

7

Avaliação do Título Conversível pelo Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC)

7.1

Introdução

O Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC), desenvolvido por Longstaff e Schwartz [30] para o apreamento de opções americanas tradicionais, baseia-se na técnica de programação dinâmica, onde a cada instante anterior à data de vencimento da opção americana o proprietário compara o valor obtido a partir do exercício antecipado com o seu valor de continuação, para então tomar a decisão ótima. A estratégia de exercício ótimo da opção americana é determinada fundamentalmente pela expectativa condicional do seu valor de continuação. A grande contribuição dos autores foi identificar que a expectativa condicional pode ser estimada a partir de informações obtidas na simulação usando o método dos mínimos quadrados ordinários.

Desta forma, este método de apreamento fundamenta-se na estimação dos valores de manter a opção “viva” em cada instante de tempo, que é obtido por aproximação através de uma função de regressão (mínimos quadrados ordinários), resultando em uma função de expectativa condicional para cada instante de tempo.

Assim, o valor de continuação é encontrado a partir da função de expectativa condicional. A partir dos valores do ativo objeto no vencimento da opção obtidos por simulação, os valores para a opção nos casos em que houver o exercício da mesma são então descontados até a data anterior ao vencimento. Estes valores descontados são tomados para se realizar a regressão com os preços do ativo objeto na data anterior ao vencimento encontrados na simulação correspondente, e o resultado é a

função que representa o valor de continuação, chamada de função de expectativa condicional.

O valor da opção na data anterior ao vencimento será então o maior entre o valor obtido através da função de expectativa condicional e os valores da opção nos casos em que houver o exercício da opção nesta data.

Este procedimento deve ser então realizado recursivamente até o instante imediatamente seguinte à data de emissão. Após identificar a matriz de fluxo de caixa gerada a partir das decisões ótimas de exercício, o valor do derivativo será então obtido descontando-se pela taxa livre de risco todos os fluxos a valor presente, e obtendo-se a média de todas as trajetórias.

Desta forma, assim como no Modelo de Grand, Vora e Weeks (GVW), descrito no capítulo 8, o valor esperado da opção para cada instante é determinado recursivamente. A maior vantagem do Modelo MQMC frente aos demais métodos de avaliação baseados em simulações é o fato do valor esperado da opção só precisar ser calculado uma única vez, reduzindo consideravelmente o tempo computacional exigido. Algumas vantagens do modelo são:

- Permite a avaliação de derivativos com características de opções americanas e dependentes do caminho;
- Flexibilidade para avaliar opções envolvendo diferentes processos estocásticos e características específicas;
- Velocidade de processamento quando comparado com os demais modelos de apreçamento baseados em simulações;
- Avaliação de opções que dependem de múltiplos fatores;
- Precisão.

Com o objetivo de descrever o Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC), suas etapas e procedimentos de implementação, é apresentada abaixo uma aplicação do mesmo para a avaliação de uma opção de venda americana, exemplo apresentado também no artigo de Schwartz e Longstaff.

Considerou-se a possibilidade de exercício da opção em 3 datas, simulando-se apenas oito trajetórias de preços para o ativo objeto. A taxa de juros livre de risco considerada foi de 6%, o preço de exercício da opção igual a \$1,10, e o preço do ativo objeto na data de emissão igual a \$1.

O primeiro passo é gerar a matriz com os preços do ativo objeto em cada instante de tempo a partir das oito simulações, conforme apresentado na tabela 2.

		instante de tempo			
		t=0	t=1	t=2	T=3
Simulações	1	1	1,09	1,08	1,34
	2	1	1,16	1,26	1,54
	3	1	1,22	1,07	1,03
	4	1	0,93	0,97	0,92
	5	1	1,11	1,56	1,52
	6	1	0,76	0,77	0,9
	7	1	0,92	0,84	1,01
	8	1	0,88	1,22	1,34

Tabela 2 - Exemplo de matriz de simulações do preço do ativo objeto

Desta forma, em cada um dos instantes de tempo em que a opção poderia ser exercida, pode-se identificar onde a opção estaria *out of the money* e onde a mesma estaria *in the money*, conforme apresentado na tabela 3 (Situação da opção de acordo com o preço simulado para o ativo objeto).

