

6

Simulação de Monte Carlo - Visão Geral

6.1

Introdução

Com a evolução da tecnologia, os métodos numéricos tornaram-se uma importante ferramenta na resolução de problemas nas diversas áreas de conhecimento, principalmente onde as soluções analíticas são muito complicadas, ou até mesmo infactíveis. Um método que tem se destacado dentro da área de finanças é o método de Simulação de Monte Carlo. Este foi inicialmente criado com o objetivo de resolver problemas na área da física. Na teoria financeira, tem sido usado largamente no cálculo das opções, na medição de risco de mercado e de crédito, no cálculo do Valor em Risco (VaR), na análise de projetos de investimento e mais recentemente na solução das Opções Reais.

O método de Monte Carlo é um procedimento numérico que se utiliza de números aleatórios, ou pseudo-aleatórios, para computar algumas quantidades não necessariamente aleatórias, com base na Lei dos Grandes Números e no Teorema do Limite Central. Devido à simplicidade das idéias envolvidas na concepção do método e ao grande avanço dos computadores pessoais, o método de Monte Carlo se tornou uma poderosa e atrativa ferramenta para lidar com problemas da teoria financeira.

A técnica de Monte Carlo consiste em gerar valores aleatórios para cada distribuição de probabilidades dentro de um modelo com o objetivo de produzir centenas ou milhares de cenários. A distribuição dos valores calculados (para cada caso) deve refletir a probabilidade de ocorrência dos mesmos.

A simulação de Monte Carlo oferece muitas vantagens. Destacam-se:

- As distribuições das variáveis do modelo não precisam ser aproximadas;

- Correlações e outras interdependências podem ser modeladas;
- O computador realiza todo trabalho de geração dos valores aleatórios;
- O nível de precisão da simulação pode ser melhorado através de um simples aumento do número de interações calculadas;
- A validade da teoria da simulação de Monte Carlo é amplamente reconhecida, o que permite que seus resultados sejam facilmente aceitos;
- Alterações no modelo podem ser feitas rapidamente e os novos resultados podem ser comparados com os anteriores.

6.2

Geração de Números Aleatórios

Para implementar o Método de Monte Carlo é necessário inicialmente que sejam geradas seqüências de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$. É muito importante frisar que o sucesso da implementação deste método está estritamente ligado à qualidade da aleatoriedade dos números dessas seqüências. Essas seqüências são geradas na prática por geradores de números aleatórios. A qualidade e as especificações técnicas desses geradores são extremamente importantes para entender as limitações do Método de Monte Carlo, para que então seja garantida a obtenção de bons resultados com as simulações.

6.2.1

Tipos de Números e Geradores para o Método de Monte Carlo

Os geradores de números aleatórios podem ser classificados de acordo com os tipos de números que podem ser gerados:

- 1) Números Aleatórios: a principal característica desses números é o fato de serem completamente imprevisíveis. Estes só podem ser gerados por algum

processo físico natural, como por exemplo decaimentos radioativos. Séries desses números estão disponíveis em fitas magnéticas nos grandes laboratórios ou publicadas em livros. Porém, essas listagens são extremamente grosseiras e, em geral, insuficientes tanto no aspecto de quantidade de números aleatórios disponíveis quanto no de precisão, prejudicando os cálculos envolvidos, e por consequência, sua eficiência;

2) Números Pseudo-Aleatórios: são os mais utilizados, sendo gerados em computador por meio de algum algoritmo simples. Portanto, não são números aleatórios.

3) Números Quasi-Aleatórios: também são gerados por algum algoritmo numérico simples. Contudo, eles são produzidos de maneira que sejam distribuídos o mais uniformemente possível. Esta metodologia é empregada no Método de Quasi-Monte Carlo.

6.2.2

Métodos para geração de Números Pseudo-Aleatórios

Nas simulações realizadas na tese utilizou-se números pseudo-aleatórios gerados pela função *normrnd* (0,1), disponível na linguagem de programação MATLAB 6.5. Essa função gera uma sequência de números com distribuição normal com média zero e desvio-padrão igual a 1.

