3
Modelo Transiente Proposto

Nos itens a seguir são apresentadas as equações do modelo implementado dadas pelas equações de conservação de massa para os sólidos e para o líquido e as equações de conservação de quantidade de movimento para o leito e para a suspensão. São apresentadas também as equações constitutivas tais como: relações entre tensões e forças que governam o problema com parâmetros do escoamento como velocidade e concentrações.

3.1.
Hipóteses do modelo

A seguir são apresentadas as principais hipóteses consideradas na construção do modelo transiente.

- Fluxo no interior do anular considerado isotérmico, transiente e unidimensional (da broca para a superfície);
- Modelo de duas camadas, onde a Região 1 é formada pelo leito de cascalhos e a Região 2, a porção do anular acima do leito depositado, formada pelo fluido de perfuração e cascalhos transportados;
- Sólidos e líquidos são incompressíveis;
- Deslizamento entre o sólido e o líquido na suspensão;
- Deslizamento entre o sólido e o líquido no leito;
- Sólidos em suspensão no fluido;
- Excentricidade variável no anular;
- Sólidos caracterizados por um diâmetro médio e uma esfericidade;
- Propriedades do fluido consideradas uniformes;
- Leito depositado definido por uma concentração “empacotada”. Uma deposição contínua de cascalhos afeta a altura do leito depositado, mas não a sua concentração; ou seja, nesta região a concentração da fase sólida é fixa e constante.

3.2.
Equações Básicas

O esquema do modelo é apresentado na Figura 3.1 onde a Região 1 é formada pelas partículas sólidas que se depositam devido ao efeito da gravidade, e a Região 2 é formada pelo fluido de perfuração, mais as partículas sólidas em suspensão.

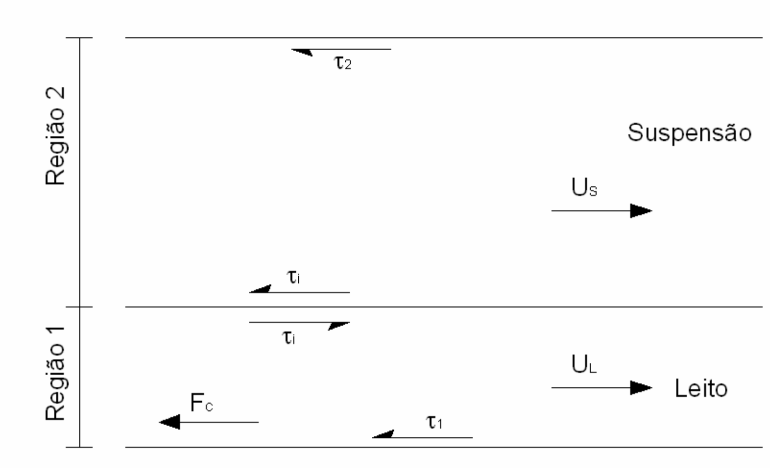

Figura 3.1 – Esquema do escoamento com duas camadas

As equações apresentadas a seguir relacionam as áreas de cada uma das regiões em cada uma das fases. As variáveis apresentadas a seguir estão descritas na Lista de Símbolos (início da tese).

Relações de área

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A_T \\ A_l + A_S &= A_T \\ A_{l1} + A_{S1} &= A_1 \\ A_{l2} + A_{S2} &= A_2 \\ A_{l2} + A_{l2} &= A_l \\ A_{S1} + A_{S2} &= A_S \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde A_1 e A_2 representam as áreas para o leito e suspensão; A_l e A_S as áreas de líquido e sólidos; A_{l1} e A_{S1} as áreas de líquido e sólido na Região 1 e A_{l2} e A_{S2} as áreas de líquido e sólido na Região 2.

Relações de Concentrações

$$\begin{aligned} C_{s_1} &= \frac{A_{s_1}}{A_1} & C_{s_2} &= \frac{A_{s_2}}{A_2} \\ C_{l_1} &= \frac{A_{l_1}}{A_1} & C_{l_2} &= \frac{A_{l_2}}{A_2} \\ C_{s_1} + C_{l_1} &= 1 & C_{s_2} + C_{l_2} &= 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde C_{s_1} e C_{s_2} representam as concentrações de sólido para o leito e suspensão e C_{l_1} e C_{l_2} as concentrações de líquido para o leito e suspensão.