		instante de tempo			
		t=0	T=1	t=2	T=3
Simulações	1	X	in the money	in the money	out of the money
	2	X	out of the money	out of the money	out of the money
	3	X	out of the money	in the money	in the money
	4	X	in the money	in the money	in the money
	5	X	out of the money	out of the money	out of the money
	6	X	in the money	in the money	in the money
	7	X	in the money	in the money	in the money
	8	X	in the money	out of the money	out of the money

Tabela 3 - Situação da opção de acordo com o preço simulado para o ativo objeto

Em seguida, identifica-se o fluxo de caixa da opção de venda na data de vencimento, ou seja, em T=3. Considerando o preço de exercício de \$1,10 para construção da tabela 4, tem-se:

		instante de tempo		
		t=1	t=2	T=3
Simulações	1	-	-	-
	2	-	-	-
	3	-	-	0,07
	4	-	-	0,18
	5	-	-	-
	6	-	-	0,20
	7	-	-	0,09
	8	-	-	-

Tabela 4 - Fluxo de caixa da opção em T=3

A etapa seguinte é identificar os termos a serem utilizados na regressão para se determinar a função de continuação. A primeira variável da regressão será representada pelos valores do ativo objeto em t=2 em cada uma das 8 trajetórias, mas tomados somente os casos em que esta está *in the money* nesta data. Assim, para t=2:

		t=2	t=2
Simulações	1	1,08	in the money
	2	1,26	out of the money
	3	1,07	in the money
	4	0,97	in the money
	5	1,56	out of the money
	6	0,77	in the money
	7	0,84	in the money
	8	1,22	out of the money

Tabela 5 - Valores do ativo objeto em t=2 que deixam a opção *in the money*

Já a segunda variável é obtida a partir do fluxo de caixa da opção em T=3, descontado por um período, referente a cada uma das trajetórias que manteriam a opção *in the money* em t=2, ou seja, trajetórias 1, 3, 4, 6 e 7.¹ Assim, os valores a serem descontados para data t = 2, conforme apresentado na tabela 6, são:

¹ Longstaff e Schwartz realizaram testes numéricos que indicaram que ao usar todas as simulações para obter resultados com a mesma precisão dos resultados obtidos com apenas simulações *in-the-money*, era necessário um número maior de funções básicas, o que elevava bastante o custo computacional do processo.

		instante de tempo			situação em t =2
		T=1	t=2	T=3	
Simulações	1	-	-	-	in the money
	2	-	-	-	out of the money
	3	-	-	0,07	in the money
	4	-	-	0,18	in the money
	5	-	-	-	out of the money
	6	-	-	0,20	in the money
	7	-	-	0,09	in the money
	8	-	-	-	out of the money

Tabela 6 - Valores a serem descontados para t = 2

O valor de continuação é obtido então pela regressão dos vetores X e Y apresentados na tabela 7. Para estimar o valor esperado de continuação da opção, condicionado ao preço da ação em t = 2, é feita uma regressão de Y com relação a X e X^2 .

		X	Y
		T=2	T=2
Simulações	1	1,08	$0,00 \times e^{-0,1}$
	2	-	-
	3	1,07	$0,07 \times e^{-0,1}$
	4	0,97	$0,18 \times e^{-0,1}$
	5	-	-
	6	0,77	$0,20 \times e^{-0,1}$
	7	0,84	$0,09 \times e^{-0,1}$
	8	-	-

Tabela 7 - Regressão no instante t=2

A função de continuação obtida pela regressão é:

$$E[Y / X] = -1,070 + 2,983X - 1,813X^2 \quad (17)$$

Com a função de expectativas condicionais (função de continuação), obtém-se o valor de continuação para cada trajetória de preços substituindo-se os valores de X na eq. (17). Estes valores devem ser então comparados com o valor do exercício antecipado para as trajetórias do preço do ativo objeto que deixam a opção *in-the-*

money em $t = 2$, quando faz sentido determinar se vale a pena exercer a opção ou esperar até o instante seguinte. A tabela 8 apresenta estes valores.

		exercício em $t=2$	continuação
Simulações	1	0,02 <	0,0367
	2		
	3	0,03 <	0,0459
	4	0,13 >	0,1175
	5		
	6	0,33 >	0,1520
	7	0,26 >	0,1564
	8		

Tabela 8 - Comparação do exercício antecipado em $t = 2$ com o valor de continuação

