

## 3 Método de Solução

A resolução das equações supracitadas no capítulo 2, requereu técnicas computacionais. Neste capítulo, se faz uma pequena revisão das técnicas e métodos utilizados neste trabalho.

### 3.1 Técnicas numéricas

Em geral, problemas envolvendo movimento de fluidos não possuem soluções analíticas. Os campos de velocidade e pressão devem ser calculados através de um método numérico de integração de equações diferenciais parciais.

Na literatura encontram-se alguns métodos para discretização, como o método de volumes finitos e por diferenças finitas, neste caso em particular foi utilizado o método de diferenças finitas.

Após a discretização, obtém-se um sistema não-linear de equações algébricas. Neste trabalho as equações apresentadas no capítulo 2 são altamente não lineares. Para este trabalho utilizou-se o método de Newton para resolver as equações de velocidades (2.34), (2.35), (2.36), viscosidade (2.40) e das pressões (2.46).

#### 3.1.1 Método de Diferenças finitas

A idéia básica do método de diferenças finitas é a de substituir as derivadas parciais de uma equação diferencial por aproximações baseadas em expansões das séries de Taylor na região dos pontos de interesse. Seja  $f$  um intervalo contínuo  $[a,b]$  e que possua derivadas até ordem  $N$  contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor nos permite escrever, para todo ponto  $x \in [a,b]$ .

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_0} + \dots + R_N \quad (3.1)$$

onde  $\Delta x = x - x_0$  e  $R_N$  é o resto

$$R_N = \frac{(\Delta x)^N}{N!} \left. \frac{d^N f}{dx^N} \right|_{\zeta}, \zeta \in [a, b] \quad (3.2)$$

Considerando uma malha unidimensional uniformemente espaçada, conforme figura 3.1, sendo  $\Delta x = x_i - x_{i+1}$ , deseja-se calcular a primeira derivada de uma função  $f$  no ponto  $x_i$ , utilizando a série de Taylor em torno do ponto  $x_i$ :

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \dots + R_N \quad (3.3)$$

Re-organizando a equação 3.3 em função da primeira derivada temos:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{(\Delta x)} + \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i - \dots - R_N \right] \quad (3.4)$$

Considerando  $\Delta x$  pequeno e desprezando os termos de ordem superior, a primeira derivada pode ser aproximada pelo quociente

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{(\Delta x)} \quad (3.5)$$

Sendo o Erro local por truncamento ELT:

$$ELT = \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i - \dots - R_N \right] \quad (3.6)$$

Cabe ressaltar que este erro aparece devido à utilização de um número finito de termos na série de Taylor.

Re-escrevendo  $f(x_i)$  como  $f_i$  e  $f(x_i \pm k\Delta x_i)$  como  $f_{i\pm k}$ , temos:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (3.7)$$

A expressão acima representa uma aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de  $f$  utilizando diferença a frente (*forward difference*). Da mesma forma, pode-se re-escrever a equação de Taylor a partir da expansão de  $f(x_i - \Delta x_i)$  em torno do ponto  $x_i$ , com isso tem-se:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.8)$$

que é outra aproximação da derivada de primeira ordem para a primeira derivada. Semelhante a equação 3.7, porém que nesta vez utilizou-se um ponto atrás do ponto  $x_i$ , por tal razão é chamada de diferença para trás (*backward difference*).

Fazendo-se uma manipulação algébrica obtém-se uma terceira forma de calcular a aproximação de primeira ordem para a primeira derivada, denominada de aproximação por diferenças centrais (*central difference*), visto que utilizado os pontos antes e depois do ponto  $x_i$ .

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.9)$$

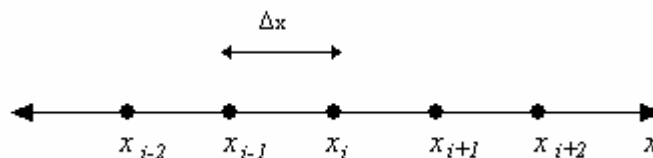


Figura 3-1 – Malha unidimensional uniformemente espaçados

### 3.1.2 Método de Newton

O método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não lineares é o método de Newton.

Partindo da idéia básica de uma equação não linear de uma variável, que consiste em se tornar um modelo local linear de uma função  $f(x)$  em torno de  $x_k$ , e este modelo é a reta  $L_k(x)$  tangente à função em  $x_k$ , como mostra a figura 3.2

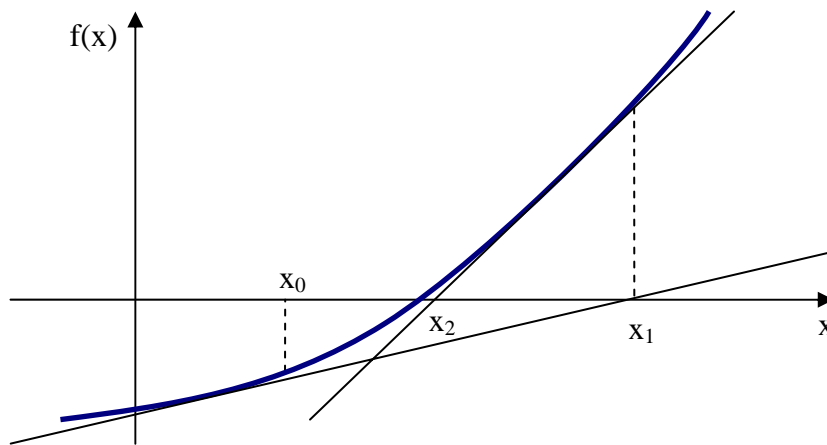


Figura 3-2 – Representação geométrica do método de Newton para equação não linear de uma variável.