O método utilizado como *default* na versão do 4 do MATLAB para gerar números pseudo-aleatórios é o dos Geradores Multiplicativos Lineares Congruentes (GMLC), um dos mais utilizados na prática. De maneira bastante simplificada, pode-se descrever o método geral usado por esse gerador da seguinte forma: o valor inicial é dado por meio da semente que, em geral, é um número inteiro. Através de operações aritméticas (GMLC), gera-se outro valor. Desta maneira números pseudo-aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo [0,1] e independentes são obtidos.

Para a versão 5 do MATLAB ou posteriores, o método utilizado como *default* é o Método de Marsaglia Ziggurat [50].

6.2.3

Geração de Números Aleatórios de Distribuições de Probabilidade

Dada uma distribuição de probabilidades para uma variável x . Seja $F(x)$ a função de distribuição acumulada, a qual fornece a probabilidade, P , em que X é menor ou igual a x . Assim:

$$F(x) = P(X \leq x), \text{ onde: } 0 \leq F(x) \leq 1$$

Da equação anterior pode-se obter a função inversa $G(F(x))$ que para valores de $F(x)$ calcula valores de x . Então: $G(F(x)) = x$

Este conceito de função inversa é fundamental na geração de valores aleatórios. O primeiro passo é gerar um número aleatório, r , de uma distribuição uniforme com intervalo $[0,1]$. O valor de r representará o valor da função de distribuição acumulada. Através da função inversa, será então determinado o valor a ser gerado para a distribuição: $G(r) = x$

O número r é gerado de uma distribuição uniforme $[0,1]$ para permitir igual oportunidade de que o valor x seja gerado em cada percentil do domínio com as probabilidades equivalentes. Na prática, para alguns tipos de distribuições de probabilidades não é possível a determinação da função inversa. Em tais casos outras técnicas precisam ser desenvolvidas para a retirada de amostras. Entretanto, o princípio permanece o mesmo.

Apesar da técnica de Monte Carlo satisfazer o objetivo de se obter uma amostragem aleatória, muitas partes da distribuição podem vir a ser subestimadas ou superestimadas. Ainda assim, a distribuição pode ser melhor replicada se o número de interações for muito grande.

Em alguns casos em que seja necessário uma maior precisão, pode-se trabalhar com seqüências de baixa discrepância (ou quasi-aleatórias) de forma a acelerar a convergência do modelo de simulação. Assim, o método de Quasi-Monte Carlo,

alternativa à técnica de Monte Carlo, baseia-se essencialmente no uso de seqüências de baixa discrepância de números distribuídos uniformemente em um determinado intervalo, chamados de quasi-aleatórios, em contraposição aos conhecidos pseudo-aleatórios gerados no método de Monte Carlo tradicional.¹ Sua grande vantagem sobre a técnica de Monte Carlo é a garantia que a distribuição de entrada do modelo será reproduzida com maior eficiência. Apesar disso, conforme apresentado por Frota [19] e Nascimento [39], as seqüências de baixa discrepância perdem gradativamente a uniformidade na medida em que se aumenta a dimensão do modelo. Assim, tornam-se ineficientes na avaliação de opções americanas ou de derivativos que permitam o exercício antecipado, já que o número de dimensões é dado pelo número de datas de exercício antecipado. O mesmo pode ser verificado no trabalho de Marins [33].²

A figura 12 apresenta a plotagem de números aleatórios e pseudo-aleatórios. Pode-se notar que no primeiro gráfico existem regiões que não são preenchidas e outras com um maior agrupamento de pontos. Já a seqüência de números quasi-aleatórios, o espaço bidimensional é preenchido de maneira mais uniforme, evitando espaços vazios e agrupamentos.