Comparando os valores apresentados na tabela 8, verifica-se que é ótimo exercer a opção no instante $t = 2$ nas trajetórias 4, 6 e 7. A tabela 9 mostra os fluxos de caixa recebidos pelo titular da opção considerando os exercícios antecipados em $t = 2$ nas trajetórias 4, 6 e 7, e aquele resultante em $t = 3$ nos casos em que não seria ótimo exercer a opção em $t=2$, ou seja, para as trajetórias 1, 2, 3, 5 e 8. É claro que quando a opção é exercida em $t = 2$, o fluxo de caixa final em $t = 3$ é igual a zero, pois a opção não pode ser exercida mais de uma vez. A tabela 9 representa o fluxo de caixa recebido pelo investidor condicionado ao não exercício da opção em uma data anterior ao instante $t = 2$.

		instante de tempo		
		$t=1$	$T=2$	$T=3$
Simulações	1	-	-	-
	2	-	-	-
	3	-	-	0,07
	4	-	0,13	-
	5	-	-	-
	6	-	0,33	-
	7	-	0,26	-
	8	-	-	-

Tabela 9 - Matriz de fluxo de caixa em $t=2$ e $T=3$

A avaliação do derivativo continua então recursivamente. O passo seguinte é examinar se a opção deve ser exercida em $t = 1$, e o procedimento utilizado é semelhante ao aplicado no instante $t = 2$.

Observando a matriz que contém as trajetórias de preços do ativo objeto na tabela 2, verifica-se que há cinco caminhos em que a opção está *in-the-money* em $t = 1$, representados pelas trajetórias 1, 4, 6, 7 e 8, conforme já mostrado na tabela 3.

Similarmente, X será representado pelos valores do ativo objeto em $t = 1$ em cada uma das 8 trajetórias, mas tomados somente os casos em que esta está *in the money* nesta data, conforme apresentado na tabela 10. Assim, para $t=1$:

	t=1	t=1
Simulações	1 1,09	In the money
	2 1,16	out of the money
	3 1,22	out of the money
	4 0,93	In the money
	5 1,11	out of the money
	6 0,76	In the money
	7 0,92	In the money
	8 0,88	In the money

Tabela 10 - Valores do ativo objeto em $t=1$ que deixam a opção *in the money*

Para estas trajetórias, Y será definido novamente como o valor descontado dos fluxos de caixa futuros da opção caso ela não seja exercida imediatamente em $t = 1$. Cabe destacar que os valores usados para Y correspondem aos fluxos de caixa subseqüentes em $t = 2$ ou $T = 3$ (tabela 9), e não aos valores estimados em $t = 2$ através da função de continuação (tabela 8), o que levaria a uma sobrevalorização do valor da opção, conforme afirmam Longstaff e Schwartz.

Assim, como a opção só pode ser exercida uma única vez, os fluxos de caixa futuros poderão ocorrer em $t = 2$ ou em $T = 3$. Obviamente, os fluxos de caixa referentes ao instante 2 deverão ser descontados por um período, e aqueles recebidos em $T = 3$ deverão ser descontados por dois períodos. Y é obtido então a partir do fluxo de caixa da opção em $t = 2$ ou em $T=3$ (tabela 9), descontado respectivamente por um ou dois períodos, referente a cada uma das trajetórias que manteriam a opção

in the money em $t = 1$, ou seja, trajetórias 1, 4, 6, 7 e 8. Assim, os valores a serem descontados para formar o vetor Y seriam, conforme apresentado na tabela 11:

		instante de tempo			situação em $t = 1$
		$t=1$	$t=2$	$T=3$	
Simulações	1	-	-	-	in the money
	2	-	-	-	out of the money
	3	-	-	0,07	out of the money
	4	-	0,13	-	in the money
	5	-	-	-	out of the money
	6	-	0,33	-	in the money
	7	-	0,26	-	in the money
	8	-	-	-	in the money

Tabela 11 - Valores a serem descontados para $t = 1$ de forma a compor o vetor Y

Conforme realizado na etapa anterior, o valor de continuação é obtido então pela regressão dos vetores X e Y apresentados na tabela 12. Para estimar o valor esperado de continuação da opção, condicionado ao preço da ação em $t = 1$, é feita uma regressão de Y com relação a X e X^2 .