Levando esta idéia para um sistema de equações não lineares, teremos: conhecida a aproximação  $x^{(k)} \in \text{domínio}(D)$ , para qualquer  $x \in D$ , existe  $c_i \in D$  tal que:

$$f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(c_i)^T (x - x^{(k)}) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Aproximando  $\nabla f_i(c_i)$  por  $\nabla f_i(x^{(k)})$ ,  $i = 1, \dots, n$  temos um modelo local linear para  $f_i(x)$  em torno de  $x^{(k)}$ :

$$f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Logo, o modelo local linear para  $F(x)$  em torno de  $x^{(k)}$  fica:

$$F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \quad (3.12)$$

Sendo  $J(x)$ , a matriz jacobina de  $F(x)$ , para um caso n-dimensional, define-se como:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A nova aproximação  $x^{(k+1)}$  será o zero do modelo local linear  $L_k(x)$ , logo:

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow J(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}) \quad (3.14)$$

Pode-se denotar  $s^{(k)}$  igual a  $(x - x^{(k)})$ , e portanto, tem-se que  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ , onde  $s^{(k)}$  é a solução do sistema linear, logo:

$$J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)}) \quad (3.15)$$

Note-se que para um dado  $x^{(k)}$ , a matriz jacobiana  $J(x^{(k)})$  é obtida em  $x^{(k)}$ , e em seguida a solução do problema é obtida na resolução da equação linear (3.15). Assim, o método iterativo de Newton requer basicamente: 1) a obtenção da matriz jacobiana em  $x^{(k)}$ ; 2) a resolução do sistema linear (3.15).

A convergência do método de Newton é quadrática em um ponto próximo a  $x^*$ , onde  $x^*$  é a solução do problema.

#### ALGORITMO:

Dados  $x_0$ , Erro1 e Erro2, faça:

Passo 1: calcule  $F(x^{(k)})$  e  $J(x^{(k)})$ ;

Passo 2: se  $\|F(x^{(k)})\| < \text{Erro1}$ , faça  $\bar{x} = x^{(k)}$  e pare;

caso contrario

Passo 3: obtenha  $s^{(k)}$ , solução do sistema linear:  $J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)})$ ;

Passo 4: faça:  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ ;

Passo 5: se  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \text{Erro2}$ , faça  $\bar{x} = x^{(k)}$  e pare;

Passo 6:  $k = k + 1$ ;

volte ao passo 1.

### 3.1.3

#### Método de Integração – Regra do Trapézio

Utilizando-se o polinômio de Lagrange como aproximação para a função entre dois nós igualmente espaçados, a integral da função recai na regra trapezoidal, como mostra a equação (3.16)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad (3.16)$$

Sendo  $h = x_1 - x_0$ , a altura do trapézio e as bases  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ , conforme a figura 3.3

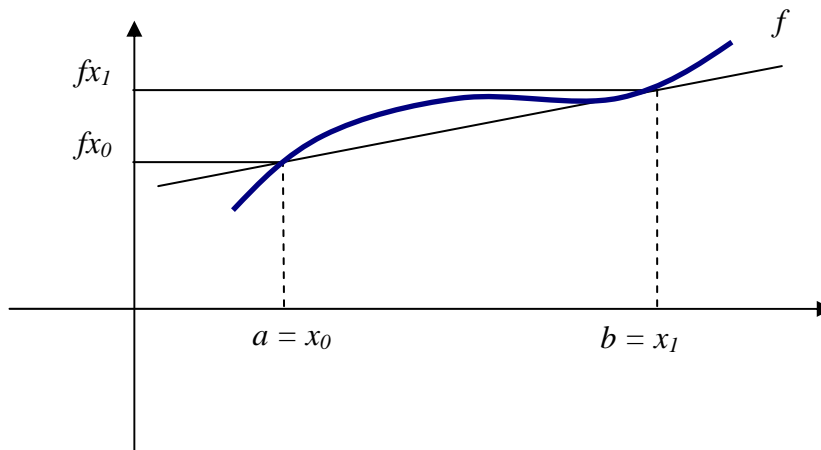


Figura 3-3 - Representação geométrica do método de Newton para equação não linear de uma variável.

Cabe ressaltar que a regra do trapézio utilizou-se para resolver os coeficientes da equação das pressões, conforme as equações (2.47), (2.48), (2.49).