Relações entre áreas e concentrações

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_1}{A_T} & A_{l_1} &= \left(1 - C_{s_1}\right) A_1 \\ \alpha_2 &= \frac{A_2}{A_T} & A_{l_2} &= \left(1 - C_{s_2}\right) A_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.1. Concentração de Sólidos no Leito

A concentração C_{S1} representa a concentração de sólidos no leito, ou seja, a porcentagem de sólidos depositados em relação ao fluido, no leito. Esta concentração é especificada e não-nula, para qualquer circunstância. Neste trabalho foi considerado que as partículas sólidas estão em seu grau máximo de compactação, ou seja, a concentração volumétrica média de sólidos é de 52%. Este valor representa a relação entre os volumes de uma esfera de raio *r* e de um cubo de lado *2r*.

3.2.2. Concentração de Sólidos na Suspensão

Por hipótese, os sólidos distribuem-se na região de suspensão de acordo com a equação de difusão turbulenta, descrito no item 2.6.1**.** Isto gera uma curva de distribuição com formato de uma exponencial, iniciando com uma concentração igual à do leito, tendendo para zero na parte superior do duto.

A expressão para a concentração média de sólidos na região de suspensão é dada pela equação (2.24), ou seja,

$$C_{s2} = C_f I_n \tag{3.4}$$

onde,

$$I_n = \int_{\theta_b}^{\pi/2} M \exp\left[-\frac{u_{sp} D_e}{2\varepsilon} \left(\sin\zeta - \sin\zeta_0 \right) \cos\theta \right] \cos^2 \zeta \, d\zeta \tag{3.5}$$

onde M é um fator função da geometria do anular $M = 1$ ou $M = 1 - k^2$, ε é o coeficiente de difusão, $\zeta_0 = \dfrac{\pi - \beta_1}{2}$, $\beta_1 = 2\arccos\left(1 - \eta\right)$, $\eta = \dfrac{h}{R_{ext}}$, ζ é a relação entre o diâmetro interno e externo do duto, θ é o ângulo do duto com a horizontal e C_f é definido pela seguinte relação,

$$C_f = \frac{C_{S1} D_e^{\,2}}{2A_2} \tag{3.6}$$

Portanto, podemos também escrever,

$$\alpha_{s2} = \frac{A_{s2}}{A_T} = C_{s2} \frac{A_2}{A_T} = C_{s2} \alpha_2 = \frac{C_{s1} D_e^{\,2}}{2A_T} I_n \tag{3.7}$$

com I_n definido em (3.5).

Observe que α_{s2} é, de fato, uma fração volumétrica efetiva (real) de sólidos na região de suspensão.

3.3. Equações de Conservação

São apresentadas neste parágrafo, as equações de conservação para o modelo.

Para escrevermos as equações de conservação para a fase sólida admitiremos que esta possa ser representada por um sistema contínuo (não discreto), de forma a representá-las, como no caso da fase líquida, por equações diferenciais.

São apresentadas, então as equações de conservação de massa para cada uma das fases (sólido e líquido) e as equações de conservação da quantidade de movimento para cada uma das regiões (leito e suspensão).

3.3.1.
Equação de continuidade para os sólidos

A equação de conservação de massa para os sólidos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(A_{S1}+A_{S2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S1}A_{S1}+u_{S2}A_{S2}\right)=\frac{\dot{m}_S}{\rho_s}=\dot{q}_S \tag{3.8}$$

ou,

$$C_{S1}\left[\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S1}A_1\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left(C_{S2}A_2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S2}C_{S2}A_2\right)=\dot{q}_S \tag{3.9}$$

Da expressão para C_{S2}, definida em (3.2.2), temos que $C_{S2}A_2 = A_{S2} = \alpha_{S2}A_T$. Portanto, (3.9) pode ser reescrita como,

$$C_{S1}\left[\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S1}A_1\right)\right]+\frac{\partial A_{S2}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S2}A_{S2}\right)=\dot{q}_S \tag{3.10}$$

