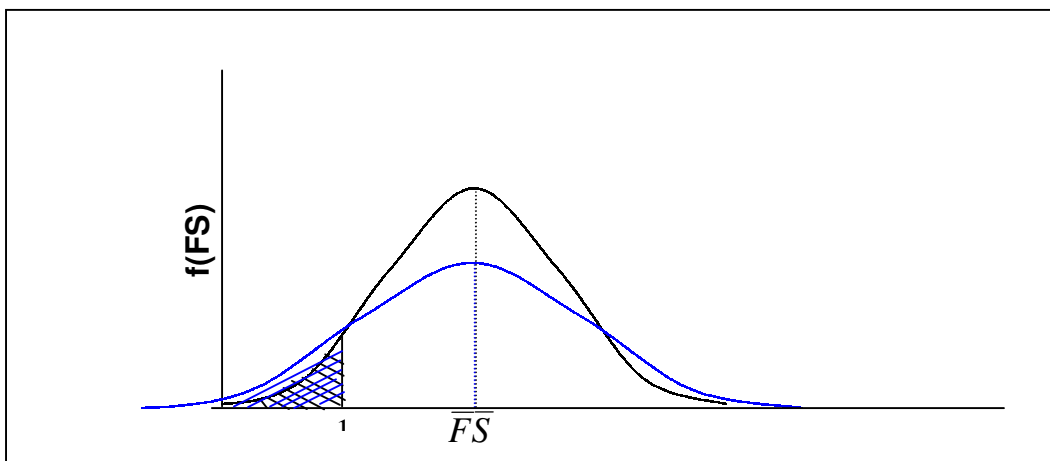


Figura 3.11 – Aumento do σ_{FS} mantendo-se $\overline{FS}$ constante.

Nem sempre a obra com maior fator de segurança tem uma confiabilidade maior. A Figura 3.12 mostra duas situações com fatores de segurança iguais a 1,5 e 1,7, representadas pela curva azul e pela curva preta

respectivamente, com uma probabilidade de ruptura maior para a situação com maior fator de segurança.

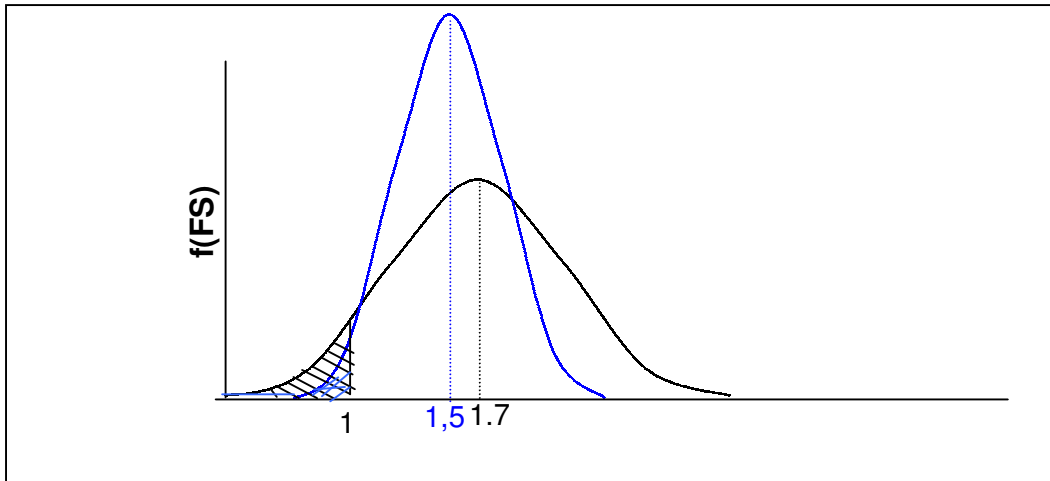


Figura 3.12- Distribuição probabilística de duas curvas com desvios padrões diferentes.

Para calcular o índice de confiabilidade β mostrado na Equação 45 precisa-se conhecer o fator de segurança médio e seu desvio padrão.