## 3.2

### Passos para solução do problema

Para resolução das equações apresentadas no capítulo 2, procede-se o seguinte método de solução:

- Passo 1: calcular o campo de pressão para o escoamento Newtoniano  $p(\theta, z)$ ;
- Passo 2: calcular os gradientes de pressão  $\frac{\partial P}{\partial z}(\theta, z)$ ;  $\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta, z)$ ;
- Passo 3: calcular os perfis de velocidade  $u_r$  e  $w_r$  para cada ponto  $(\theta, z)$ ;
- Passo 4: calcular os coeficientes  $C_\theta$ ,  $C_z$ ,  $C_\theta$ ;
- Passo 5: calcular o campo de pressão para o escoamento não-Newtoniano  $p(\theta, z)$ ;
- Passo 6: Se  $\| p - p_{\text{anterior}} \| > \text{erro}$ , vai para o passo 2,  
Senão, vai para o pós - processamento.

#### 3.2.1

##### Passo 1 - calcular o campo de pressão para o escoamento Newtoniano $p(\theta, z)$

Para o caso de fluido Newtoniano, o problema é linear e o método de solução foi apresentado por Pina e Carvalho [12]. O campo de pressão do escoamento Newtoniano foi utilizado como chute inicial para o escoamento não-Newtoniano. Utilizou-se como dados de Entrada do problema não Newtoniano: Geometria do Problema (Raio interno e Externo, comprimento do poço), Excentricidade, Rotação do cilindro ( $\Omega$ ), índice de consistência e índice de comportamento.

3.2.2

**Passo 2- calcular os gradientes de pressão**  $\frac{\partial P}{\partial z}(\theta, z); \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta, z)$

Para calcular o gradiente de pressão, utilizou-se o método de diferenças centrais para calcular o gradiente de pressão nos nós internos e diferenças atrasadas, progressivas e/ou centrais nos nós externos e nos quatro cantos, conforme figura 3.4:

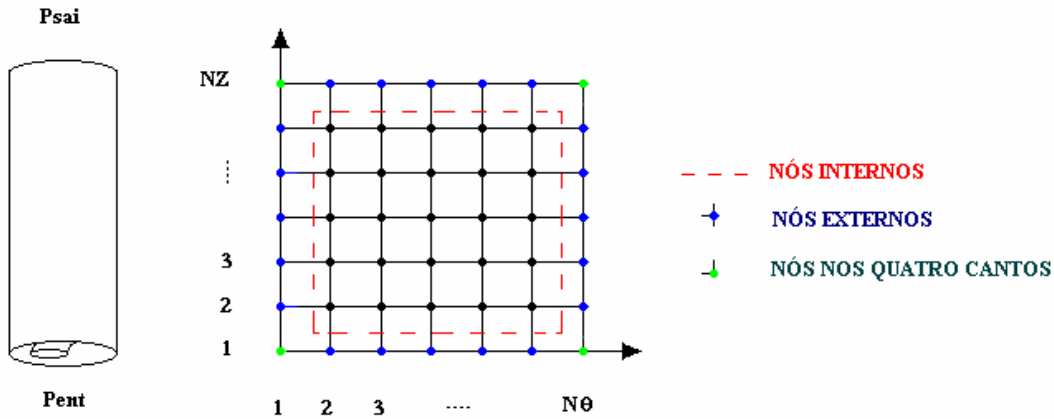


Figura 3-4 – Representação do canal para discretização

a) Cálculo do Gradiente de Pressão nos nós internos

$$\frac{\partial P_{(i,j)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j-1)}}{2\Delta\theta} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial P_{(i,j)}}{\partial z} = \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i-1,j)}}{2\Delta z} \tag{3.18}$$

b) Cálculo do Gradiente de Pressão nos nós externos

Fronteira a Esquerda

$$\frac{\partial P_{(i,1)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial P_{(i,1)}}{\partial z} = \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i-1,1)}}{2\Delta z} \tag{3.20}$$

Fronteira a Direita



$$\frac{\partial P_{(i,N\theta)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial P_{(i,N\theta)}}{\partial z} = \frac{P_{(i+1,N\theta)} - P_{(i-1,N\theta)}}{2\Delta z} \quad (3.22)$$

Fronteira Inferior

$$\frac{\partial P_{(1,j)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(1,j+1)} - P_{(1,j-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial P_{(1,j)}}{\partial z} = \frac{P_{(2,j)} - P_{(1,j)}}{\Delta z} \quad (3.24)$$

Fronteira Superior

$$\frac{\partial P_{(NZ,j)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(NZ,j+1)} - P_{(NZ,j-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial P_{(NZ,j)}}{\partial z} = \frac{P_{(NZ,j)} - P_{(NZ-1,j)}}{\Delta z} \quad (3.26)$$

c) Cálculo do Gradiente de Pressão nos quatro cantos

Canto inferior Esquerda

$$\frac{\partial P_{(1,1)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(1,2)} - P_{(1,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial P_{(1,1)}}{\partial z} = \frac{P_{(2,1)} - P_{(1,1)}}{\Delta z} \quad (3.28)$$

Canto inferior Direita

$$\frac{\partial P_{(1,N\theta)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(1,2)} - P_{(1,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial P_{(1,N\theta)}}{\partial z} = \frac{P_{(2,N\theta)} - P_{(1,N\theta)}}{\Delta z} \quad (3.30)$$

Canto superior Esquerda

$$\frac{\partial P_{(NZ,1)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(NZ,2)} - P_{(NZ,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial P_{(NZ,1)}}{\partial z} = \frac{P_{(NZ,1)} - P_{(NZ-1,1)}}{\Delta z} \quad (3.32)$$

