

4 Discretização e Linearização

Uma vez definidas as equações diferenciais do problema, o passo seguinte consiste no processo de discretização e linearização das mesmas para que seja montado um sistema de equações algébricas que possa ser resolvido utilizando um processo computacional.

A linearização das equações de conservação propostas no Capítulo 3 será feita após a discretização das mesmas. Iniciamos, portanto, pela discretização, aplicando a técnica de volumes finitos.

Este método de discretização garante que as informações sejam transportadas, garantindo a estabilidade, com um número mínimo de acoplamento implícito entre os nós espaciais.

Este procedimento é basicamente implícito e fornece informações sobre a propagação de ondas de pressão no escoamento.

O problema é resolvido utilizando a técnica de volumes finitos, onde o duto é dividido em células discretas, formando-se um sistema especial de duas malhas deslocadas, de acordo com a Figura 4.1.

Na malha $ABCD$ são integrados as equações de conservação contendo parâmetros escalares, como por exemplo, massa e energia (pressão, temperatura, massa específica, fração de volume, etc). Na malha $abcd$, deslocada em relação à malha $ABCD$, são escritas as equações de quantidade de movimento, contendo as velocidades como incógnita e definidas no limite das células da malha $ABCD$. Este procedimento garante acoplamento perfeito entre o campo de pressão e fluxo de quantidade de movimento, eliminando oscilações numéricas que outro procedimento poderia produzir.

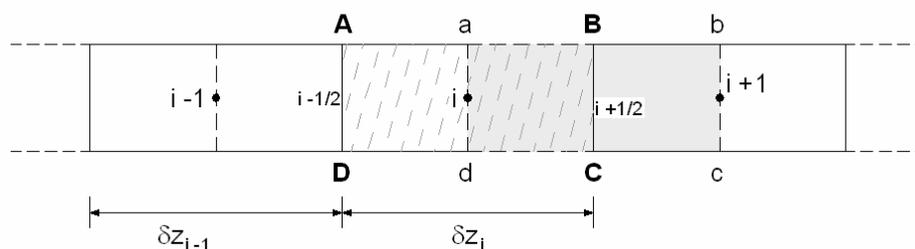


Figura 4.1 – Malhas de discretização deslocadas.

Para avaliar variáveis nos limites das células $ABCD$ a partir dos valores conhecidos nos centros dessas, utilizaremos a técnica de peso da célula doadora, que garante a identificação da direção do escoamento. Ou seja, para um grupo de qualquer variável Φ definida no centro da célula, temos,

$$\begin{aligned} \langle \Phi V \rangle_{i+\frac{1}{2}} &= \Phi_i V_{i+\frac{1}{2}} & V_{i+\frac{1}{2}} &\geq 0 \\ \langle \Phi V \rangle_{i+1} &= \Phi_i V_{i+\frac{1}{2}} & V_{i+\frac{1}{2}} &< 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Basicamente estas condições garantem que o valor utilizado para qualquer propriedade do fluido seja aquele da célula de onde provêm as partículas: se a velocidade na fronteira $(i + \frac{1}{2})$ for positiva, então as propriedades no ponto (i) são empregadas; caso contrário, as informações do ponto $(i + 1)$ são utilizadas. Este procedimento garante compatibilidade e estabilidade numérica, embora em detrimento de maior erro de truncamento (ordem de Δz). Com esta notação, a forma de diferença do operador divergência é,

$$\nabla_i (\Phi V) = \frac{1}{\Delta z_i} \left[\langle \Phi V \rangle_{i+\frac{1}{2}} - \langle \Phi V \rangle_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.2)$$

onde o procedimento sugerido em (4.1) é adotado na avaliação dos termos entre colchetes.

Com essas considerações passamos ao procedimento para a solução geral das equações de conservação. Para simplificar a notação, todo o desenvolvimento que se segue será feito para a hipótese de velocidades positivas. Naturalmente os algoritmos computacionais podem considerar a possibilidade de velocidades nulas ou negativas, utilizando os conceitos de célula doadora descritos acima.

4.1.