Dividindo (3.10) por A_T (admitido constante ao longo de toda a linha), tem-se a equação de conservação de massa para os sólidos,

$$C_{S1}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S1}\alpha_1\right)\right]+\frac{\partial \alpha_{S2}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S2}\alpha_{S2}\right)=\frac{\dot{q}_S}{A_T} \tag{3.11}$$

3.3.2. Equação de continuidade para o líquido

A equação de conservação de massa para o líquido,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(A_{l1}+A_{l2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}A_{l1}+u_{l2}A_{l2}\right)=\dot{q}_l \tag{3.12}$$

Como $C_{l1}=1-C_{S1}=cte$ (leito) e $C_{l2}=1-C_{S2}$ (suspensão), definimos,

$$C_{l1}\left[\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}A_1\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left(1-C_{s2}\right)A_2+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1-C_{s2}\right)u_{S2}A_{S2}\right]=\dot{q}_l \tag{3.13}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}&C_{l1}\left[\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}A_1\right)\right]+\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S2}A_2\right)\\&-\frac{\partial}{\partial t}A_{s2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{S2}A_{s2}\right)=\dot{q}_l\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dividindo por A_T ,

$$\begin{aligned}&C_{l1}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}\alpha_1\right)\right]+\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l2}\alpha_2\right)\\&-\frac{\partial \alpha_{s2}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l2}\alpha_{s2}\right)=\frac{\dot{q}_l}{A_T}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Assim, tem-se a equação de conservação de massa para o líquido,

$$C_{l1}\left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}\alpha_1\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_2-\alpha_{s2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[u_{l2}\left(\alpha_2-\alpha_{s2}\right)\right]=\frac{\dot{q}_l}{A_T\rho_l} \tag{3.16}$$

Para facilitar a discretização das equações, somamos as equações (3.11) e (3.15) e, após pequena álgebra, obtém-se a seguinte equação que representa a conservação de massa de sólidos e líquido,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[C_{S1}\alpha_1\left(u_{S1}-u_{l1}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}\alpha_1+u_{l2}\alpha_2\right)+$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_{s2}\left(u_{S2}-u_{l2}\right)\right]=\frac{\dot{q}_l+\dot{q}_s}{A_T} \tag{3.17}$$

Admitindo deslizamento entre as fases nas Regiões 1 e 2, ou seja, considera-se que o sólido e o líquido podem se mover com velocidades diferentes. Este deslizamento é considerado através das seguintes relações, que são descritas em detalhes no Apêndice B.

$$u_{l1}-u_{S1}=f\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=u^{+}$$
$$u_{S2}=K_{SL2}u_{l2} \tag{3.18}$$

A equação (3.17) torna-se,

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{S1}\alpha_1 u_1^{+}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{l1}\alpha_1+u_{l2}\alpha_2\right)+$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_{s2}\left(K_{sl2}-1\right)u_{l2}\right]=\frac{\dot{q}_l+\dot{q}_s}{A_T} \tag{3.19}$$

A solução dessas equações inclui as incógnitas α_2, u_{l1}, u_{l2} e p. Lembrando que $u^{+}=u_{l1}-u_{S1}$ e $u_{S2}=K_{SL2}u_{l2}$. As duas equações para quantidade de movimento fornecem as expressões adicionais para um sistema completo de quatro equações e quatro incógnitas. Lembramos que as velocidades dos sólidos nas duas regiões são obtidas diretamente das equações (3.18).