Canto superior Direita

$$\frac{\partial P_{(NZ,N\theta)}}{\partial \theta} = \frac{P_{(NZ,2)} - P_{(NZ,N\theta-1)}}{2\Delta \theta} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial P_{(NZ,N\theta)}}{\partial z} = \frac{P_{(NZ,N\theta)} - P_{(NZ-1,N\theta)}}{\Delta z} \quad (3.34)$$

### 3.2.3

**Passo 3 – Calcular os perfis de velocidade  $u_r$  e  $w_r$  para cada ponto  $(\theta, z)$  - 1º Método Iterativo**

É importante observar que as equações (3.35), (3.37), (3.39), (3.41) relacionadas na pagina a seguir, para calcular os perfis de velocidade  $u_r$  e  $w_r$ , estão acopladas. Primeiramente estas equações serão discretizadas mediante o método de diferenças finitas e, após a discretização, será utilizado o método de Newton. Como descrito acima item 3.1.2, para utilização do método de Newton é necessário:

(1) Dados de entrada, para este caso utilizou-se o gradiente de pressão calculado no item 3.2.2

(2) Valor inicial ou chute inicial, neste caso, como valor inicial utilizou-se o perfil de velocidade Newtoniano, como segue:.

a) Equação da Velocidade  $u_r$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \text{sign}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \eta \frac{dfu}{dr} \right) \quad (3.35)$$

sendo o chute inicial ou valor inicial o perfil axial para o escoamento Newtoniano:

$$F_u(r) = -\frac{R_i^2}{4\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[ 1 - (r/R_i)^2 + \frac{(R^2/R_i) - 1}{\ln(R/R_i)} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) \right] / \text{sign}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right| \quad (3.36)$$

b) Equação da Velocidade  $w_r$  (Componente da Rotação)

$$0 = \frac{d}{dr} \left\{ r^3 \eta \frac{d}{dr} \left[ \frac{f_{Gw}}{r} \right] \right\} \quad (3.37)$$

sendo o chute inicial ou valor inicial, o perfil de Couette

$$f_{Gw}(r) = \frac{\Omega_i R_i^2}{R^2 - R_i^2} \left[ \frac{R^2}{r} - r \right] \quad (3.38)$$

c) Equação da Velocidade  $w_r$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \eta \frac{d}{dr} \left( \frac{f_w}{r} \right) \right) \quad (3.39)$$

sendo o chute inicial ou valor inicial, o perfil circunferencial do escoamento Newtoniano

$$w(r, z, \theta) = \frac{\Omega_i R_i^2}{R^2 - R_i^2} \left[ \frac{R^2}{r} - r \right] + \frac{R_i}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left\{ \frac{r}{R_i} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_i}{r} \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{R^2 - R_i^2} \left[ R_i^2 \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ \frac{r}{R_i} - \frac{R_i}{r} \right] \right\} \quad (3.40)$$

d) Equação da Viscosidade  $\eta(\dot{\gamma})$

$$\eta(\dot{\gamma}) = m \{ \dot{\gamma} \}^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.41)$$

onde  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma}^2 = r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{f_w}{r} \right) - \frac{d}{dr} \left( \frac{f_{Gw}}{r} \right) \right]^2 + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{df_u}{dr} \right]^2 \quad (3.42)$$

sendo o chute inicial ou valor inicial, as próprias derivadas do escoamento Newtoniano

$$\begin{aligned}
 |\dot{\gamma}| = & \left[ r \frac{\Omega_i R_i^2}{R^2 - R_i^2} \left[ -\frac{2R^2}{r^3} \right] + \frac{R_i}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{R_i} \frac{1}{r} - 2 \frac{R_i}{r^3} \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{R^2 - R_i^2} \left[ R_i^2 \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \right] \left[ -2 \frac{R_i}{r^3} \right] \right\} \right]^2 + \\
 & \left. + \left[ \frac{R_i^2}{4\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left( -\frac{2r}{R_i^2} + \frac{(R^2/R_i) - 1}{\ln(R/R_i)} \cdot \frac{1}{r} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

### 3.2.3.1 Discretização das Equações

a) Discretização dos Resíduos do perfil de velocidade axial  $u_r$ , circunferencial  $w_r$ , e da Viscosidade  $\eta(\dot{\gamma})$

- Resíduos das Equações da velocidade na Parede Interna  $R_i$  ( $i = 1$ ) - (condição de contorno)

$$R_{fu_1} = 0 \quad (3.44)$$

$$R_{fw_1} = 0 \quad (3.45)$$

$$R_{Gw1} = f_{Gw1} - \Omega_i R_i \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
 R_{\eta_i} = & m \left\{ r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{w(1)}}{r_{(1)}} \right) + \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{Gw(1)}}{r_{(1)}} \right) \right] \right]^2 + \\
 & \left. + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u(2)} - f_{u(1)}}{\Delta r} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