Equação de conservação de massa para o líquido

Da equação de conservação de massa para o líquido,

$$C_{11} \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (u_{11} \alpha_1) \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 - \alpha_{s2}) + \frac{\partial}{\partial z} [u_{12} (\alpha_2 - \alpha_{s2})] = \frac{\dot{q}_l}{A_T \rho_l}$$

Temos a seguinte equação na forma discretizada,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} C_{11} (\alpha_{1i}^{n+1} - \alpha_{1i}^n) + \frac{1}{\Delta z_i} C_{11} [(\alpha_1 u_{11})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\alpha_1 u_{11})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}] + \\ & + \frac{1}{\Delta t} (\alpha_{2i}^{n+1} - \alpha_{2i}^n) - \frac{1}{\Delta t} (\alpha_{s2i}^{n+1} - \alpha_{s2i}^n) \\ & + \frac{1}{\Delta z_i} [(\alpha_2 u_{12})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\alpha_2 u_{12})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}] - \frac{1}{\Delta z_i} [(\alpha_{s2} u_{12})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\alpha_{s2} u_{12})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}] = \frac{\dot{q}_l}{A_T \rho_l} \end{aligned} \quad (4.3)$$

No processo de linearização, foram consideradas as seguintes aproximações;

$$\begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha^k + \delta\alpha \\ (\alpha u)^{k+1} &= \alpha u^k + \alpha^k \delta u + u^k \delta\alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

Levando as equações (4.4) na equação (4.3) e após certa álgebra, tem-se a seguinte equação na forma linearizada;

$$\begin{aligned} D_{11} \cdot \delta\alpha_{2i} + D_{12} \cdot \delta u_{2i} + D_{13} \cdot \delta u_{1i} + L_{11} \cdot \delta\alpha_{2i-1} + L_{12} \cdot \delta u_{2i-1} \\ + L_{13} \cdot \delta u_{1i-1} = F_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Onde os coeficientes D_{1j} , L_{1j} e F_1 são apresentados no Apêndice A.

4.2.

Equação de conservação de massa para o sólido + líquido

Da equação de conservação de massa para o sólido + líquido

$$-\frac{\partial}{\partial z} (C_{s1} \alpha_1 u_1^+) + \frac{\partial}{\partial z} (u_{11} \alpha_1 + u_{12} \alpha_2) + \frac{\partial}{\partial z} [\alpha_{s2} (K_{s12} - 1) u_{12}] = \frac{\dot{q}_l + \dot{q}_s}{A_T}$$

Temos a seguinte equação na forma discretizada,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Delta z_i} C_{s1} \left[(\alpha_1 u_1^+)^{n+1} - (\alpha_1 u_1^+)^{n+1} \right] + \frac{1}{\Delta z_i} \left[(u_{11} \alpha_1)^{n+1} - (u_{11} \alpha_1)^{n+1} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta z_i} \left[(u_{12} \alpha_2)^{n+1} - (u_{12} \alpha_2)^{n+1} \right] + \frac{1}{\Delta z_i} \left[(\alpha_{s2} K_{sl2} u_{l2})^{n+1} - (\alpha_{s2} K_{sl2} u_{l2})^{n+1} \right] - (4.6) \\
& - \frac{1}{\Delta z_i} \left[(\alpha_{s2} u_{l2})^{n+1} - (\alpha_{s2} u_{l2})^{n+1} \right] = \frac{\dot{q}_l + \dot{q}_s}{A_T (\rho_s - \rho_s)}
\end{aligned}$$

As mesmas correlações apresentadas acima foram utilizadas para a linearização da equação (4.6). Assim, tem-se a forma discretizada e linearizada,

$$\begin{aligned}
D_{21} \cdot \delta \alpha_{2i} + D_{22} \cdot \delta u_{2i+\frac{1}{2}} + D_{23} \cdot \delta u_{1i+\frac{1}{2}} + L_{21} \cdot \delta \alpha_{2i-1} \\
+ L_{22} \cdot \delta u_{2i-\frac{1}{2}} + L_{23} \cdot \delta u_{1i-\frac{1}{2}} = F_2
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde os coeficientes D_{2j} , L_{2j} e F_2 são apresentados no Apêndice A.

4.3. Equação de quantidade de movimento para a região 1

A equação de conservação de quantidade de movimento para a região 1,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 u_1^*) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_1 u_1^{*2}) = \\
& -\frac{\alpha_1}{\rho_1^*} \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_1 g \sin \theta + \frac{1}{\rho_1^* A_T} \left[(\tau_b + \tau_i) P_i - F_{C1} - \tau_{w/l} P_{w/li} \right]
\end{aligned}$$

As equações de conservação de quantidade de movimento serão integradas no bloco representado pelo volume de controle $abcd$, da Figura 4.1.