3.3.3.
Equação de quantidade de movimento para o leito

A equação de conservação de quantidade de movimento para o leito é dada pela soma das equações de conservação de quantidade de movimento para as duas fases, constituindo assim um balanço de forças e quantidade de movimento para a mistura sólido e líquido, ou seja,

a) Equação para sólidos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_S u_{S1} A_{S1}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_S A_{S1} u_{S1}{}^2\right)=-A_{S1}\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_s g A_{S1} sen\theta\ +\left(\tau_b P_i - F_{C1}\right) \quad (3.20)$$

b) Equação para líquido

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_l u_{l1} A_{l1}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_l A_{l1} u_{l1}{}^2\right)=-A_{l1}\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_l g A_{l1} sen\theta\ +\left(\tau_i P_i - \tau_{wl1} P_{wl1}\right) \quad (3.21)$$

onde τ_b é a tensão cisalhante associada à força dispersiva de Bagnold, F_{C1} é a força de Coulomb, τ_i a tensão cisalhante na interface sólido-líquido, τ_{wl1} a tensão cisalhante entre o líquido e a parede, P_i é o perímetro da interface sólido-líquido e P_{wl1} o perímetro da Região 1.

Definindo a densidade de mistura, ρ_1^* para a Região 1,

$$\rho_1^* = \rho_s \frac{A_{S1}}{A_1} + \rho_l \frac{A_{l_1}}{A_1} = C_{S1}\rho_s + C_{l_1}\rho_l \quad (3.22)$$

E a velocidade de mistura correspondente, u_1^*, tal que,

$$\rho_1^* u_1^* = C_{s1}\rho_s u_{s1} + C_{l1}\rho_l u_{l1} \quad (3.23)$$

Somando as equações (3.20) e (3.21), obtemos a equação de quantidade de movimento para a mistura sólido-líquido na Região 1. Após pequena álgebra,

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1^* u_1^* A_1\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_1^* u_1^{*2} A_1\right)= \\ -A_1\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_1^* A_1 g sen\theta\ - F_{C1} - \tau_{wl1} P_{wl1} + \left(\tau_b + \tau_i\right) P_i\end{gathered} \quad (3.24)$$

Dividindo a equação (3.24) por A_T , obtemos a seguinte forma,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_1\rho_1^*u_1^*\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1\rho_1^*u_1^{*2}\right)=\\&-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_1^*\alpha_1 gsen\theta\ +\frac{1}{A_T}\left[\left(\tau_b+\tau_i\right)P_i-F_{C1}-\tau_{wl1}P_{wl1i}\right]\end{aligned} \tag{3.25}$$

O último termo desta equação representa a queda de pressão devido aos efeitos dissipativos, devido ao atrito viscoso entre o fluido, sólido e parede do tubo.

Devemos destacar que foi ignorado na expressão do termo convectivo da equação (3.24) o termo contendo o quadrado da diferença das velocidades sólido-líquido, admitido pequeno quando comparado com $\rho_1^* u_1^{*2}$.

3.3.4. Equação de quantidade de movimento para a suspensão

O procedimento é análogo ao da Região 1. Lembrando, como na expressão para o leito de que admitiremos que possa ocorrer deslizamento entre as fases nesta região. Ou seja, as velocidades podem ser distintas $u_{S2} \neq u_{l2}$. Assim, temos,

a) Sólidos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_S u_{S2}A_{S2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_S A_{S2}u_{S2}{}^2\right)=\\&-A_{S2}\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_s gA_{S2}sen\theta\ -\left(\tau_b P_i+F_{C2}\right)\end{aligned} \tag{3.26}$$

b) Líquido

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_l u_{l2}A_{l2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_l A_{l2}u_{l2}{}^2\right)=\\&-A_{l2}\frac{\partial p}{\partial z}\ -\rho_l gA_{l2}sen\theta\ -\left(\tau_i P_i+\tau_{wl1}P_{wl1}\right)\end{aligned} \tag{3.27}$$

Definimos a densidade de mistura, ρ_2^*, para a Região 2

$$\rho_2^* = \rho_S \frac{A_{S2}}{A_2} + \rho_l \frac{A_{l2}}{A_2} = C_{S2}\rho_S + C_{l2}\rho_l \tag{3.28}$$