3.5

Métodos Probabilísticos

A seguir são apresentados três métodos probabilísticos utilizados em geotecnia: Simulação de Monte Carlo, Estimativas Pontuais e Segundo Momento de Primeira Ordem.

3.5.1

Simulação de Monte Carlo

O método de Simulação de Monte Carlo, empregado na análise probabilística da estabilidade de uma obra geotécnica, consiste em gerar aleatoriamente um número N de valores para os n parâmetros de incertezas que fazem parte do cálculo do fator de segurança. A geração aleatória pode ser

realizada através de programas estatísticos que empregam para os dados de entrada a média, o desvio padrão e a forma da distribuição da variável em questão. São feitas N análises determinísticas selecionando-se o menor fator de segurança encontrado em cada análise. De posse desses dados, calcula-se diretamente a média e o desvio padrão do FS possibilitando, assim, a determinação do índice β através da Equação 45. Este método, que se baseia em técnicas de amostragem, tem como desvantagem a necessidade de um grande número de análises determinísticas para diminuir os erros e se chegar a uma determinação confiável dos momentos probabilísticos. Harr (1987) apresentou a seguinte equação para a determinação do número N :

$$N = \left[\frac{(h_{\alpha/2})^2}{4\varepsilon^2} \right]^n \quad \text{eq.(48)}$$

onde:

N = número de simulações necessárias

$h_{\alpha/2}$ = função de confiabilidade $(1-\alpha)$ Tabela A1.2

ε = precisão em %

n = número de variáveis

Se for desejada uma precisão de 90%, o desvio padrão será 1.64. Assim o número de análises determinísticas necessárias será: 67 para uma variável, 4489 para duas variáveis e 300763 para três variáveis.

Há de se notar que o número de simulações aumenta exponencialmente com o número de variáveis tornando o método inviável de ser aplicado se o número de parâmetros envolvidos for grande.

3.5.2

Método das Estimativas Pontuais

O método consiste na estimativa dos dois primeiros momentos probabilísticos (média e variância) a partir de uma função geradora de momentos. Tal função é obtida através das análises determinísticas da permutação dos valores médios dos parâmetros envolvidos no cálculo do fator de segurança, acrescidos e diminuídos do desvio padrão. O procedimento acima

implica 2^n análises determinísticas no qual n é o número de variáveis levadas em consideração. O cálculo do desvio padrão e da variância tem em conta que os n parâmetros possuem distribuições simétricas.

A média e a variância do fator de segurança são calculadas através das Equações 49, 50 e 51:

$$E(FS) = \overline{FS} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} FS_i \quad \text{eq.(49)}$$

$$E(FS^2) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} FS_i^2 \quad \text{eq.(50)}$$

$$V(FS) = E(FS^2) - [E(FS)]^2 \quad \text{eq.(51)}$$

No caso de 3 variáveis (v_1 , v_2 e v_3), o cálculo é feito da seguinte maneira: faz-se as combinações com as médias $\pm$ desvio padrão, conforme mostradas na Tabela 3.2 e calcula-se o fator de segurança para cada uma das 2^3 permutações possíveis.

Tabela 3.2 – Permutações possíveis usando-se 3 variáveis aleatórias.

Análise	V_1	V_2	V_3	FS
1	$V_1 + \sigma_{V1}$	$V_2 + \sigma_{V2}$	$V_3 + \sigma_{V3}$	FS ⁺⁺⁺
2	$V_1 + \sigma_{V1}$	$V_2 + \sigma_{V2}$	$V_3 - \sigma_{V3}$	FS ⁺⁺⁻
3	$V_1 - \sigma_{V1}$	$V_2 - \sigma_{V2}$	$V_3 - \sigma_{V3}$	FS ⁻⁻⁻
4	$V_1 + \sigma_{V1}$	$V_2 - \sigma_{V2}$	$V_3 + \sigma_{V3}$	FS ⁺⁻⁺
5	$V_1 - \sigma_{V1}$	$V_2 - \sigma_{V2}$	$V_3 - \sigma_{V3}$	FS ⁻⁻⁻
6	$V_1 - \sigma_{V1}$	$V_2 + \sigma_{V2}$	$V_3 + \sigma_{V3}$	FS ⁻⁺⁺
7	$V_1 - \sigma_{V1}$	$V_2 - \sigma_{V2}$	$V_3 + \sigma_{V3}$	FS ⁻⁻⁺
8	$V_1 - \sigma_{V1}$	$V_2 + \sigma_{V2}$	$V_3 - \sigma_{V3}$	FS ⁻⁺⁻