- Resíduos das Equações de velocidade no espaço anular

$$R_{fu_i} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left\{ \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u_{(i+1)}} - f_{u_{(i)}}}{\Delta r} \right) \right] - \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u_{(i)}} - f_{u_{(i-1)}}}{\Delta r} \right) \right] \right\} \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.48)$$

$$R_{Gwi} = \frac{1}{\Delta R} \left\{ \left[ \left( \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi}}{r_i} \right) \right] - \left[ \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i-1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi}}{r_i} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \right\} \quad (3.49)$$

$$R_{fw_i} = -\frac{1}{r_i} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left\{ \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i+1)}}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} \right) \right] - \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} - \frac{f_{w_{(i-1)}}}{r_{(i-1)}} \right) \right] \right\} \quad (3.50)$$

$$R_{\eta_i} = \eta_i - m \left\{ r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i+1)}}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w_{(i-1)}}}{r_{(i-1)}} \right) - \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right]^2 + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u_{(i+1)}} - f_{u_{(i-1)}}}{2\Delta r} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.51)$$

- Resíduo da Parede Externa  $R_0$  ( $i = NR$ ) - (condição de contorno)

$$R_{fu_{NR}} = 0 \quad (3.52)$$

$$R_{f_{w_{NR}}} = 0 \quad (3.53)$$

$$R_{G_{w_{NR}}} = f_{G_{w_{NR}}}$$

$$R_{\eta_{NR}} = \eta_{NR} - m \left\{ r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(NR)}}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{w_{(NR-1)}}}{r_{(NR-1)}} \right) \right] + \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{G_{w_{(NR)}}}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{G_{w_{(NR-1)}}}}{r_{(NR-1)}} \right) \right]^2 + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u_{(NR)}} - f_{u_{(NR-1)}}}{\Delta r} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.54)$$

**b) Discretização dos componentes da Matriz Jacobiana dos Resíduos dos perfis de Velocidade**

- Componentes da Matriz Jacobiana na parede interna (condição de contorno)

Para o resíduo  $R_{fu}$

$$\frac{\partial R_{fu(1)}}{\partial f_{u(1)}} = 1 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial R_{fu(1)}}{\partial f_{w(1)}} = \frac{\partial R_{fu(1)}}{\partial f_{G_{w(1)}}} = \frac{\partial R_{fu(1)}}{\partial f_{\eta(1)}} = 0 \quad (3.56)$$

Para o resíduo  $R_{fGw}$

$$\frac{\partial R_{G_{w(1)}}}{\partial f_{G_{w(1)}}} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial R_{G_{w(1)}}}{\partial f_{u(1)}} = \frac{\partial R_{G_{w(1)}}}{\partial f_{w(1)}} = \frac{\partial R_{G_{w(1)}}}{\partial f_{\eta(1)}} = 0 \quad (3.58)$$

Para o resíduo  $R_{fw}$

$$\frac{\partial R_{fw(1)}}{\partial f_{w(1)}} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial R_{fw(1)}}{\partial f_{u(1)}} = \frac{\partial R_{fw(1)}}{\partial f_{w(1)}} = \frac{\partial R_{fw(1)}}{\partial f_{\eta(1)}} = 0 \quad (3.60)$$

Para o resíduo  $R_{\eta}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(1)}}{\partial f_{u(1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_1\}^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} \cdot 2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left( \frac{f_{u(2)} - f_{u(1)}}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{-1}{\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(1)}}{\partial f_{w(1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_1\}^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{w(1)}}{r_{(1)}} \right) \right] + \\ & \left[ \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{Gw(1)}}{r_{(1)}} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{r_{(1)} \Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(1)}}{\partial f_{Gw(1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_1\}^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{w(1)}}{r_{(1)}} \right) \right] + \\ & \left[ \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{Gw(1)}}{r_{(1)}} \right) \right] \cdot \left( \frac{1}{r_{(1)} \Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(1)}}{\partial \eta(1)} = 1 \quad (3.64)$$

sendo  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{w(1)}}{r_{(1)}} \right) + \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(2)}}{r_{(2)}} - \frac{f_{Gw(1)}}{r_{(1)}} \right) \right]^2 + \\ + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u(2)} - f_{u(1)}}{\Delta r} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

- Componentes para a matriz jacobiana para o espaço anular

Para o Resíduo  $R_{fu}$

$$\frac{\partial R_{f_{u(i)}}}{\partial f_{u_{(i+1)}}} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial R_{f_{u(i)}}}{\partial f_{u_{(i-1)}}} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{f_{u(i)}}}{\partial f_{u_{(i)}}} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left\{ \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{-1}{\Delta r} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \right] \right\} \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial R_{f_{u(i)}}}{\partial \eta_{(i+1)}} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u_{(i+1)}} - f_{u_{(i)}}}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (3.69)$$



$$\frac{\partial R_{fu(i)}}{\partial \eta_{(i-1)}} = -\frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u(i)} - f_{u(i-1)}}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{fu(i)}}{\partial \eta_{(i)}} = \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u(i+1)} - f_{u(i)}}{\Delta r} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{f_{u(i)} - f_{u(i-1)}}{\Delta r} \right) \right] \right\} \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para o Resíduo  $R_{fw}$