E a velocidade de mistura correspondente , tal que,

$$\rho_2^* u_2^* = C_{S2}\rho_S u_{S2} + C_{l2}\rho_l u_{l2} \tag{3.29}$$

Somando as equações (3.26) e (3.27), fazendo uso de (3.28) e dividindo pela área transversal do tubo, A_T obtém-se, a equação de conservação da quantidade de movimento para a suspensão,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_2 \rho_2^* u_2^*\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_2 \rho_2^* u_2^{*2}\right) = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial z} - \alpha_2 \rho_2^* g sen\theta$$
$$- \frac{1}{A_T}\left[\left(\tau_b + \tau_i\right) P_i + \tau_{wl2} P_{wl2} + F_{C2}\right] \tag{3.30}$$

De novo, o último termo da equação representa a queda de pressão devida aos efeitos dissipativos; ou seja, devida ao atrito viscoso entre o fluido, os sólidos e a parede do tubo.

Como no caso do leito, foi desprezado o termo convectivo devido à diferença de velocidade na suspensão.

Uma vez apresentadas as equações diferenciais que governam os problemas, torna-se necessário apresentar as equações que relacionam as forças e tensões cisalhantes. Estas expressões são apresentadas a seguir.

3.3.5.
Tensões Cisalhantes na Parede e Interface

As tensões cisalhantes na parede e na interface entre as fases podem ser expressas como função do coeficiente de atrito de Fanning e são dadas pelas seguintes relações,

$$\tau_{wl} = \frac{1}{2} f_l \cdot \rho_l \cdot |u_l| \cdot u_l$$
$$\tau_i = \frac{1}{2} f_i \cdot \rho_l \cdot |u_{l2} - u_{l1}| \cdot (u_{l2} - u_{l1}) \tag{3.31}$$

onde τ_{wl} é o atrito entre a parede do duto e os cascalhos e τ_i é o atrito entre as duas regiões.

3.3.6. Força de Coulomb

A Força de Coulomb ocorre devido ao peso submerso das partículas sólidas, e pode ser calculada através da integração do perfil hidrostático de pressões ao longo do perímetro do leito.

Vamos admitir inicialmente que o leito está restrito à região abaixo do duto interno, caracterizando o Caso 1 do Apêndice C. Da Figura C.1 deste anexo obtemos para o semi-ângulo $\frac{\beta}{2}$,

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 - \frac{h_s}{R} \tag{3.32}$$

A força normal por unidade de comprimento do duto (formando ângulo θ com a horizontal) resultante da ação dos sólidos atuando sobre um ângulo β (Figura C.1) é,

$$F_N = 2C_{S1}(\rho_S - \rho_l)gR^2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\cos\theta \tag{3.33}$$

A força de atrito entre os sólidos que se deslocam e a parede é $F_c = \mu_c F_N$, onde μ_c é o coeficiente de Coulomb. Logo,

$$F_C = 2\mu_c C_{S1}(\rho_S - \rho_l)gR^2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\cos\theta \tag{3.34}$$

ou ainda,

$$F_C = 2\mu_c C_{S2}\left(\rho_S - \rho_l\right) gR^2 G(\beta)\cos\theta \tag{3.35}$$

onde

$$G(\beta) = \text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.36}$$

Numa situação mais geral, a altura do leito pode ocupar as situações descritas como Caso 2 ou Caso 3 (Apêndice C) isto é, no nível, acima ou abaixo do duto interno. Nessas duas circunstâncias, o atrito de Coulomb deve incluir também o atrito do sólido com a parede do duto interno. Logo, na forma geral temos as seguintes expressões:

Caso 1 : $(h < h_i)$

$$F_C = 2\mu_c C_{S1}\left(\rho_S - \rho_l\right) gR^2 G(\beta_1)\cos\theta \tag{3.37}$$

Caso 2 : $(h_i \le h < h_s)$

$$F_C = 2\mu_c C_{S1}\left(\rho_S - \rho_l\right) gR^2 \left[G(\beta_1) + \zeta^2 G(\beta_2)\right]\cos\theta \tag{3.38}$$

Caso 3 : $(h > h_s)$

$$F_C = 2\mu_c C_{S1}\left(\rho_S - \rho_l\right) gR^2 \left[G(\beta_1) + \zeta^2 \pi\right]\cos\theta \tag{3.39}$$

onde β_1 e β_2 os ângulos definidos no Apêndice C.