Após os cálculos dos fatores de segurança, aplicam-se as Equações 52, 53 e 54 como exemplificado nas expressões seguintes:

$$E(FS) = \overline{FS} = \frac{FS_{+++} + FS_{++-} + FS_{+--} + FS_{-++} + FS_{---} + FS_{-+-} + FS_{--+} + FS_{-+-}}{8} \quad \text{eq.(52)}$$

$$E(FS^2) = \frac{FS_{+++}^2 + FS_{++-}^2 + FS_{+--}^2 + FS_{-++}^2 + FS_{---}^2 + FS_{-+-}^2 + FS_{--+}^2 + FS_{-+-}^2}{8} \quad \text{eq.(53)}$$

$$\sigma_{FS}^2 = V(FS) = E(FS^2) - [E(FS)]^2 \quad \text{eq.(54)}$$

Substituindo $\overline{FS}$ e σ_{FS} na Equação 45 encontram-se o índice de confiabilidade β e a probabilidade de ruptura (Equação 46).

O método das Estimativas Pontuais, ao contrário da Simulação de Monte Carlo, é um método indireto e tem como vantagem sobre o segundo um número menor de análises determinísticas necessárias.

3.5.3

Método do Segundo Momento de 1ª Ordem

Sendo o coeficiente de segurança (FS) de uma obra geotécnica uma função $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ na qual x_i é variável aleatória independente como peso específico do solo, coesão, ângulo de atrito, cargas atuantes etc, o valor médio de FS é representado por $f(\bar{X}) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ no qual $\bar{x}_i$ é o valor médio do parâmetro i , conforme mostrado nas Equações 55 e 56.

$$\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \quad \text{eq.(55)}$$

$$f(\bar{X}) = \overline{FS} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad \text{eq.(56)}$$

Expandindo a função $f(X)$ em série de Taylor em torno do vetor $\bar{X}$, vem:

$$f(X) = f(\bar{X}) + \frac{f'(\bar{X})}{1!} (X - \bar{X})^1 + \frac{f''(\bar{X})}{2!} (X - \bar{X})^2 + \dots \quad \text{eq.(57)}$$

A Equação 57 pode ser aproximada truncando-se a série no segundo termo, pois o somatório a partir do terceiro termo em diante é pequeno em relação aos dois primeiros. Assim, reescreve-se a Equação 57 da seguinte forma:

$$f(X) - f(\bar{X}) = f'(\bar{X})(X - \bar{X}) \quad \text{eq.(58)}$$

Os termos “ $f(X) - f(\bar{X})$ ” e “ $X - \bar{X}$ ” são respectivamente os desvios padrões do fator de segurança FS e do vetor X. Deste modo, a Equação 58 é reescrita da seguinte forma:

$$\sigma[f(X)] = f'(\bar{X})\sigma(X) \quad \text{eq.(59)}$$

Elevando-se ao quadrado os dois lados da equação encontra-se:

$$V[f(X)] = (f'(\bar{X}))^2 V(X) \quad \text{eq.(60)}$$

Sendo $f(\bar{X}) = \bar{FS}$, a Equação 60 recai em um somatório dos quadrados das derivadas parciais no vetor $\bar{X}$ da função FS em relação a cada um dos parâmetros x_i multiplicados por sua variância. Desta forma, a variância do fator de segurança pode ser expressa aproximadamente pela Equação 3.36:

$$V(FS) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial FS}{\partial x_i} \right)^2 V(x_i) \quad \text{eq.(61)}$$