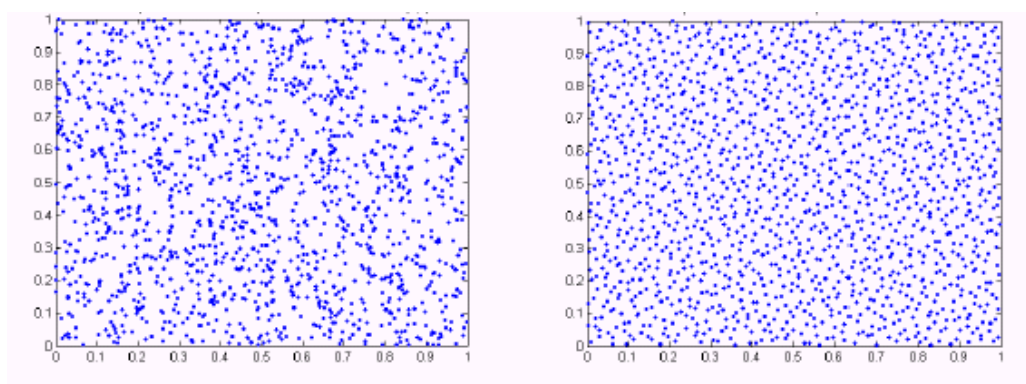


Figura 12 – Números aleatórios Vs. Quasi-aleatórios

¹ A geração de números quasi-aleatórios pode ser realizada através das seqüências de Sobol, Halton e outras. O procedimento para geração de números quasi-aleatórios através das seqüências de Sobol e Halton pode ser encontrado nos trabalhos de Frota [19] e Marins [33].

² De acordo com Frota [19] e Nascimento [39], o modelo de Quasi-Monte Carlo Híbrido surge como alternativa à Simulação de Quase-Monte Carlo tradicional aplicada em altas dimensões. O algoritmo do Quasi-Monte Carlo híbrido permuta aleatoriamente a seqüência de números quasi-aleatórios, de modo a gerar novas seqüências independentes. Com isso, o modelo de Quasi-Monte Carlo Híbrido mantém as mesmas propriedades de baixa discrepância das simulações de QMC em poucas dimensões.

6.3

Simulação de Monte Carlo na avaliação de Opções

A avaliação de opções através da SMC pode ser resumida em três etapas:

1. Simulações dos fatores de incerteza do ativo (preço, volatilidade, dividendos etc);
2. Determinação do *payoff* do ativo;
3. Apreçamento da opção através da média das simulações.

A utilização da Simulação de Monte Carlo é especialmente adequada para opções dependentes de múltiplas variáveis de estado ou opções que dependem do caminho. Por exemplo, se admitirmos que o preço do ativo objeto segue um Movimento Geométrico Browniano, Simulações de Monte Carlo podem ser utilizadas para simular trajetórias de preço.

Para um derivativo F , função de uma variável S e do tempo (t), onde S segue o processo de Itô, tem-se:

$$dF(S, t) = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS^2 \quad (5)$$

Assumindo o Movimento Geométrico Browniano como modelo que descreve o comportamento do preço da ação:

$$dS = (\mu S - D)dt + \sigma S dZ \quad (6)$$

Substituindo a eq. (6) na eq. (5):

$$dF(S, t) = \frac{1}{S} [(\mu S - D)dt + \sigma S dZ] + 0 + -\frac{1}{2S^2} \sigma^2 S^2 dt \quad (7)$$

Simplificando a eq. (7):

$$dF(S, t) = \mu dt - \frac{D}{S} dt + \sigma dZ - \frac{\sigma^2 dt}{2} \quad (8)$$

Colocando o termo dt em evidencia na eq. (8):

$$dF(S, t) = \left(\mu - \frac{D}{S} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ \longrightarrow \boxed{\text{Processo Estocástico que define o comportamento de } F = \ln S \text{ ao longo do tempo}} \quad (9)$$

Dado que o comportamento de F possa ser descrito pelo processo estocástico acima (tempo contínuo) pode-se definir o modelo discreto de evolução de F ao longo do tempo, que no limite onde Δt (intervalo de tempo discreto) tende a zero obtém-se o mesmo processo contínuo supracitado.