3.3.7. Condição de Deslizamento (Coulomb)

A força de Coulomb (F_{C1}) que aparece na equação de quantidade de movimento para o leito, equação (3.25), está definida no item 3.3.6. Todavia, esta equação é nula enquanto o leito sólido permanece imóvel. Somente quando $|u_{S1}| > 0$, a força é não nula.

A força estática F_{C1} é calculada a partir de um balanço de forças no leito e comparada com o atrito máximo, F_C, que corresponde ao ponto de deslizamento calculado pelas equações (3.37), (3.38) e (3.39) para uma dada altura de leito. Este permanece imóvel enquanto a condição a seguir for satisfeita,

$$F_{C1} < F_C \tag{3.40}$$

À medida que a velocidade da suspensão cresce, as forças cisalhantes na interface suspensão–leito também crescem, enquanto a altura do leito decresce. Um estado é atingido quando a força de atrito no perímetro do sólido com a parede do tubo, F_{C1}, não é suficiente para evitar o movimento do leito. Neste ponto $F_{C1} = F_C$ e a transição de leito estacionário para leito móvel acontece. A partir deste ponto a força de atrito é função da altura do leito (área A_1), sendo calculada através de uma das equações (3.37), (3.38) ou (3.39). Portanto, durante a solução do problema, a condição de equilíbrio estático entre F_{C1} e F_C deve ser considerada. Isto é feito comparando o somatório das forças atuando sobre os sólidos com a força de atrito de Coulomb, que atua na direção oposta ao movimento do leito. Ou seja, da equação (3.25),

$$-C_{S1}A_1\frac{\partial p}{\partial z} - C_{S1}A_1\rho_S g \sin\theta + \left(\tau_i + \tau_b\right)P_i C_{S1} > F_C \tag{3.41}$$

ou,

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_S g \sin\theta + \left(\tau_i + \tau_b\right)\frac{P_i}{A_1} > \frac{F_C}{A_1 C_{S1}} \tag{3.42}$$

Logo, satisfeita esta condição o leito encontra-se em movimento, e a força $F_{C1} = F_C$ dada pelas equações (3.37), (3.38) e (3.39). Por outro lado, se $|u_{S1}| = 0$, então $F_{C1} = 0$.

Esta relação pode também ser caracterizada dividindo a equação (3.42) pelo lado direito, ou seja, a condição de equilíbrio estático pode ser expressa através da razão,

$$R_{DC} = \frac{Abs\left[-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_S g \sin\theta + \left(\tau_i + \tau_b\right)\frac{P_i}{A_1}\right]}{F_C / A_1 C_{S1}} \tag{3.43}$$

E assim obtemos as duas possibilidades para deslizamento e não-deslizamento,

$R_{DC} > 1$	$F_{C1} = F_C$	Deslizamento
$R_{DC} \leq 1$	$F_{C1} = 0$	Não deslizamento

R_{DC} pode ser calculado para cada célula. Se a razão for superior à unidade então as forças atuantes sobre o leito são superiores à força de atrito elevadas, e este deve permanecer em movimento. Na medida em que esta se aproxima da unidade o leito tende a parar, e assim permanecerá, até que $R_{DC} > 1$.

3.4. Deslizamento Sólido–Líquido

Neste trabalho foi considerado que existe deslizamento relativo entre as fases no leito e na suspensão, ou seja, as fases podem se deslocar com velocidades distintas, tanto no leito como na suspensão. As expressões que correlacionam estas velocidades são apresentadas a seguir.

3.4.1. Deslizamento no leito

A expressão para ao deslizamento sólido-líquido no leito é dado pelas seguintes relações, cujo desenvolvimento encontra-se detalhado no Apêndice B.

- Para escoamento laminar

$$u_l - u_s = -\frac{\kappa}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \mathrm{sen}\theta\right) \tag{3.44}$$

onde

$$\kappa = \frac{d^2\left(1-C_s\right)^{4,7}}{9} \tag{3.45}$$

Que pode ser reconhecida como a equação de Darcy para meios porosos, onde κ é a permeabilidade do meio.