O próximo passo para encontrar a variância do fator de segurança é calcular as derivadas parciais de FS no vetor $\bar{X}$ em relação a todos os parâmetros x_i . Cristian *et al.* (1992) e Sandroni e Sayão (1992) utilizaram o método das diferenças divididas (ascendentes ou descendentes) para alcançar uma aproximação matemática do problema em questão. Este método consiste em calcular o fator de segurança médio ($\bar{FS}$), dar uma variação (δ) separadamente em cada variável x_i e verificar o comportamento do fator de

segurança. A variação do fator de segurança dividida pela variação imposta à x_i , para mais ou para menos, é uma aproximação da derivada parcial como expressa a Equação 62:

$$\frac{\partial FS}{\partial x_i} = \frac{FS(\bar{x}_i \pm \delta x_i) - FS(\bar{x}_i)}{\delta x_i} \quad \text{eq.(62)}$$

Para que a Equação 62 seja válida, a magnitude de δx_i deve ser suficientemente pequena. Dessa forma $\partial FS/\partial x_i$ poderia ser considerado constante ao longo do intervalo δx_i .

Mostyn e Li (1993) sugerem que a aproximação de $\partial FS/\partial x_i$ seja realizada por diferenças finitas centrais nas quais a variação de cada parâmetro é igual ao respectivo desvio padrão, ou seja:

$$\frac{\partial FS}{\partial x_i} = \frac{FS(\bar{x}_i + 0,5\sigma_i) - FS(\bar{x}_i - 0,5\sigma_i)}{\delta x_i} \quad \text{eq.(63)}$$

Dell'Avanzi (1995) concluiu que para uma variação de $\pm 10\%$ do valor médio do parâmetro x_i , a razão $\partial FS/\partial x_i$ se mantém constante ao longo deste intervalo. Tal fato pode ser verificado supondo a situação de um bloco triangular apoiado sobre uma superfície inclinada conforme esquematizado na figura 3.13.

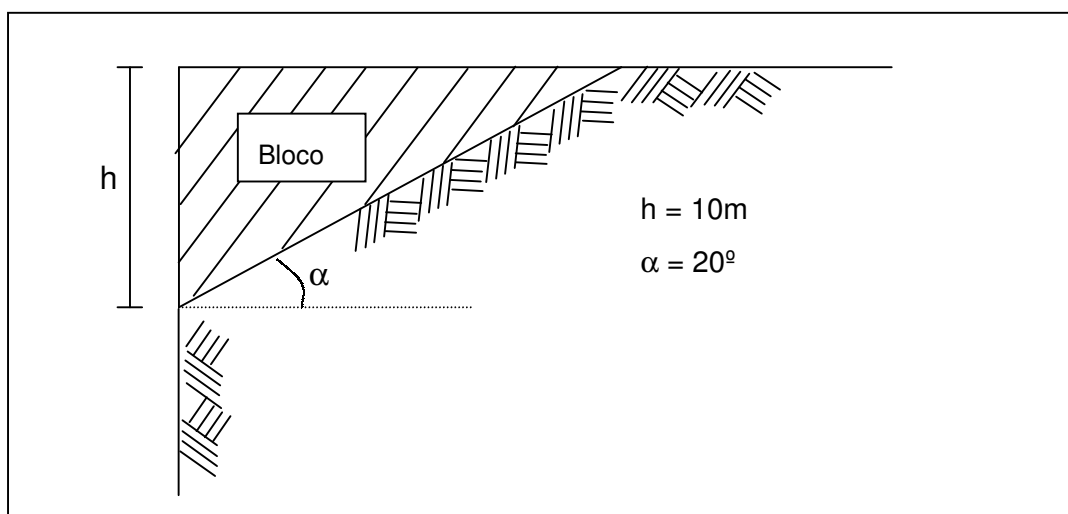


Figura 3.13 – Esquema de um bloco sobre um plano inclinado

Considerando o ângulo de atrito entre o bloco e a superfície de escorregamento $(\phi') = 30^\circ$, a coesão entre o bloco e a superfície de escorregamento $(c') = 16 \text{ kN/m}^2$ e o peso específico do bloco $(\gamma) = 20 \text{ kN/m}^3$, aplica-se o equilíbrio de forças e encontra-se o fator de segurança conforme a Equação 64.