$$\frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{w(i+1)}} = \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{r_{(i+1)} \cdot \Delta r} \right) \right] \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{w(i-1)}} = \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \cdot \\ \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{r_{(i-1)} \cdot \Delta r} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{w(i)}} = \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i+1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{-1}{r_{(i)} \cdot \Delta r} \right) \right] - \\ - \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_{(i-1)} + \eta_{(i)}}{2} \right) \left( \frac{1}{r_{(i-1)} \cdot \Delta r} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{\eta_{(i+1)}}} = \text{sign}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i+1)}}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} \right) \right] \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{\eta_{(i-1)}}} = \text{sign}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left( - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} - \frac{f_{u_{(i-1)}}}{r_{(i-1)}} \right) \right] \right) \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{w(i)}}{\partial f_{\eta_{(i)}}} = \text{sign}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r_i^2} \frac{1}{\Delta r} \left( \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \left( \frac{r_{(i+1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i+1)}}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{r_{(i-1)} + r_{(i)}}{2} \right)^3 \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w_{(i)}}}{r_{(i)}} - \frac{f_{u_{(i-1)}}}{r_{(i-1)}} \right) \right] \right) \quad (3.77) \end{aligned}$$

- Para o resíduo  $F_{Gw}$

$$\frac{\partial R_{Gwi}}{f_{Gwi+1}} = \frac{1}{\Delta R} \left[ \left( \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \right] \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{Gwi}}{f_{Gwi}} = \frac{1}{\Delta R} \left\{ \left[ \left( \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{-1}{r_i} \right) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i-1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{1}{r_i} \right) \right] \right\} \quad (3.79) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_{Gwi}}{f_{Gwi-1}} = \frac{1}{\Delta R} \left\{ - \left[ \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^3 \left( \frac{\eta_i + \eta_{i-1}}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{-1}{r_i} \right) \right] \right\} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial R_{Gwi}}{f_{\eta_{i+1}}} = \frac{1}{\Delta R} \left[ \left( \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi}}{r_i} \right) \right] \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial R_{Gwi}}{f_{\eta_i}} = \frac{1}{\Delta R} \left\{ \left[ \left( \frac{r_i + r_{i+1}}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi}}{r_i} \right) \right] - \left[ \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi}}{r_i} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \right\} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial R_{Gwi}}{f_{\eta_{i-1}}} = \frac{1}{\Delta R} \left\{ - \left[ \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta R} \left( \frac{f_{Gwi}}{r_i} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \right\} \quad (3.83)$$

- Para o resíduo  $R_\eta$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{u_{(i+1)}}} = -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{ \varphi_i \}^{\left( \frac{n-1}{2} \right)} \cdot 2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u_{(i+1)}} - f_{u_{(i-1)}}}{2\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{2\Delta r} \right) \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{u_{(i)}}} = 0 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{u_{(i-1)}}} = -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{ \varphi_i \}^{\left( \frac{n-1}{2} \right)} \cdot 2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u_{(i+1)}} - f_{u_{(i-1)}}}{2\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{-1}{2\Delta r} \right) \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{w(i+1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_i\}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w(i+1)}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w(i-1)}}{r_{(i-1)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{r_{(i+1)} 2\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{w(i)}} = 0 \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{w(i-1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_i\}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w(i+1)}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w(i-1)}}{r_{(i-1)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{-1}{r_{(i-1)} 2\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{Gw(i+1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_i\}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w(i+1)}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w(i-1)}}{r_{(i-1)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \cdot \left( \frac{1}{r_{(i+1)} 2\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{Gw(i)}} = 0 \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial f_{Gw(i-1)}} = & -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{\varphi_i\}^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w(i+1)}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w(i-1)}}{r_{(i-1)}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right] \cdot \left( \frac{-1}{r_{(i-1)} 2\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial \eta_{(i+1)}} = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial \eta_{(i)}} = 1 \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(i)}}{\partial \eta_{(i-1)}} = 0 \quad (3.95)$$

sendo  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi_i = & r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{w(i+1)}}{r_{(i+1)}} - \frac{f_{w(i-1)}}{r_{(i-1)}} \right) + \frac{1}{2\Delta r} \left( \frac{f_{Gwi+1}}{r_{i+1}} - \frac{f_{Gwi-1}}{r_{i-1}} \right) \right]^2 + \\ & + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u(i+1)} - f_{u(i-1)}}{2\Delta r} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.96)$$

- Componentes da matriz Jacobiana na parede externa (condição de contorno)

Para o resíduo  $R_{fu}$

$$\frac{\partial R_{f_{u(NR)}}}{\partial f_{u(NR)}} = 1 \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial R_{f_{u(NR)}}}{\partial f_{w(NR)}} = \frac{\partial R_{f_{u(NR)}}}{\partial f_{Gw(NR)}} = \frac{\partial R_{f_{u(NR)}}}{\partial f_{\eta(NR)}} = 0 \quad (3.98)$$

Para o resíduo  $R_{fGw}$

$$\frac{\partial R_{Gw(NR)}}{\partial f_{Gw(NR)}} \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial R_{Gw(NR)}}{\partial f_{u(NR)}} = \frac{\partial R_{Gw(NR)}}{\partial f_{w(NR)}} = \frac{\partial R_{Gw(NR)}}{\partial f_{\eta(NR)}} = 0 \quad (3.100)$$