		X	Y
		$t=1$	$t=1$
Simulações	1	1,09	$0,00 \times e^{-0,06}$
	2	-	-
	3	-	-
	4	0,93	$0,13 \times e^{-0,06}$
	5	-	-
	6	0,76	$0,33 \times e^{-0,06}$
	7	0,92	$0,26 \times e^{-0,06}$
	8	0,88	$0,00 \times e^{-0,06}$

Tabela 12 - Regressão no instante $t=1$

A função de continuação obtida pela regressão é:

$$E[Y / X] = 2,038 - 3,335X + 1,356X^2 \quad (18)$$

Com a função de expectativas condicionais (função de continuação), obtém-se o valor de continuação para cada trajetória de preços substituindo-se os valores de X na eq. (18). Estes valores devem ser então comparados com o valor do exercício

antecipado para as trajetórias do preço do ativo objeto que deixam a opção *in-the-money* em $t = 1$, quando faz sentido determinar se vale a pena exercer a opção ou esperar até o instante seguinte. A tabela 13 apresenta estes valores.

Simulações		exercício em $t=1$	continuação
	1	0,0100 <	0,0139
	2	-	-
	3	-	-
	4	0,1700 >	0,1092
	5	-	-
	6	0,3400 >	0,2866
	7	0,1800 >	0,1175
	8	0,2200 >	0,1533

Tabela 13 - Comparação do exercício antecipado em $t = 1$ com o valor de continuação

Comparando os valores apresentados na tabela 13, verifica-se que é ótimo exercer a opção no instante $t = 1$ nas trajetórias 4, 6, 7 e 8. A tabela 14 mostra os fluxos de caixa recebidos pelo titular da opção considerando os exercícios antecipados em $t = 1$ nas trajetórias 4, 6, 7 e 8, e aquele resultante em $t = 2$ e $t = 3$ nos casos em que não seria ótimo exercer a opção em $t=1$, ou seja, para as trajetórias 1, 2, 3 e 5. É evidente que quando a opção é exercida em $t = 1$, o fluxo de caixa final em $t = 2$ e $T = 3$ é igual a zero, pois a opção não pode ser exercida mais de uma vez. A tabela 14 representa o fluxo de caixa final recebido pelo investidor em cada uma das 8 trajetórias simuladas.

Simulações	Instante de tempo		
	$t=1$	$t=2$	$T=3$
	1	-	-
	2	-	-
	3	-	0,07
	4	0,17	-
	5	-	-
	6	0,34	-
	7	0,18	-
	8	0,22	-

Tabela 14 - Matriz de fluxo de caixa em $t=1$, $t = 2$ e $T=3$

Tendo identificado a estratégia de exercício em cada um dos instantes de tempo, as decisões de parada podem ser representadas pela matriz apresentada na tabela 15, onde o número 1 indica as datas onde a opção seria exercida, e cuja estratégia geraria o fluxo de caixa representado na tabela 14.

		instante de tempo		
		t=1	t=2	T=3
Simulações	1	-	-	-
	2	-	-	-
	3	-	-	1
	4	1	-	-
	5	-	-	-
	6	1	-	-
	7	1	-	-
	8	1	-	-

Tabela 15 - Matriz de decisões de parada

Após identificar a matriz de fluxo de caixa gerada a partir das decisões ótimas de exercício, o valor da opção é então obtido descontando-se todos os fluxos a valor presente, e obtendo-se a média de todas as trajetórias. Aplicando este procedimento, o valor encontrado para a opção de venda analisada é de 0,1144.

7.2 - Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) na avaliação do Liquid Yield Option Notes (LYON)

O LYON envolve as opções de venda e conversibilidade por parte do investidor, além da opção de compra por parte do emissor. Desta forma, o procedimento para apreçamento deste título a partir do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) deve abordar conjuntamente todas as opções presentes no título, considerando as estratégias ótimas do emissor e do investidor.

Seguindo o utilizado por Brennan e Schwartz [8], a premissa adotada aqui diz que cada parte (emissor e investidor) possui a estratégia ótima descrita a seguir e esperam que a outra parte faça o mesmo:

- os emissores seguem a estratégia de compra que minimiza o valor do título em cada instante;
- os investidores seguem as estratégias de venda e conversão que maximizam o valor do título em cada instante.

Assim, o investidor busca sempre maximizar o valor do título a todo instante, já que o derivativo em questão representa um investimento para o mesmo. Por outro lado, o emissor busca sempre minimizar o valor do derivativo, já que a partir da emissão este representa uma dívida para o mesmo. Este padrão de comportamento do investidor e do emissor definirá então as estratégias ótimas de conversão e exercício das opções de compra e venda, determinando as quatro condições de contorno para o apreçamento do título, que são a condição de compra, a condição de venda, a condição de conversão e a condição de vencimento, já descritas no Capítulo 5.

