2
Modelo Matemático

Neste capitulo, apresentam-se as equações que descrevem o escoamento no espaço anular com rotação do cilindro interno: As equações de Conservação de Massa e Quantidade de Movimento e equações constitutivas para os fluidos não newtonianos, considerando as seguintes hipóteses: Escoamento incompressível, isotérmico e em regime permanente.

2.1
Equação da Conservação da Massa

A lei de conservação de massa estabelece que a taxa de variação da massa com relação ao tempo de um sistema é nula:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{2.1}$$

Onde D/Dt é o operador derivada material, definido como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \quad . \tag{2.2}$$

ρ é a massa específica e $\underline{u}$ é o vetor velocidade. Considerando-se as hipóteses de regime permanente e fluído incompressível, a equação pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{2.3}$$

Escrevendo a equação em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

2.2
Equação da Quantidade de Movimento

A equação de conservação de quantidade de movimento estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento linear das partículas em um sistema é igual ao somatório das forças externas agindo sobre este sistema:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \qquad (2.5)$$

Usando a definição de derivada material, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \qquad (2.6)$$

Sendo $\underline{\underline{T}}$ o tensor das tensões que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \qquad (2.7)$$

$\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade, p é a pressão e $\underline{\underline{\tau}}$ é o tensor das tensões viscosas. Utilizando o modelo de Fluído Newtoniano Generalizado, o tensor das tensões viscosas é dado por:

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta(\dot{\gamma})\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \qquad (2.8)$$

sendo η a função viscosidade, $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ é a tensão taxa de deformação e $\dot{\gamma}$ é a intensidade de taxa de deformação.

2.3 Equação Constitutiva para a Viscosidade

Os modelos reológicos mais utilizados para descrever o comportamento de fluidos de perfuração são: Modelo Newtoniano, Modelo de Bingham e o Modelo de Potência. Neste estudo utilizaremos o modelo de Potência, visto que apresenta bons resultados conforme comentado nos trabalhos anteriormente mencionados no capitulo 1.3. No modelo de potência, a função viscosidade é dada por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1}, \qquad (2.9)$$

sendo m o índice de consistência (Pa.s^{-1}) e n o índice de comportamento, que pode ter os seguintes valores:

n = 1 para fluidos Newtonianos ($m = \mu$);

n < 1 para fluidos pseudoplásticos (polímeros);

n > 1 para fluidos dilatantes.

A Figura 2.1 apresenta esquematicamente o comportamento da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para diferentes valores no índice de potência.

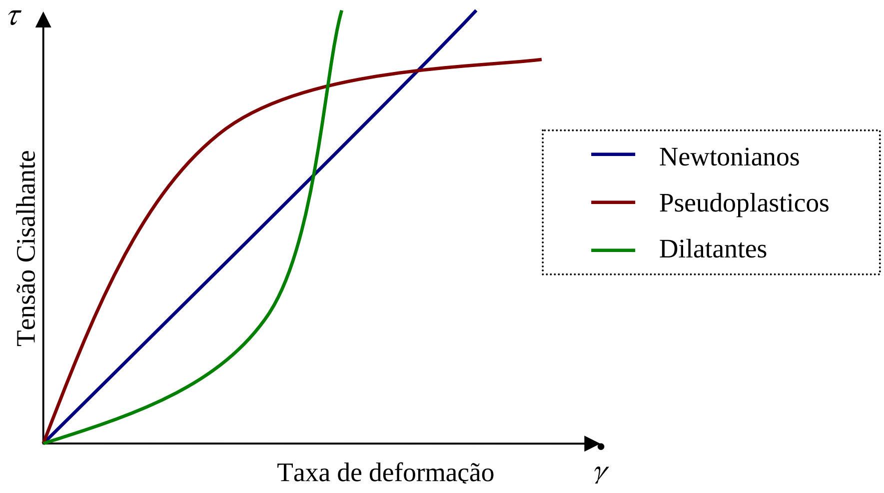

Figura 2-1– Gráfico representativo da Tensão Cisalhante com relação à Taxa de deformação

2.4
Geometria do Problema

O presente trabalho pretende estudar o escoamento em um espaço anular entre dois cilindros com excentricidade variável ao longo do eixo. Serão utilizadas coordenadas cilíndricas, onde (z) será a direção principal do escoamento, (r) será a direção radial e (θ) será a direção circunferencial do escoamento. O centro do sistema de coordenadas corresponde ao centro do cilindro interno com raio R_i constante, e a posição da parede externa do espaço anular é função das coordenadas z e θ, como mostrado na figura 2.2 abaixo:

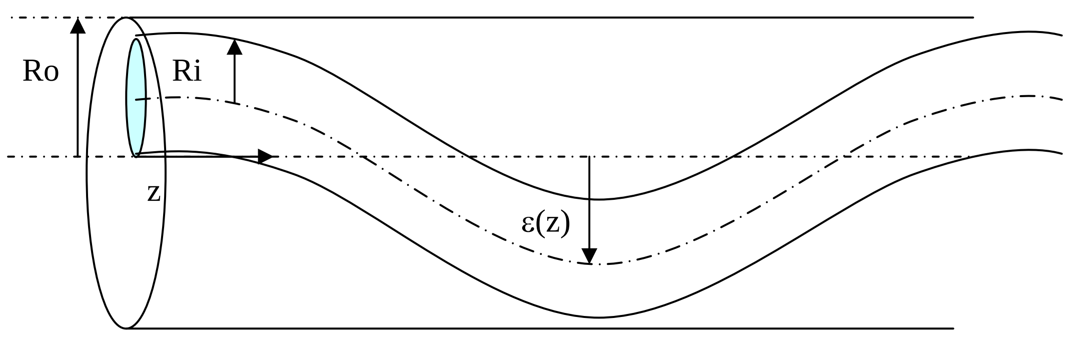

Figura 2-2 – Modelo Geométrico adotado, excentricidade senoidal

A excentricidade varia com a posição axial. A variação $\varepsilon(z)$ será considerada um dado de entrada do problema. A posição da parede do cilindro externo em relação ao sistema de coordenadas adotado *R* pode ser determinado em função da geometria do problema, como mostrado na Figura 2.3.

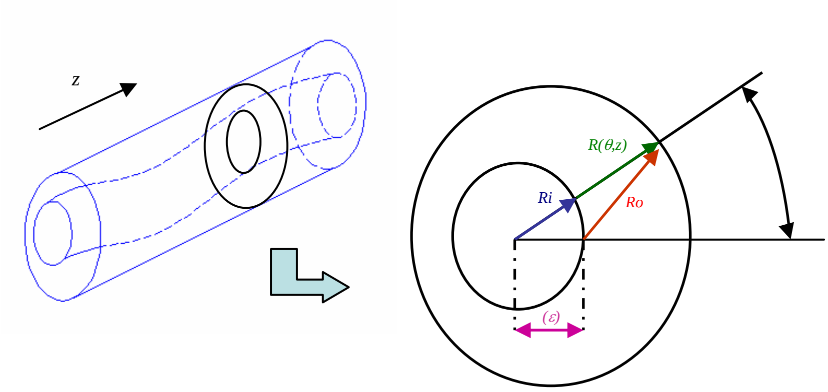

Figura 2-3 - Geometria do problema utilizada como ponto de partida.

A implementação computacional do modelo apresentado neste trabalho admite duas funções descrevendo a variação da excentricidade ao longo do eixo: linear ou senoidal.

O modelo com excentricidade linear tem como parâmetros a excentricidade de entrada e saída do poço. Adota-se a seguinte convenção de sinais: Quando o centro do cilindro externo está a direita do centro do cilindro interno, a excentricidade é positiva, caso contrario, é negativa.

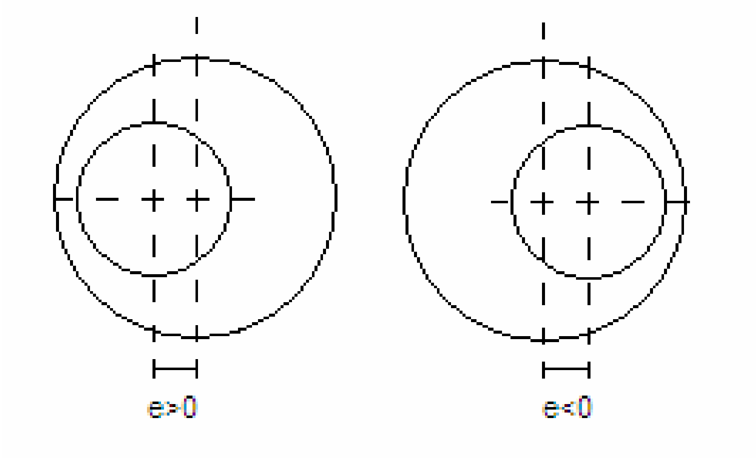

Figura 2-4 – Convenção de sinais para excentricidade linear

A variação senoidal da excentricidade é definida através de três parâmetros: a amplitude A_{mpl}, a excentricidade constante e_{cte}, e o comprimento de onda. A equação que descreve a variação da excentricidade é dada por:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 = e_{xconst} + Amplx \cdot \sin\left(\frac{z \cdot 2\pi}{\lambda}\right) \tag{2.10}$$

Para descrição de uma configuração helicoidal do cilindro interno, deve-se considerar duas excentricidade em direções perpendiculares entre si, como mostrado na figura 2.5:

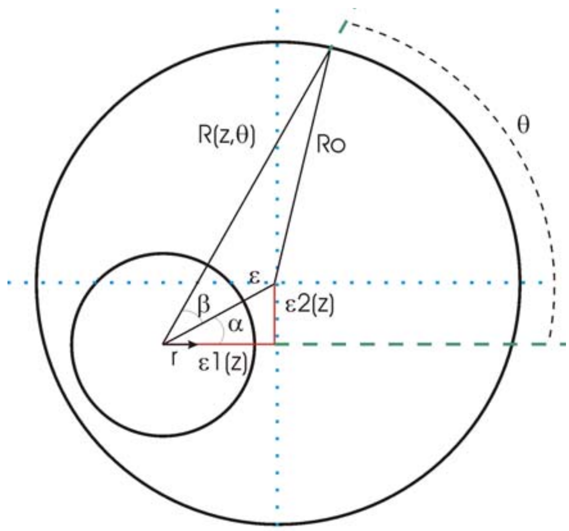

Figura 2-5– Geometria do sistema, duas excentricidades, Ro – Raio do Cilindro Externo, R(z,θ) – Raio , ε_1 - Excentricidade na direção horizontal, ε_2 - Excentricidade na direção vertical, ε - Resultante das excentricidades

Sendo:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 = e_{yconst} + Amply \cdot \sin\left(\frac{z \cdot 2\pi}{\lambda}\right) \tag{2.11}$$

Dessa forma a configuração helicoidal do cilindro interno pode ser descrita como:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \tag{2.12}$$

Com o ângulo β sendo

$$\beta = \theta - \alpha \tag{2.13}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right) \tag{2.14}$$

Assim, utilizando lei de cosenos, obtém-se a equação que descreve a posição da parede do cilindro externo R(β,z) para configuração helicoidal:

$$R(\beta, z) = \varepsilon \cdot \cos\beta + \sqrt{R_0^2 - \varepsilon^2 sen^2\beta} \tag{2.15}$$

2.5 Teoria da Lubrificação

O conceito básico da teoria da lubrificação é desprezar os termos da equação de Navier-Stokes que sejam bem menores que os demais. A estimativa da ordem de grandeza dos termos pode ser feita através de uma análise adimensional do problema. Em um poço de perfuração, pode-se fazer as seguintes hipóteses: o comprimento do poço é muito maior que o raio do poço e o escoamento é predominantemente na direção z (axial), desta forma pode-se afirmar que:

$$z, \theta \approx L \tag{2.16}$$

$$r \approx R_o - R_i \approx H \quad (\, H \text{ a espessura do anular }) \tag{2.17}$$

$$v << w; u \tag{2.18}$$

Estas hipóteses levam às seguintes conclusões:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} >> \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} >> \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \tag{2.20}$$

$$v \approx 0 \tag{2.21}$$

Escrevendo a Equação da Conservação da Quantidade de Movimento em coordenadas cilíndricas:

$$\rho\left(v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} + u\frac{\partial v}{\partial z} \right) =$$

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rr} \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] - \frac{\partial P}{\partial r} \qquad (2.22)$$

$$\rho\left(v\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v \cdot w}{r} + u\frac{\partial w}{\partial z} \right) =$$

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta} \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{z\theta} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \qquad (2.23)$$

$$\rho\left(v\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + u\frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz} \right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} \qquad (2.24)$$

Utilizando a teoria da lubrificação, as equações de conservação podem ser simplificadas:

Para a coordenada axial:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz} \right) \right] \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\eta(\dot{\gamma})\frac{du}{dr} \right) \qquad (2.26)$$

Para a coordenada circunferencial:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta} \right) \right] \qquad (2.27)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\eta(\dot{\gamma})\frac{dw}{dr} \right) \qquad (2.28)$$

Para a coordenada radial

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \tag{2.29}$$

O tensor taxa de deformação é dado por :

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial v}{\partial r} & r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{w}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{w}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & 2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & 2\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Utilizando a teoria da lubrificação tem-se:

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{w}{r}\right) & \dfrac{du}{dr} \\ r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{w}{r}\right) & 0 & 0 \\ \dfrac{du}{dr} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso a taxa de deformação é dada por

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}2\left(\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right)\right]^2 + \left[\frac{du}{dr}\right]^2\right)} = \left\{\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right)\right]^2 + \left[\frac{du}{dr}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{2.30}$$

Utilizando a equação constitutiva do modelo de potência, a viscosidade pode ser escrita como:

$$\eta(\dot{\gamma}) = m[\dot{\gamma}]^{n-1} = m\left\{\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right)\right]^2 + \left[\frac{du}{dr}\right]^2\right\}^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.31}$$

Como a pressão não depende da coordenada radial, as expressões para as velocidades axial e circunferencial podem ser dividas em dois termos, uma dependência explícita da coordenada radial vezes o termo de gradiente de pressão:

$$u(r,\theta,z) = sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot f_u(r) \tag{2.32}$$

$$w(r,\theta,z) = sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot f_w(r) + f_{Gw}(r) \tag{2.33}$$

Como a pressão ao longo do poço tende a decrescer, ou seja o gradiente de pressão é negativo, foi necessário utilizar a função *sign* para evitar o aparecimento de números imaginários para valores de índice de potência menores do que 1.