Para o resíduo  $R_{fw}$

$$\frac{\partial R_{fw(NR)}}{\partial f_{w(NR)}} \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial R_{fw(NR)}}{\partial f_{u(NR)}} = \frac{\partial R_{fw(NR)}}{\partial f_{w(NR)}} = \frac{\partial R_{fw(NR)}}{\partial f_{\eta(NR)}} = 0 \quad (3.102)$$

Para o resíduo  $R_n$

$$\frac{\partial R_{\eta(NR)}}{\partial f_{u(NR)}} = -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{ \varphi_{NR} \}^{\left( \frac{n-1}{2} - 1 \right)} \cdot 2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u(NR)} - f_{u(NR-1)}}{\Delta r} \right) \right] \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{-1}{\Delta r} \right) \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(NR)}}{\partial f_{w(NR)}} = -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{ \varphi_{NR} \}^{\left( \frac{n-1}{2} - 1 \right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{w(NR)}}{r_{(NR)}} \right) + \right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{Gw(NR)}}{r_{(NR)}} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{r_{(NR)} \Delta r} \right) \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(NR)}}{\partial f_{Gw(NR)}} = -m \left( \frac{n-1}{2} \right) \{ \varphi_{NR} \}^{\left( \frac{n-1}{2} - 1 \right)} \cdot 2r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{w(NR)}}{r_{(NR)}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{Gw(NR)}}{r_{(NR)}} \right) \right] \cdot \left( \frac{1}{r_{(NR)} \Delta r} \right) \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial R_{\eta(NR)}}{\partial \eta_{(NR)}} = 1 \quad (3.106)$$

sendo  $\varphi_{NR}$ :

$$\varphi_{NR} = r^2 \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{w(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{w(NR-1)}}{r_{(NR-1)}} \right) - \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{f_{Gw(NR)}}{r_{(NR)}} - \frac{f_{Gw(NR-1)}}{r_{(NR-1)}} \right) \right]^2 + \\ + \left[ \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \frac{f_{u(NR)} - f_{u(NR-1)}}{\Delta r} \right) \right]^2 \quad (3.107)$$

### 3.2.4

#### Passo 4 – Calcular os Coeficientes $C_\theta$ , $C_\theta$ $C_z$

Após calcular os perfis de velocidade (passo 3), procede-se a calcular os coeficientes  $C_0$ ,  $C_\theta$ ,  $C_z$

$$C_\theta = \int_{R_i}^R f_w(r) dr \quad (3.108)$$

$$C_z = \int_{R_i}^R r f_z(r) dr \quad (3.109)$$

$$C_o = \int_{R_i}^R f_{Gw}(r) dr \quad (3.110)$$

Para calcular os coeficientes utiliza-se o método do trapézio, sendo a integral de cada coeficiente, conforme descrito abaixo:

$$C_\theta = C_\theta + \frac{f_{w(i)} + f_{w(i+1)}}{2\Delta r} \quad (3.111)$$

$$C_z = C_z + \frac{r_{(i)}f_{u(i)} + r_{(i+1)}f_{u(i+1)}}{2\Delta r} \quad (3.112)$$

$$C_0 = C_0 + \frac{f_{Gw(i)} + f_{Gw(i+1)}}{2\Delta r} \quad (3.113)$$

### 3.2.5

#### Passo 5 – Calcular o campo de pressão para o escoamento não-Newtoniano - segundo Método Iterativo $p(\theta, z)$

Após calcular os coeficientes (passo 4), procede-se a resolver a equação das pressões, conforme abaixo:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ C_\theta \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \right] + \frac{d}{dz} \left[ C_z \cdot \text{sign} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cdot \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right|^{\frac{1}{n}} \right] = -\frac{d}{d\theta} C_o \quad (3.114)$$

Tendo em vista que é uma equação altamente não linear utiliza-se novamente o método de Newton para resolver a equação das pressões. Esta foi discretizada conforme item 3.2.5.1

#### 3.2.5.1

##### Discretização da equação das Pressões

##### a) Discretização do Resíduo da equação das pressões

- Resíduo da Equação das Pressões no espaço anular (nós internos)

$$R_{(i,j)} = \left[ \left( \frac{C_{\theta(i,j+1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta \theta} \right|^{\frac{1}{n}} \right]$$



$$\begin{aligned}
 & - \left[ \left( \frac{C_{\theta(i,j-1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right|^{\frac{1}{n}} \right] \left( \frac{1}{\Delta\theta} \right) + \\
 & + \left[ \left( \frac{C_{z(i+1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right|^{\frac{1}{n}} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{C_{z(i-1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right|^{\frac{1}{n}} \right] \left( \frac{1}{\Delta z} \right) + \\
 & + \left( \frac{C_{o(i,j+1)} - C_{o(i,j-1)}}{2\Delta\theta} \right) \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

- Resíduo da Equação da pressão na fronteira a esquerda (condição de contorno):

$$\begin{aligned}
 R_{(i,1)} = & \left[ \left( \frac{C_{\theta(i,2)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta\theta} \right|^{\frac{1}{n}} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{C_{\theta(i,NTETA-1)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta\theta} \right|^{\frac{1}{n}} \right] \left( \frac{1}{\Delta\theta} \right) + \\
 & + \left[ \left( \frac{C_{z(i+1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right|^{\frac{1}{n}} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{C_{z(i-1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right|^{\frac{1}{n}} \right] \left( \frac{1}{\Delta z} \right) + \\
 & + \left( \frac{C_{o(i,2)} - C_{o(i,N\theta-1)}}{2\Delta\theta} \right) \quad (3.116)
 \end{aligned}$$