7.3

Metodologia

A metodologia para a avaliação do título conversível está descrita em 8 etapas, conforme apresentado abaixo:

1ª etapa)

Após gerar a matriz com os preços do ativo objeto em cada instante de tempo para cada trajetória simulada, o processo de apreçamento do título conversível se inicia com a verificação do exercício ótimo das opções e da conversibilidade no vencimento do mesmo (T). As decisões ótimas no vencimento são definidas na condição de contorno de vencimento definidas anteriormente, que mostra que o valor do título será o maior entre o valor de face e o valor de conversão.

2ª etapa)

Após determinar o valor do título conversível no vencimento (T), a etapa seguinte é identificar as variáveis que comporão a regressão, que resultará na função de continuação.

A primeira variável da regressão (X) que definirá a função de continuação será representada pelos valores do ativo objeto no instante imediatamente anterior ao vencimento (T-1) em cada uma das trajetórias simuladas, mas tomados somente os casos em que esta gerou o exercício de uma das opções ou da conversibilidade nesta data. De acordo com a estratégia ótima definida para o emissor, haverá o exercício da opção de compra quando o valor do título for maior que o máximo entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão. No que se refere às estratégias ótimas definidas para o investidor, haverá o exercício da opção de venda sempre que o preço de exercício da opção for maior que o valor do título, e o exercício da conversibilidade quando o valor de conversão superar o valor do título.

A segunda variável que comporá a regressão (Y) refere-se aos valores do título no vencimento referentes a estas trajetórias descontados até a data anterior ao vencimento (T-1).

3ª etapa)

Assim, a etapa seguinte é tomar os valores específicos do título no vencimento descontados para se realizar a regressão com os preços do ativo objeto na data anterior ao vencimento (T-1) encontrados na simulação correspondente, e o resultado será a função que representa o valor de continuação, ou seja, a função de expectativa condicional.

4ª etapa)

O valor da opção na data anterior ao vencimento (T-1) será obtido então a partir do seguinte procedimento:

Após substituir os valores do ativo objeto de cada trajetória encontrados para a data imediatamente anterior ao vencimento (T-1) na função de continuação, o resultado representa o valor do título conversível no caso de não haver o exercício da

convertibilidade ou das opções de compra e de venda. Desta forma, deve-se então comparar o resultado encontrado com o valor de conversão, além dos preços de exercício das opções de compra e venda, todos referentes ao instante imediatamente anterior ao vencimento (T-1):

- Como a estratégia do investidor é sempre de maximizar o valor do título:
 - Como dito, a função de expectativa condicional representa o valor do título considerando que não haveria o exercício da convertibilidade ou de uma das opções presentes no título conversível naquela data. Assim, como a convertibilidade é permitida em qualquer instante de tempo, através do exercício da convertibilidade, o investidor irá optar pelo maior valor entre aquele obtido através da função de expectativa condicional e o valor de conversão.
 - Da mesma forma, se for uma data em que há a possibilidade de exercício da opção de venda, o investidor irá optar através do exercício da opção de venda pelo maior valor entre aquele obtido através da função de expectativa condicional e o preço de exercício da opção de venda nesta data.

Para as trajetórias em que identificar-se o exercício da convertibilidade ou da opção de venda no instante T-1, o valor do título na data de vencimento (T) passa a ser então nulo, pois a existência do título conversível seria interrompida antes de sua maturidade em função do exercício de um dos direitos do investidor em T-1 (conversão ou exercício da opção de venda).

- Como a estratégia do emissor é sempre de minimizar o valor do título:
 - Quando o emissor exerce a opção de compra, o investidor recebe o maior entre o preço de exercício da opção e o valor de conversão. Assim, através do exercício ou não da opção de compra, o emissor optará pelo menor

valor entre aquele obtido através da função de expectativa condicional e o máximo entre o valor de conversão e o preço de exercício da opção de compra.

Da mesma forma que no caso do exercício da conversibilidade ou da opção de venda, para as trajetórias em que identificar-se o exercício da opção de compra no instante T-1, o valor do título na data de vencimento (T) passa a ser então nulo, pois a existência do título conversível seria interrompida antes de sua maturidade em função do exercício deste direito do emissor em T-1 (exercício da opção de compra).