Sendo assim as equações de conservação podem ser re-escritas incorporando as equações 2.32 e 2.33:

Para a coordenada axial

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \eta \cdot sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{df_u}{dr} \right) \tag{2.34}$$

Para a coordenada circunferencial

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \eta \frac{d}{dr}\left(\frac{f_w}{r}\right)\right) \tag{2.35}$$

$$0 = \frac{d}{dr}\left\{ r^3 \eta \frac{d}{dr}\left[\frac{f_{Gw}}{r}\right]\right\} \tag{2.36}$$

Na coordenada circunferencial, a equação de conservação da quantidade de movimento foi dividida em duas partes, uma em função do gradiente de pressão e a outra em função da rotação do cilindro interno.

Com as equações 2.32 e 2.33 os componentes do tensor taxa de deformação serão as próprias derivadas das velocidades estipuladas:

$$\frac{du}{dr} = sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{df_u}{dr} \tag{2.37}$$

$$\frac{w}{r} = sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{f_w}{r} + \frac{f_{Gw}}{r} \tag{2.38}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right) = sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{f_w(r)}{r}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{f_{Gw}(r)}{r}\right) \tag{2.39}$$

Logo a viscosidade da equação (2.31) pode ser reescrita considerando as derivadas (2.37) e (2.39):

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\left\{ r^2\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{f_w(r)}{r}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{f_{Gw}(r)}{r}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{dfu}{dr}\right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.40}$$

A Equação da Continuidade em coordenadas cilíndricas, considerando a equação (2.21) é escrita como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{2.41}$$

Utilizando o Teorema de Leibnitz para integrar a equação na direção radial, tem-se

$$\frac{d}{d\theta}\int_{R_i}^{R} w dr + \frac{d}{dz}\int_{R_i}^{R} r u dr = 0 \tag{2.42}$$

Assim considerando as velocidades estipuladas mencionadas nas equações (2.32) e (2.33) tem-se:

$$\frac{d}{d\theta}\int_{R_i}^{R}\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) \cdot \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}} \cdot f_w(r) + f_{Gw}(r)\right] dr +$$

$$+\frac{d}{dz}\int_{R_i}^{R} r\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}}\cdot f_u(r)\right]dr = 0 \qquad (2.43)$$

Separando cada integral em função de f_w f_{Gw} e $f_{u,}$, tem-se:

$$\frac{d}{d\theta}\int_{R_i}^{R}\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}}\cdot f_w(r)\right]dr + \frac{d}{dz}\int_{R_i}^{R} r\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}}\cdot f_u(r)\right]dr +$$

$$+\frac{d}{d\theta}\int_{R_i}^{R}[f_{Gw}(r)]dr = 0 \qquad (2.44)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}}\cdot\int_{R_i}^{R} f_w(r)dr\right] + \frac{d}{dz}\left[sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}}\cdot\int_{R_i}^{R} r\cdot f_u(r)dr\right] =$$

$$-\frac{d}{d\theta}\int_{R_i}^{R}[f_{Gw}(r)]dr \qquad (2.45)$$

Assim a equação para calcular a pressão em cada ponto (z,θ):

$$\frac{d}{d\theta}\left[C_\theta\cdot sign\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|^{\frac{1}{n}}\right] + \frac{d}{dz}\left[C_z\cdot sign\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\cdot\left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{\frac{1}{n}}\right] = -\frac{d}{d\theta}C_o \qquad (2.46)$$

onde :

$$C_\theta = \int_{R_i}^{R} f_w(r)dr \qquad (2.47)$$

$$C_z = \int_{R_i}^{R} r f_z(r)dr \qquad (2.48)$$

$$C_o = \int_{R_i}^{R} f_{Gw}(r)dr \qquad (2.49)$$

As equações da velocidade (2.34), (2.35), (2.36) e viscosidade (2.40) estão acopladas e serão resolvidas através de um método iterativo. Após resolver este conjunto de equações se iniciará um segundo processo iterativo para resolver a equações das pressões (2.46). A descrição detalhada desde processo será descrita no capitulo 3 a seguir.