- Para escoamento turbulento

$$u_l - u_s = k_t\left[-\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \operatorname{sen}\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.46}$$

Onde,

$$\kappa_t = \sqrt{\frac{4d\left(1-C_s\right)^{4,7}}{3\rho C_{D_0}}} \tag{3.47}$$

3.4.2. Deslizamento na suspensão

O deslizamento entre as fases na suspensão está relacionado aos perfis de velocidade e concentração da mistura em escoamento. De fato, não existem ainda correlações para previsão dessas distribuições em tubulações transportando sólidos e líquidos em geral, embora existam alguns procedimentos de aplicação um tanto limitados, propostos para suspensões de sólidos como areia, cascalho e carvão em água.

Velocidade de deslizamento (Holdup)

Não existe um método geral para a determinação de *holdup* para todos os tipos de configuração de arranjo de fase para escoamento de sólidos e líquidos, assim como para líquido e gás.

Nas condições de regime de escoamento de suspensão simétrica, em escoamentos horizontais, é comum admitir que o deslizamento é desprezível, e que as concentrações de entrada e *in-situ* sejam idênticas. Embora esta hipótese não seja totalmente correta, é razoável para muitas situações, sendo utilizada para um grande número de aplicações como destacadas em Govier e Aziz (1972).

A equação clássica para o modelo de deslizamento – *drift* – para escoamento bifásico tem a seguinte forma, (para simplificar a notação não utilizaremos aqui o índice-*2* relativo à região da suspensão)

$$u_s = C_0 u_m + u_d^* \tag{3.48}$$

onde u_S, u_m, u_d^* e C_0 representam as velocidades de sólidos, de mistura, de deslizamento e C_0 o coeficiente de distribuição de concentração, respectivamente. Para escoamento horizontal sólido-líquido, Govier e Aziz (1972). sugerem que a velocidade u_d^* pode ser considerada nula. Neste caso, a equação (3.48) reduz-se a,

$$u_S = C_0 u_m \tag{3.49}$$

Para suspensões simétricas em baixa velocidade, assim, como para escoamento vertical, Toda *et al.*(1969), Newitt (1962) *et al.*, sugerem uma concentração aproximadamente uniforme, com C_0 tendendo para a unidade. Para velocidades mais elevadas os sólidos tendem a se localizar na região central e C_0 tende ao valor $1,2$ ou mesmo acima disso. De qualquer forma, pode-se mostrar que o *holdup*, ou deslizamento, pode ser bastante significativo nas suspensões assimétricas ou em escoamento com leito.

Tendo em vista a definição de velocidade de mistura, u_m, temos,

$$u_m = \frac{Q_S + Q_l}{Q_T} = \frac{u_S C_S A_T + u_l C_l A_T}{A_T} = C_S u_S + C_l u_l \tag{3.50}$$

Combinando (3.49) e (3.50) obtemos a expressão para a velocidade do sólido, u_S, relativa à do líquido em função de C_S e C_0, agora com o índice 2,

$$u_{S_2} = K_{Sl_2} u_{l_2} \tag{3.51}$$

onde,

$$K_{Sl_2} = \frac{1 - C_{S_2}}{1/C_0 - C_{S_2}} \tag{3.52}$$

Uma das tarefas difíceis para o cálculo da queda de pressão no escoamento bifásico (em regime permanente), consiste na estimativa do *holdup* entre as fases; ou seja, na determinação do coeficiente C_0 para os diversos arranjos geométricos de fase.