Considerando a seguinte aproximação para a linearização da equação que representa o quadrado da velocidade,

$$\left[|v|v \right]^{n+1} \approx |v|^k \left[2v^{k+1} - v^k \right] \quad (4.8)$$

Os termos convectivos e acumulativos foram mantidos nas equações de quantidade de movimento. Os termos convectivos foram calculados no *time step* anterior. As velocidades e diferenças de velocidades que surgem nos termos de

força nas paredes e de interface são mantidas implícitas. Os diversos coeficientes que multiplicam estas velocidades são calculados no *time step* anterior, explícitos, também. As forças cisalhantes devido ao “salteamento” do cascalho (Bagnold) são calculadas também na iteração anterior

A equação final na forma linearizada e discretizada para a equação de conservação de quantidade de movimento para o leito, assume então, a seguinte forma,

$$\begin{aligned} D_{31} \cdot \delta \alpha_{2i+1} + D_{32} \cdot \delta u_{2i+\frac{1}{2}} + D_{33} \cdot \delta u_{1i+\frac{1}{2}} + D_{34} \cdot \delta p_i \\ + R_{34} \cdot \delta p_{i+1} = F_3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.4. Equação de quantidade de movimento para a região 2

Para a discretização e linearização da equação de quantidade de movimento para a suspensão, foi utilizado o mesmo processo apresentado acima para a equação de conservação de quantidade de movimento para o leito.

Da equação abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 u_2^*) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_2 u_2^{*2}) = \\ - \frac{\alpha_2}{\rho_2^*} \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_2 g \sin \theta - \frac{1}{\rho_2^* A_T} [(\tau_b + \tau_i) P_i + \tau_{wl2} P_{wl2}] \end{aligned}$$

A equação final na forma linearizada e discretizada para a equação de conservação de quantidade de movimento para a suspensão, assume então, a seguinte forma,

$$\begin{aligned} D_{41} \cdot \delta \alpha_{2i+1} + D_{42} \cdot \delta u_{2i+\frac{1}{2}} + D_{43} \cdot \delta u_{1i+\frac{1}{2}} + D_{44} \cdot \delta p_i \\ + R_{44} \cdot \delta p_{i+1} = F_4 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Onde os coeficientes D_{4j} , R_{4j} e F_4 são apresentados no Apêndice A.

4.5. Condições Iniciais

Condição na entrada (broca) para o líquido

Fluxo no leito

$$G_{l1} = \frac{C_{l1}\alpha_1}{C_{l1}\alpha_1 + C_{l2}\alpha_2} \frac{Q_l}{A_T} \quad (4.11)$$

Fluxo na suspensão

$$G_{l2} = \frac{C_{l2}\alpha_2}{C_{l1}\alpha_1 + C_{l2}\alpha_2} \frac{Q_l}{A_T} \quad (4.12)$$

Onde G representa a vazão por unidade de área.

Somando as equações (4.11) e (4.12) temos a velocidade do fluido na entrada da broca, dada pela relação,

$$u_{l1} = u_{l2} = \frac{Q_l}{A_T} \quad (4.13)$$

Condição na entrada (broca) para os sólidos

A alimentação de sólidos é dada pela broca, definindo a taxa de penetração como Γ_b (m/s) então,

$$Q_s = \Gamma_b A_b \quad (4.14)$$

onde Q_s é a vazão de sólidos e A_b é a área da broca, dada pela relação,

$$A_b = \frac{\pi D_b^2}{4} \quad (4.15)$$

4.6. Solução do Modelo

Após a discretização e linearização das equações o seguinte sistema tri-diagonal é obtido,

$$\begin{bmatrix} D_1 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ L_2 & D_2 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & D_3 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_4 & D_4 & R_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & L_N & D_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde N representa o número de elementos que o tubo será dividido. Para cada elemento, tem-se,

$$D_i = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$V_i = \begin{bmatrix} \delta\alpha_2 \\ \delta u_2 \\ \delta u_1 \\ \delta p \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Cada um dos termos d_{ij} , l_{ij} , r_{ij} e f_i das equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.21) são definidos pelos termos, na forma linearizada, apresentado nos itens anteriores.

O sistema de equações acima é resolvido simultaneamente, para V_i , para todos os elementos através de algoritmos para solução de matrizes tri-diagonais blocadas – algoritmo de Thomas (Tenkolkg *et al.*, 1992).