$$FS = \cot \alpha \cdot \tan \phi' + \frac{2c' \sqrt{h^2 + h^2 / \tan^2 \alpha}}{\gamma \cdot h^2 \cdot \cos \alpha} \quad \text{eq.(64)}$$

Variando os parâmetros ϕ' e γ de um valor de mais e menos 10%, constata-se uma mudança muito pequena das tangentes às curvas “FS x ϕ ” e “FS x γ ”, conforme mostrado nas Figuras 3.14 e 3.15. A função “FS x c” expressa pela Equação 3.39 é linear.

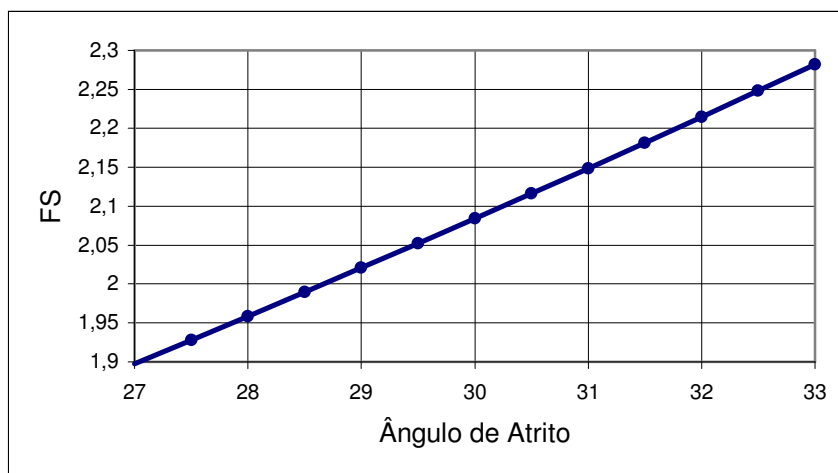


Figura – 3.14 Variação do ângulo de Atrito x FS para o exemplo do bloco

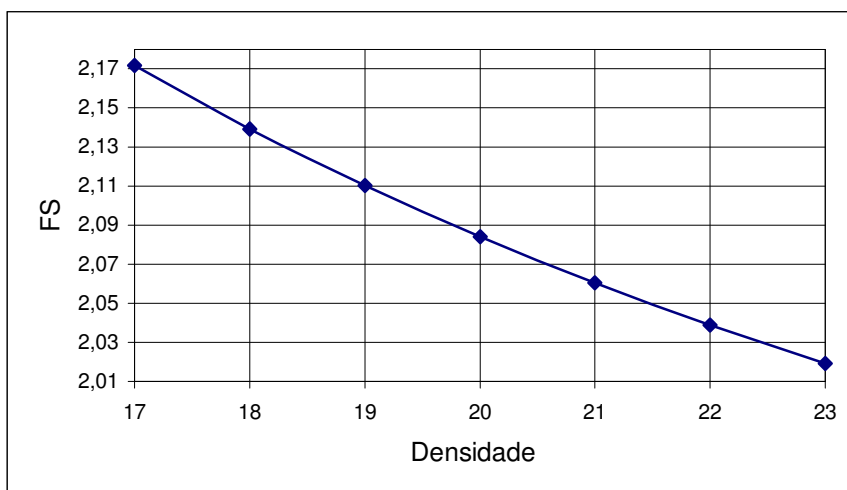


Figura 3.15 – Variação da densidade x FS para o exemplo do bloco

No caso de se optar por variações muito pequenas de x_i , com o intuito de alcançar uma melhor aproximação para $\partial FS / \partial x_i$, o engenheiro deve observar a precisão do cálculo do programa determinístico empregado. Tendo em vista o programa XSTABL (1990), no qual o fator de segurança é fornecido com três casas decimais, um δx_i que refletisse um δFS menor do que 1% acarretaria uma distorção ou até anularia (se $\delta FS < 0,1\%$) o valor da derivada parcial levando a um índice de confiabilidade β maior.