- Resíduo na fronteira a direita (condição de contorno):

$$R_{(i,N\theta)} = P_{(i,N\theta)} - P_{(i,1)} \quad (3.117)$$

- Resíduo na fronteira inferior (condição de contorno):

$$R_{(i,N\theta)} = P_{(1,j)} - P_{ent} \quad (3.118)$$

- Resíduo na fronteira superior (condição de contorno):

$$R_{(NZ,j)} = P_{(NZ,j)} - P_{sai} \quad (3.119)$$

b) Discretização dos componentes da matriz Jacobiana da Equação da Pressão

- Componentes da matriz jacobiana no espaço anular (nos internos)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,j)}}{\partial P_{(i,j+1)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta\theta^2} \right) \left( \frac{C_{\theta(i,j+1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \\ &\cdot \left| \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta\theta}{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}} \right| \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,j)}}{\partial P_{(i,j-1)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta\theta^2} \right) \left( \frac{C_{\theta(i,j-1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \\ &\cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta\theta}{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}} \right| \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,j)}}{\partial P_{(i,j)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{-1}{\Delta\theta^2} \right) \left[ \left( \frac{C_{\theta(i,j+1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \right. \\ &\left. \left| \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta\theta}{P_{(i,j+1)} - P_{(i,j)}} \right| + \right. \\ &\left. + \left( \frac{C_{\theta(i,j-1)} + C_{\theta(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}}{\Delta\theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta\theta}{P_{(i,j)} - P_{(i,j-1)}} \right| \right] + \\ &+ \left( \frac{-1}{\Delta z^2} \right) \left[ \left( \frac{C_{z(i+1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}} \right| + \\ & + \left( \frac{C_{z(i-1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \\ & \cdot \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}} \right| \end{aligned} \right\} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,j)}}{\partial P_{(i+1,j)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \left( \frac{C_{z(i+1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \\ & \cdot \left| \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i+1,j)} - P_{(i,j)}} \right| \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i)}}{\partial P_{(i-1,j)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \left( \frac{C_{z(i-1,j)} + C_{z(i,j)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \\ & \cdot \left| \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i,j)} - P_{(i-1,j)}} \right| \end{aligned} \quad (3.124)$$

- Componentes da matriz jacobiana na fronteira a esquerda - (condição de contorno)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,1)}}{\partial P_{(i,2)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} \right) \left( \frac{C_{\theta(i,2)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \\ & \cdot \left| \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}} \right| \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{(i,1)}}{\partial P_{(i,N\theta-1)}} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} \right) \left( \frac{C_{\theta(i,N\theta-1)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \\ & \cdot \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right|^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}} \right| \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{(i,1)}}{\partial P_{(i,1)}} = & \frac{1}{n} \left\{ \left( \frac{-1}{\Delta \theta^2} \right) \left[ \left( \frac{C_{\theta(i,2)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left| \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{P_{(i,2)} - P_{(i,1)}} \right| + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{C_{\theta(i,N\theta-1)} + C_{\theta(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}}{\Delta \theta} \right) \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{P_{(i,1)} - P_{(i,N\theta-1)}} \right| \right] + \\
 & + \left( \frac{-1}{\Delta z^2} \right) \left[ \left( \frac{C_{z(i+1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left| \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}} \right| + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{C_{z(i-1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}} \right| \right] \left. \right\} \quad (3.127)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{(i,1)}}{\partial P_{(i+1,1)}} = & \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \left( \frac{C_{z(i+1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \\
 & \left| \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i+1,1)} - P_{(i,1)}} \right| \quad (3.128)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{(i,1)}}{\partial P_{(i-1,1)}} = & \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\Delta z^2} \right) \left( \frac{C_{z(i-1,1)} + C_{z(i,1)}}{2} \right) \cdot \text{sign} \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \\
 & \left| \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right|^{\left( \frac{1}{n} - 1 \right)} \cdot \left( \frac{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}}{\Delta z} \right) \cdot \left| \frac{\Delta z}{P_{(i,1)} - P_{(i-1,1)}} \right| \quad (3.129)
 \end{aligned}$$

- Componentes da matriz jacobiana na fronteira a direita - (condição de contorno):

$$\frac{\partial R_{(i,N\theta)}}{\partial P_{(i,N\theta)}} = 1 \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial R_{(i,N\theta)}}{\partial P_{(i,1)}} = -1 \quad (3.131)$$

- Componentes da matriz jacobiana na fronteira inferior - (condição de contorno):

$$\frac{\partial R_{(1,j)}}{\partial P_{(1,j)}} = 1 \quad (3.132)$$

- Componentes da matriz jacobiana na fronteira superior - (condição de contorno):

$$\frac{\partial R_{(NZ,j)}}{\partial P_{(NZ,j)}} = 1 \quad (3.133)$$