Sendo $F = \ln(S)$, substituindo-se na eq (9):

$$\Delta F(S, t) = \Delta \ln S = \left(\mu - \frac{D}{S} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma N \sqrt{\Delta t} \quad (10)$$

Aplicando a propriedade do logaritmo na eq. (10):

$$\Delta \ln S = \ln S_t - \ln S_0 = \ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{D}{S_0} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \eta \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

$$\text{Assim: } \frac{S_t}{S_0} = e^{\left(\mu - \frac{D}{S_0} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \eta \sqrt{\Delta t}} \quad (12)$$

$$\text{Isolando o termo } S_t: S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{D}{S_0} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \eta \sqrt{\Delta t}} \quad (13)$$

A partir da simulação de valores para η (que segue uma distribuição normal padronizada), são definidas as possíveis trajetórias a serem percorridos pelo valor da ação ao longo do tempo.

Assim, para construir uma interação da simulação, N amostras aleatórias independentes devem ser retiradas da distribuição normal padronizada. Quando estas

são substituídas na eq. (13), os valores de S nos instantes de tempo $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ são calculados, fornecendo uma possível trajetória para o valor do ativo objeto.

6.4

Técnicas de Redução de Variância

Para melhorar a precisão dos resultados da SMC, pode-se aumentar o número de simulações, o que por sua vez pode elevar demasiadamente o custo computacional deste processo. Para solucionar este problema, existem algumas técnicas de redução de variância que aumentam a eficiência da SMC sem um acréscimo significativo do custo computacional. As principais técnicas são descritas brevemente a seguir.

6.4.1

Variáveis Antitéticas

Esta é uma das técnicas mais usadas em finanças devido à sua simplicidade. Considerando uma opção do tipo européia, as simulações de preços do ativo objeto podem ser feitas da seguinte forma:

- Geração de N números aleatórios a partir de uma distribuição normal padronizada;
- Cálculos dos N preços finais simulados, a partir da eq. (13):

$$S_i = S_0 e^{\left(\mu - \frac{D}{S_0} \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\eta\sqrt{\Delta t}} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

O método das variáveis antitéticas se baseia na constatação de que, se η tem uma distribuição normal padronizada, então $-\eta$ também terá a mesma distribuição. Assim, o preço do ativo objeto calculado com $-\eta$ também é válido para determinar o preço da opção. Desta forma, a vantagem deste método é que, para gerar N simulações de preços, será necessário gerar apenas $N / 2$ números aleatórios a partir

de uma distribuição normal padronizada, ou seja, o número de simulações é reduzido pela metade.

6.4.2

Variáveis de Controle

Esta técnica pode ser aplicada quando há dois derivativos semelhantes, A e B: o derivativo B tem solução analítica e deseja-se determinar o valor do derivativo A. São realizadas em paralelo duas simulações usando o mesmo conjunto de números aleatórios. A primeira é usada para obter uma estimativa do valor de A, enquanto a segunda é usada para obter uma estimativa do valor de B.

Após esta etapa, uma melhor estimativa do valor de A é obtida a partir da eq. (15):

$$f_A = \hat{f}_A - \hat{f}_B + f_B \quad (15)$$

onde,

f_A : verdadeiro valor de A

$\hat{f}_A$: estimativa do valor de A

$\hat{f}_B$: estimativa do valor de B

f_B : verdadeiro valor de B (solução analítica)

6.4.3

Método Moment Matching

Através desta técnica são realizados ajustes nas simulações tomadas para uma distribuição normal padronizada de forma que o primeiro, segundo e possivelmente

outros momentos sejam atingidos. Assim, toma-se N simulações de uma variável ε' , que possua uma distribuição normal qualquer, calculando-se em seguida sua média, m , e seu desvio padrão, s . Realiza-se então o ajuste de forma que as simulações tenham média zero e desvio padrão igual a um, conforme a eq. (16):

$$y_i = \frac{\varepsilon_i - m}{s} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

Embora esta transformação reduza o custo computacional, a exigência em termos de memória computacional torna-se maior, uma vez que cada amostra original precisa ser armazenada até o final da simulação.