O método do Segundo Momento é um método de análise indireto e, como foi visto, aproximado. Ele tem como vantagem, perante os outros dois apresentados, a necessidade de um número pequeno de análises determinísticas (número de parâmetros envolvidos +1). Devido a sua facilidade de uso, também pode ser empregado na determinação do peso da influência de cada parâmetro envolvido na análise probabilística. Esse procedimento detecta as variáveis que podem ser desprezadas servindo de base para simplificação dos outros dois métodos.

3.6

Parâmetros para Análise Probabilística

3.6.1

Fontes de Incertezas

Geralmente, assumi-se como variáveis aleatórias na análise probabilística os parâmetros relativos ao solo, às cargas atuantes, à geometria do terreno e às cotas da linha freática. Entretanto, existem outros parâmetros de difícil quantificação que, às vezes, não são levados em conta, como os erros sistemáticos e os de dispersão de dados.

3.6.2

Erros Sistemáticos

Os erros sistemáticos influenciam na precisão dos resultados de ensaio podendo tornar os valores médios sistematicamente superiores ou inferiores aos reais. Os erros sistemáticos são classificados em dois grupos: Erros estatísticos e erros tendenciosos.

Os erros estatísticos são acarretados por um número insuficiente de ensaios ou medições ocasionando maior probabilidade de se obter as estimativas dos parâmetros distantes dos valores reais.

Os erros tendenciosos são provocados por uma alteração persistente do comportamento real dos ensaios. Geralmente, são ocasionados por falhas humanas, diferenças entre as trajetórias de tensões nos ensaios e na obra geotécnica, imperfeições no processo de amostragem e a pouca representatividade das amostras para simular o comportamento da massa de solo na obra.

Uma forma de diminuir os erros sistemáticos é através de recalibrações periódicas dos instrumentos, melhor seleção destes, qualificação de equipes e maior quantidade de ensaios.

3.6.3

Dispersão de Dados

A dispersão de dados ocasiona um desvio na tendência central afetando a precisão dos resultados. Ao contrário dos erros sistemáticos, as diferenças em torno da média tendem a se compensar, porém aumentam o desvio padrão da amostra. Este grupo de incertezas é dividido em erros de ensaio e erros de heterogeneidade natural do solo.

Os erros de ensaio são causados por erros de leitura, imprecisão na calibração dos aparelhos ou interferências de ordem externa. Esses erros podem ser reduzidos com o aumento do número de leituras, dando a elas um tratamento estatístico, melhor qualificação da equipe, melhor qualificação dos equipamentos e minimizando as interferências de ordem externas.

A heterogeneidade natural deve-se à variações nos parâmetros do solo de um ponto para o outro e tem como causa: o processo de formação, composição mineral, história de tensões entre outros fatores. Assim como os erros aleatórios, essa variabilidade contribui para a dispersão dos dados.

3.7

Número Mínimo de Ensaios

Partindo-se da Equação 40 pode-se avaliar o nº mínimo necessário de ensaios em uma amostra com a finalidade de se obter a média e o desvio padrão dos parâmetros de um solo, através das expressões seguintes:

$$\bar{X} - t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right) \leq \mu \leq \bar{X} + t_0 \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\mu - \bar{X} = t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{eq.(65)}$$

Através da acurácia exigida no projeto e o grau de confiança selecionado determina-se o número de ensaios da seguinte maneira:

$$\mu - \bar{X} < \text{acurácia, ou seja:}$$

$$t_a < \frac{\text{acurácia} \cdot \sqrt{n}}{s} \quad \text{eq.(66)}$$

Na falta de especificações de projeto para a acurácia e o grau de confiabilidade nos ensaios pode-se usar respectivamente os valores 0,1. $\bar{X}$ e 0.95 (Lumb,1967).