Para o caso particular do escoamento sólido-líquido, talvez um dos estudos mais completos disponíveis na literatura seja o trabalho proposto por Gaessler (1967). O estudo inclui análise detalhada de suspensão de sólido-água em tubos horizontais. Baseia-se em extenso banco de dados obtido pela Associação de Transporte Hidráulico da Alemanha em tubos de 46,125 e 160 mm de diâmetro interno. Carvão foi utilizado como sólido, com diâmetros médios na faixa de 0 a 3 mm e 3 a 5 mm. Uma parte importante dos resultados de Gaessler (1967) está descrita em Govier e Aziz (1972). Dentre os diversos resultados de interesse para nós, destacamos a expressão analítica para previsão da velocidade média dos sólidos relativa à velocidade de mistura. A partir de uma análise de balanço de quantidade de movimento (para escoamento permanente) Gaessler desenvolveu a seguinte expressão para a razão entre as velocidades $\varphi = u_S / u_m$,

$$(1-\varphi)^2 = \left(\frac{F_{r0}}{F_{rm}}\right)^2 \left(1 - \frac{C_s}{\varphi}\right)\left[\beta + \varphi^2 \frac{F_{rm}}{2}\left(\frac{s f_s^*}{s-1} - \frac{f_w}{s-1}\frac{1-C_s}{\varphi - C_s}\right)\right] \tag{3.53}$$

Onde $s = \dfrac{\rho_s}{\rho_l}$, f_s^* e f_w são coeficientes de atrito viscoso de Fanning e β é um parâmetro relativamente complexo, dependente de vários outros. Os dois números de Froude são assim definidos,

$$F_{r0} = \frac{u_0}{\sqrt{gD_h}} \quad ; \quad F_{rm} = \frac{u_m}{\sqrt{gD_h}} \tag{3.54}$$

Onde u_0 é a velocidade de sedimentação, u_m a velocidade de mistura e D_h o diâmetro hidráulico da região.

A equação (3.53) é implícita em φ, requerendo uma solução iterativa. Todavia, Gaessler mostrou através dos resultados sumarizados na Figura 3.2 que φ é fracamente dependente de s, C_s e dos coeficientes de atrito f_s^* e f_w, sendo dominantemente dependente dos números de Froude F_{r0} e F_{rm}.

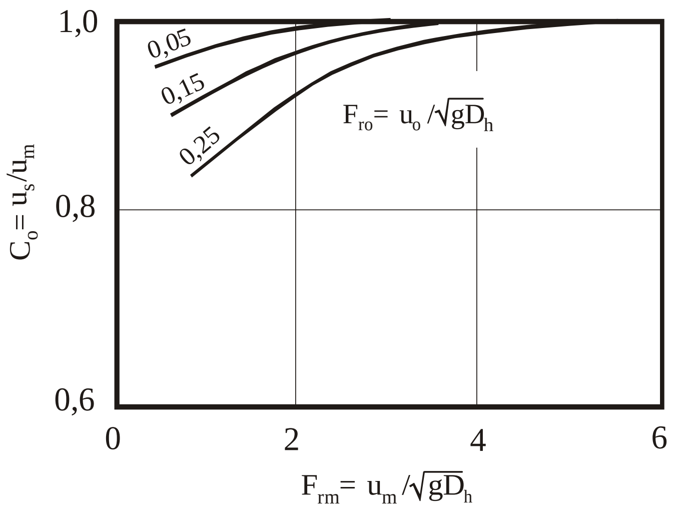

Figura 3.2 – Correlação para a razão entre velocidades.

Para evitar a complexidade da equação de Gaessler, foi desenvolvida neste trabalho uma correlação para gerar as curvas da Figura 3.2, cujo resultado está indicado a seguir.

A nova equação reproduz as curvas do gráfico com bastante precisão (com erros inferiores a 2%), sendo razoável sua utilização nos problemas aplicados, onde outras incertezas não são geralmente desprezíveis.

Devemos destacar ainda que a função $\varphi(F_{r0}, F_{rm})$ nada mais é do que o coeficiente de concentração C_0.

Assim temos,

$$C_0 = \varphi(F_{r0}, F_{rm}) = 1 - F_{r0}\left(1 - \frac{F_{rm}}{2,5 + 12F_{r0}}\right)^2 \qquad (3.55)$$

Onde a seguinte restrição deve ser aplicada: se $F_{r0} > 2,5 + 12F_{r0}$ então $C_0 = 1$.

Portanto, especificados os dois números de Froude, o valor numérico de C_0 é conhecido e, então, K_{Sl} é determinado.