5ª etapa)

A avaliação do derivativo continua então recursivamente. A etapa seguinte é examinar os exercícios ótimos no instante T-2, e o procedimento utilizado é semelhante ao aplicado no instante imediatamente anterior ao vencimento (T-1).

Observando a matriz que contém as trajetórias de preços do ativo objeto, o primeiro parâmetro da regressão (X) será representado pelos valores do ativo objeto em T-2, mas tomados somente os casos em que este gerou o exercício de uma das opções ou da conversibilidade.

O segundo parâmetro da regressão (Y) será definido novamente como o valor descontado dos fluxos de caixa futuros do derivativo referentes a estas trajetórias caso não houvesse o exercício das opções ou da conversibilidade em T-2. Cabe destacar que os valores usados para Y correspondem aos fluxos de caixa subsequentes referentes aos instantes T-1 ou T.

Assim, como as opções e a conversibilidade presentes no título só podem ser exercidas uma única vez, partindo do instante T-2, os fluxos de caixa futuros poderão ocorrer em T-1 ou em T, sendo que pelo menos um destes valores certamente será nulo. Obviamente, os fluxos de caixa referentes ao instante T-1 deverão ser descontados por um período, e aqueles recebidos em T deverão ser descontados por dois períodos.

6ª etapa)

Após encontrar a nova função de continuação - função de expectativas condicionais para o instante T-2 - através da regressão, obtém-se então o valor de continuação para cada trajetória de preços substituindo-se nesta os valores do ativo objeto em T-2 de cada trajetória.

7ª etapa)

A etapa seguinte é então comparar o resultado encontrado com os preços de exercício das opções de compra e venda, além do valor de conversão, conforme realizado para o instante T-1 na 4ª etapa.

8ª etapa)

Este procedimento deve ser então realizado recursivamente até o instante imediatamente seguinte à data de emissão, tal como realizado no exemplo de apreçamento da opção de venda apresentado anteriormente. Da mesma forma, após identificar a matriz de fluxo de caixa gerada a partir das decisões ótimas de exercício das opções de compra, opção de venda e conversibilidade, o valor do título será então obtido descontando-se todos os fluxos a valor presente, e obtendo-se a média de todas as trajetórias.

7.3.1

O Algoritmo

O algoritmo para o apreçamento do LYON utilizando o Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC) é apresentado abaixo. A implementação do mesmo foi realizada em linguagem de programação MATLAB 6.5, conforme replicado no apêndice 7:

1º passo) Simular o preço da ação do emissor (S).

2º passo) Definir os fluxos de caixa no vencimento para cada trajetória (j) baseados na condição de maturidade.

Número de trajetórias = $P \quad j = 1 \dots P$

Discretização dos instantes de tempo: número de passos em cada trajetórias = $T \rightarrow$ Em cada trajetória: $i = 1 \dots T$

A figura 13 representa graficamente três simulações hipotéticas ($P = 3$, ou seja, $j = 1 \dots 3$), para uma discretização do tempo em 6 intervalos ($T = 6$, ou seja, $i = 1 \dots 6$).

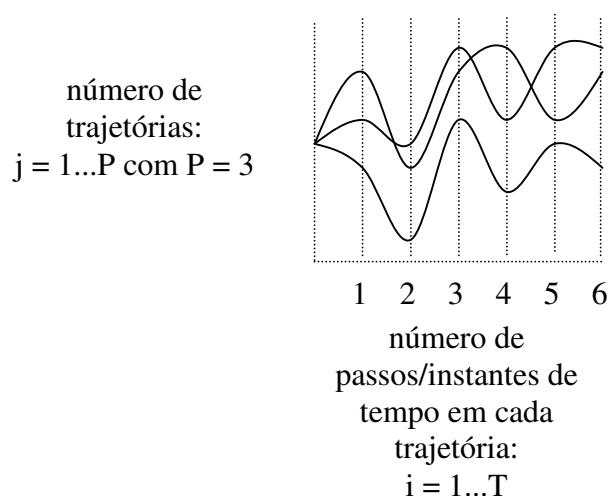


Figura 13 – Trajetórias

3º passo) Em qualquer trajetória, ou seja, de $j = 1 \dots P$, o valor do título no vencimento ($i = T$) será:

- Condição de maturidade: No vencimento do título o investidor optará pelo maior entre o valor de conversão e o valor de face do título, definido como sendo igual a 1.000.

$$L_{j,T} = \max[CR_T \times S_{j,T}, 1000] \quad (19)$$

Onde:

- CR = taxa de conversão no instante de tempo ;

- $CR_T \times S_{j,T}$ = valor de conversão do título no instante T para qualquer trajetória ($j = 1...P$) ;
- $L_{j,T}$ = valor do título no instante T para qualquer trajetória ($j = 1...P$) ;
- $S_{j,T}$ = valor do ativo objeto no instante T para qualquer ($j = 1...P$)

4º passo) Para cada trajetória, calcular o valor do LYON na data anterior ao vencimento ($L_{j,T-1}$), ou seja, para cada j de 1 até P.

$$L_{j,T-1} = L_{j,T} \times e^{-r}$$

Onde:

- $L_{j,T-1}$ = valor do título no instante T-1 para qualquer trajetória ($j = 1...P$) ;
- r = taxa de juros livre de risco.

5º passo) Obtenção do valor de continuação em T-1 $\rightarrow$ Estimar modelo de regressão para os dados de $j = 1...P$, regredindo o vetor $L_{j,T-1}$ com o vetor de preços do ativo objeto em T-1 obtidos na simulação:

$$\text{Função de continuação para o instante T-1} = E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] = C + \alpha S + \beta S^2$$

Onde:

- $E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] = C + \alpha S + \beta S^2$ = função de continuação = valor esperado condicional do título conversível no instante T-1 para qualquer trajetória, dado o valor do ativo objeto em T-1 referente à mesma trajetória considerada.

6º passo) Verificação das condições de compra, venda e conversão $\rightarrow$ Para cada $L_{j,T-1}$, de $j = 1...P$:

- Condição de conversão: Se o valor obtido pela função de continuação for menor que o valor de conversão, o investidor optará pelo exercício da conversibilidade, recebendo o valor de conversão em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

$$\text{Se } E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] < CR_{T-1} \times S_{j,T-1} \therefore L_{j,T-1} = CR_{T-1} \times S_{j,T-1}$$

Ou seja, o valor do título em T-1 será o maior entre o valor de continuação e o valor de conversão:

$$L_{j,T-1} = \max\{E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}], CR_{T-1} \times S_{j,T-1}\} \quad (20)$$

Onde:

- CR_{T-1} = taxa de conversão no instante de tempo T - 1 ;
- $CR_{T-1} \times S_{j,T-1}$ = valor de conversão do título no instante T-1 para qualquer trajetória (j = 1...P);
- $L_{j,T-1}$ = valor do título no instante T-1 para qualquer trajetória (j = 1...P) ;
- $S_{j,T-1}$ = valor do ativo objeto no instante T-1 para qualquer (j = 1...P)

- Condição de venda: Se o valor obtido pela função de continuação for menor que o preço de exercício da opção de venda, o investidor optará pelo exercício da opção de venda, recebendo o preço de exercício em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

$$\text{Se } E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] < X_{P,T-1} \therefore L_{j,T-1} = X_{P,T-1}$$

Onde:

- $X_{P,T-1}$ = preço de exercício da opção de venda no instante T-1;

Ou seja: o valor do título em T-1 será o maior entre o valor de continuação e o preço de exercício da opção de venda:

$$L_{j,T-1} = \max\{E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}], X_{P,T-1}\} \quad (21)$$

- Condição de compra: Se o valor obtido pela função de continuação for maior que o máximo entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão, o investidor optará pelo exercício da opção de compra, e o

investidor recebe o maior destes montantes, em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

Se $E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] > \max[X_{C,T-1}, CR_{T-1} \times S_{j,T-1}]$.

$$L_{j,T-1} = \max[X_{C,T-1}, CR_{T-1} \times S_{j,T-1}]$$

Onde:

- $X_{C,T-1}$ = preço de exercício da opção de compra no instante T-1;

Ou seja: o valor do título em T-1 será o menor entre o valor de continuação e o máximo entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão:

$$L_{j,T-1} = \min\{E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}], \max[X_{C,T-1}, CR_{T-1} \times S_{j,T-1}]\} \quad (22)$$

- Para todas as trajetórias em que houver o exercício da conversibilidade ou de uma das opções no instante T-1, conforme definido no 6º passo, o valor do título no vencimento (T) será nulo ($L_{j,T} = 0$).
- Para todos os demais $L_{j,T-1}$, fazer $L_{j,T-1} = 0$

7º passo) Para cada trajetória, calcular o valor do LYON na data T-2 ($L_{j,T-2}$), ou seja, para cada j de 1 até P.

$$L_{j,T-2} = L_{j,T-1} \times e^{-r} + L_{j,T} \times e^{-r} \times e^{-r}$$

Onde:

- $L_{j,T-2}$ = valor do título no instante T para qualquer trajetória ($j = 1 \dots P$) ;
- e^{-r} = fator de desconto contínuo por um período de tempo considerando a taxa de juros livre de risco, r.