Entrando na curva de Student (Tabela A1.2) encontra-se o g.l.(grau de liberdade = n -1) obtendo-se, desta maneira, o número mínimo de ensaios necessários para calcular a média e o desvio padrão dos parâmetros geotécnicos.

Para a estimativa do desvio padrão amostral (s), existem dois procedimentos. O primeiro é realizar de oito a dez ensaios e usar o desvio padrão encontrado como estimativa e o segundo é adotar valores existentes na literatura conforme exemplificado na Tabela 3.3. A realização de ensaios tem a vantagem de ser mais específica para a área investigada permitindo que se leve em conta fatores como a heterogeneidade das camadas, tecnologia de amostragem e métodos de ensaio. A segunda alternativa oferece maior praticidade, porém baseia-se em caso geral.

Tabela 3.3 – Coeficientes de variação para os parâmetros do solo

Obs: C.V. = $\sigma / \bar{X}$

Parâmetro	Valor recomendado	Coeficiente de variação %
Peso específico	3	(2 a 8)
Coesão efetiva	40	(20 a 80)
Ângulo efetivo de resistência	10	(4 a 20)
Coesão não drenada	30	(20 a 50)

Às vezes, pode-se surpreender com um número excessivo de ensaios como no caso de Miranda (2005) ao determinar a coesão de uma argila arenosa. O resultado de $c'_{\text{médio}} = 4,14 \text{ kN/m}^2$ e desvio padrão igual a $16,28 \text{ kN/m}^2$ apresentou um número infinito de ensaios. Nesses casos o número de testes fica limitado aos recursos financeiros disponíveis e ao bom senso do engenheiro geotécnico. A Figura 3.15 mostra o gráfico “Acurácia x Número de Ensaios” da argila ensaiada por Miranda (2005). Nota-se que a variação da acurácia se reduz rapidamente com o incremento de ensaios para n pequeno e quase não varia quando n é grande. Assim, observa-se que a partir de um determinado número de ensaios a variação da acurácia é muito pequena em relação ao incremento de n tendo pouca influência na precisão do cálculo do desvio padrão.

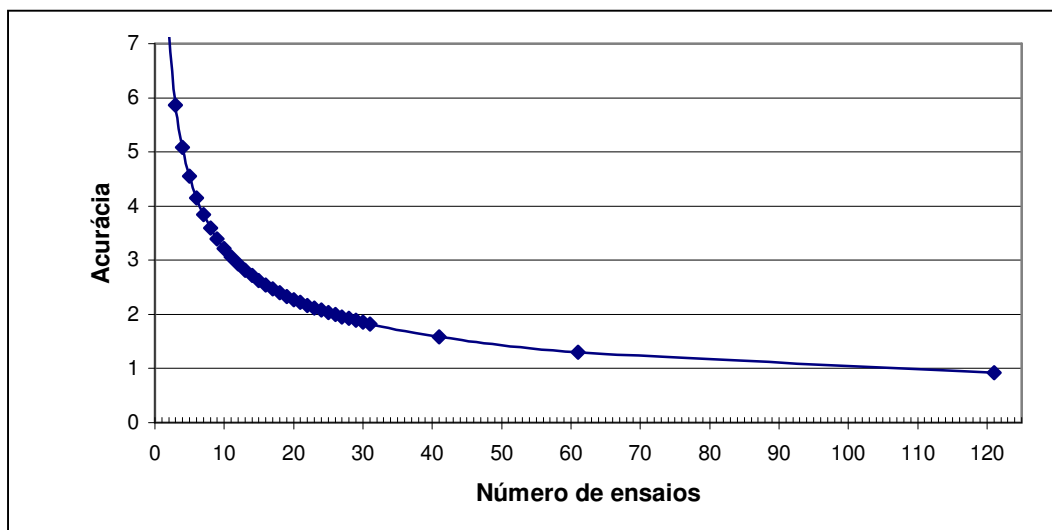


Figura 3.15 – Comportamento da acurácia com o aumento do número de ensaios

3.8

Cálculo dos Momentos Probabilísticos do Ângulo de Atrito e da Coesão

O ângulo de atrito e a coesão são variáveis aleatórias dependentes e requerem um procedimento diferente em relação às outras variáveis. Este procedimento é feito em etapas, a saber, (Neter & Wasserman, 1982):