6.4.4

Amostragem por Importância

Suponha que se queira calcular o preço de uma opção de compra que está *deep-out-of-the-money*, com preço de exercício X . Se as simulações forem realizadas de maneira usual, pode-se esperar que em muitas trajetórias de preços o *payoff* da opção será nulo. Isso representa um custo computacional desnecessário, pois estas trajetórias pouco contribuem para a determinação do valor da opção. O método consiste em escolher somente trajetórias que sejam consideradas importantes, ou seja, trajetórias que levem neste caso a um preço da ação maior que X .

Seja F a função de distribuição de probabilidades para o preço da ação (S), e α a probabilidade deste preço ser maior que o preço de exercício da opção, X , na data de vencimento da opção (T). Admitindo que α pode ser obtido analiticamente, pode-se encontrar a distribuição de probabilidades de S , condicionada ao fato de que S seja maior que X , tomando-se $G = F / \alpha$. Após esta etapa, gera-se então os números aleatórios a partir da distribuição condicionada G , estimando-se o valor da opção a partir do *payoff* médio descontado a valor presente e multiplicado por α .

6.4.5

Amostragem Estratificada

Esta técnica força certas probabilidades empíricas a atingirem probabilidades teóricas, da mesma forma que *moment matching* conduz momentos empíricos a atingirem momentos teóricos.

Este acontecimento é obtido dividindo-se a distribuição de probabilidades em intervalos e realizando as simulações dentro de cada intervalo, de acordo com a sua probabilidade.

Assim, tomando como exemplo a geração de 100 números aleatórios a partir de uma determinada distribuição normal $\mathcal{E}$, a distribuição empírica de uma amostra independente $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{100}$ provavelmente não será muito parecida com a densidade normal, já que as caudas desta distribuição poderão ser subestimadas. A amostragem estratificada pode ser usada então para garantir que haja uma observação em cada percentil da distribuição de probabilidade. Assim, a distribuição desta nova amostra será mais próxima de uma densidade normal. Caso seja utilizado um número de intervalos bastante elevado, pode-se trabalhar apenas com a média ou mediana de cada intervalo.

6.4.6

Hipercubo Latino

A técnica da amostragem estratificada pode ser aplicada em casos envolvendo várias dimensões. Porém, a dificuldade ao lidar com muitas dimensões é que gerar uma amostra estratificada de tamanho $n \times d$, onde d é o número de dimensões e n é o número de estratos em cada dimensão, será proibitivo a não ser que n seja pequeno. A amostragem por hipercubos latinos pode ser vista como uma maneira de selecionar aleatoriamente n pontos de uma amostra estratificada, preservando em parte a regularidade da estratificação. O método aloca um valor para cada dimensão ao menos uma vez em cada estrato.

6.4.7

Amostragem Descritiva

A amostragem descritiva, proposta por Saliby [45], diferencia-se por não utilizar a geração aleatória (ou pseudo-aleatória) dos valores uniformes. Ela se baseia na seleção determinística dos valores amostrais das variáveis aleatórias de entrada no modelo, de modo a não incorrer em erros amostrais desnecessários no processo de simulação.

6.4.8

Abordagem dos modelos desenvolvidos

Por sua simplicidade e aplicação aos problemas em finanças, conforme se pode observar em Marins [33], Frota [19] e outros, utilizou-se a técnica de Variáveis Antitéticas como técnica de aceleração de convergência nos modelos desenvolvidos nos Capítulos 7 e 8. Embora outras técnicas também gerem um bom nível de eficiência, esta é uma das que comprovadamente reduz o tempo de processamento dos modelos de simulação, além de gerar melhorias significativas em termos de convergência, conforme se pode observar também nos trabalho de Marins [33] e Frota [19].

De acordo com o que foi descrito anteriormente, as seqüências de baixa discrepância tornam-se ineficientes na avaliação de opções americanas ou de derivativos que permitam o exercício antecipado - Marins [33], Frota [19] e Nascimento [39] -, como o LYON. Assim, as simulações realizadas na tese trabalharam com números pseudo-aleatórios gerados pela função *normrnd* (0,1), disponível na linguagem de programação MATLAB 6.5.