8º passo) Obtenção do valor de continuação em T-2 $\rightarrow$ Estimar modelo de regressão para os dados de $j = 1 \dots P$, regredindo o vetor $L_{j,T-2}$ com o vetor de preços do ativo objeto em T-2 obtidos na simulação:

$$\text{Função de continuação para o instante T-2} = E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}] = C + \alpha S + \beta S^2$$

Onde:

- $E[L_{j,T-1} / S_{j,T-1}] = C + \alpha S + \beta S^2 =$ função de continuação = valor esperado do título conversível no instante T-2 para qualquer trajetória, dado o valor do ativo objeto em T-2 referente à mesma trajetória considerada.

9º passo) Para cada $L_{j,T-2}$, de $j = 1 \dots P$:

- Condição de conversão: Se o valor obtido pela função de continuação for menor que o valor de conversão, o investidor optará pelo exercício da conversibilidade, recebendo o valor de conversão em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

$$\text{Se } E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}] < CR_{T-2} \times S_{j,T-2} \therefore L_{j,T-2} = CR_{T-2} \times S_{j,T-2}$$

Onde:

- CR_{T-2} = taxa de conversão no instante de tempo T - 2 ;
- $CR_{T-2} \times S_{j,T-2}$ = valor de conversão do título no instante T-2 para qualquer trajetória ($j = 1 \dots P$);
- $L_{j,T-2}$ = valor do título no instante T-2 para qualquer trajetória ($j = 1 \dots P$) ;
- $S_{j,T-2}$ = valor do ativo objeto no instante T-2 para qualquer ($j = 1 \dots P$)

Ou seja, o valor do título em T-2 será o maior entre o valor de continuação e o valor de conversão:

$$L_{j,T-2} = \max\{E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}], CR_{T-2} \times S_{j,T-2}\} \quad (23)$$

- condição de venda: Se o valor obtido pela função de continuação for menor que o preço de exercício da opção de venda, o investidor optará pelo exercício da opção de venda, recebendo o preço de exercício em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

$$\text{Se } E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}] < X_{P,T-2} \therefore L_{j,T-2} = X_{P,T-2}$$

Ou seja: o valor do título em T-2 será o maior entre o valor de continuação e o preço de exercício da opção de venda:

$$L_{j,T-2} = \max\{E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}], X_{P,T-2}\} \quad (24)$$

Onde:

- $X_{P,T-2}$ = preço de exercício da opção de compra no instante T-2;
- condição de compra: Se o valor obtido pela função de continuação for maior que o máximo entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão, o investidor optará pelo exercício da opção de compra, e o investidor recebe o maior destes montantes em detrimento de ficar com o título. Matematicamente:

$$\text{Se } E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}] > \max[X_{C,T-2}, CR_{T-2} \times S_{j,T-2}] \therefore$$

$$L_{j,T-2} = \max[X_{C,T-2}, CR_{T-2} \times S_{j,T-2}]$$

Ou seja: o valor do título em T-2 será o menor entre o valor de continuação e o máximo entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão:

$$L_{j,T-2} = \min\{E[L_{j,T-2} / S_{j,T-2}], \max[X_{C,T-2}, CR_{T-2} \times S_{j,T-2}]\} \quad (25)$$

Onde:

- $X_{C,T-2}$ = preço de exercício da opção de compra no instante T-2;
- Para todas as trajetórias em que houver o exercício da conversibilidade ou de uma das opções no instante T-2, conforme definido no 6º passo, o valor do título nos instantes posteriores (T-1 e T) será nulo ($L_{j,T-1} = 0$ e $L_{j,T} = 0$).
- Para todos os demais $L_{j,T-2}$, fazer $L_{j,T-2} = 0$

10º passo) Continuar o procedimento até chegar em $i = 1$. Tendo identificado os fluxos de caixa gerados em cada trajetória, o valor do título pode então ser obtido descontando-se cada fluxo de caixa para a data zero e obtendo-se a média.