3.8.1

Ensaio de Cisalhamento Direto

Para os N pares (σ, τ) , obtidos pelos N ensaios disponíveis, faz-se a regressão linear desses pontos pelo método dos mínimos quadrados. A intercessão com o eixo τ e a inclinação da reta encontrada são respectivamente a coesão e o ângulo de atrito médios do solo ensaiado. As variâncias dos parâmetros em questão são calculadas através das seguintes fórmulas:

$$V(c) = V(\tau) \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{E(\sigma)^2}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - E(\sigma))^2} \right) \quad \text{eq. (67)}$$

$$V(\tan \phi) = \frac{V(\tau)}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - E(\sigma))^2} \quad \text{eq.(68)}$$

$$V(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{est})^2}{N - 2} \quad \text{eq.(69)}$$

onde:

N = número de ensaios;

$E(\sigma)$ = média dos valores de σ_i ;

τ_{est} = valor de τ obtido com a reta de mínimos quadrados para cada valor de σ .

O valor de $V(\tau)$ pode ser obtido diretamente através de calculadoras ou planilhas eletrônicas que tenham funções estatísticas.

3.8.2

Ensaio Triaxial

No caso de ensaios triaxiais, faz-se o mesmo procedimento acima para os pontos (p, q), onde p e q são respectivamente a semi-soma e a semidiferença entre as tensões principais maior e menor. Analogamente, encontra-se, desta maneira intercessão “a” e o ângulo “ α ” da reta ajustada e as variâncias $V(a')$ e $V(\tan \alpha)$. Para a determinação de $V(c')$ e $V(\tan \phi')$ deve-se aplicar as seguintes relações (Lima 1991):

$$E(c') = \frac{E(a)}{\sqrt{1 - E(\tan \alpha)^2}} \quad \text{eq.(70)}$$

$$E(\tan \phi') = \frac{E(\tan \alpha)}{\sqrt{1 - E(\tan \alpha)^2}} \quad \text{eq.(71)}$$

$$V(c') = \frac{1}{(1 - E(\tan \alpha)^2)} \left(\frac{(\alpha \cdot E(\tan \alpha)^2}{(1 - E(\tan \alpha)^2)} \cdot V(\tan \alpha) + V(a) \right) \quad \text{eq.(72)}$$

$$V(\tan \phi') = \frac{V(\tan \alpha)}{(1 - E(\tan \alpha)^2)^3} \quad \text{eq.(73)}$$

3.9

Considerações Finais

O índice de confiabilidade β está relacionado com a probabilidade de ruptura da obra geotécnica. No entanto, este número não é absoluto. Como foi visto, β depende do método determinístico e do método probabilístico empregados, do número de variáveis levadas em consideração, da precisão dos ensaios, entre outros fatores. Algumas fontes de incertezas são difíceis de serem quantificadas e, portanto, não são levadas em consideração. Além disso, há ainda, as variáveis cuja existência ignora-se e que, também, contribuem para o índice de confiabilidade global.

Dentre os métodos probabilísticos apresentados, o mais rigoroso é a Simulação de Monte Carlo, desde que seja feito um número grande de análises o que o torna extremamente trabalhoso. O método das Estimativas Pontuais é um método indireto, portanto menos rigoroso do que Monte Carlo. Dependendo do número de variáveis envolvidas, também demandará um grande número de análises, mas em menor número do que o primeiro. O método do Segundo Momento, também é um método indireto e sofre aproximações em sua formulação, mas é o menos trabalhoso, envolvendo um número pequeno de análises determinísticas.