5
Avaliação do Título Conversível pelo Método de Diferenças Finitas Implícito (DFI)

5.1
Metodologia - Premissas

Este modelo desenvolvido para apreçamento do LYON, faz uso da teoria de opções, desenvolvida por Black and Scholes [6] [1], e estendida por Merton [37], de modo a definir a equação diferencial que descreve o comportamento do preço deste tipo de ativo como função das variáveis que, de alguma forma, influem no comportamento do mesmo (preço da ação do emissor e tempo). As taxas de juros foram consideradas como determinísticas e dependentes somente do tempo.[2]

Após a determinação da equação diferencial que determina o comportamento do título, aplicou-se então as condições de contorno adequadas e, vez que a mesma não apresenta solução analítica conhecida, chegou-se à solução teórica para o problema/equação fazendo-se uso do Método das Diferenças Finitas Implícito, descrito no Apêndice 3.[3]

Para valorar um título conversível, a premissa básica a ser adotada diz que o valor de equilíbrio do mesmo é aquele que impossibilita ganhos com arbitragem tanto por parte do emissor quanto do investidor, uma vez que o primeiro possui uma estratégia ótima em relação à conversão e à venda, e o segundo uma estratégia ótima em relação à compra do título.

[1] As premissas utilizadas por Black and Scholes são adotadas neste modelo, com exceção daquela que diz que o ativo objeto (ação) não paga dividendos.
[2] A implementação do mesmo foi realizada em linguagem de programação MATLAB 6.5, conforme apresentado no apêndice 4.
[3] O Método das Diferenças Finitas Explícito é conceitualmente simples e fácil de se implementar, porém possui a desvantagem de não necessariamente convergir. Alguns autores desenvolveram metodologias alternativas [14, 25] ao uso deste Método, entretanto, para o problema em questão o Método das Diferenças Finitas Implícito apresentou-se como o mais satisfatório.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

Ao analisar o ativo em questão, observa-se que os investidores e os emissores do título possuem direitos que, quando exercidos, automaticamente eliminam os demais antes existentes[4]. Por este motivo, para determinar o valor justo do título, as estratégias ótimas de conversão, venda e compra devem ser avaliadas mediante uma análise simultânea. Sob este aspecto, ao derivar a estratégia de conversão (ou de compra, ou de venda) é necessário adotar premissas sobre a estratégia a ser seguida pela outra parte.

Seguindo o utilizado por Brennan e Schwartz [8], a premissa adotada diz que cada parte possui a estratégia ótima descrita a seguir e esperam que a outra parte faça o mesmo:

- os emissores seguem a estratégia de compra que minimiza o valor do título em cada instante;
- os investidores seguem as estratégias de venda e conversão que maximizam o valor do título em cada instante.

***Estratégia de Conversão* -** A conversibilidade é um direito do investidor que, no objetivo de maximizar o valor do título a cada instante, jamais irá permitir que o valor deste seja menor que o valor de conversão. Assim sendo, jamais irá converter se o valor do mesmo estiver acima daquele a ser obtido quando da conversão. De forma análoga, sempre irá converter caso o valor do título esteja abaixo do valor de conversão.

consequência: em nenhum instante, o valor do título poderá ser menor que o valor de conversão.

***Estratégia de Compra* -** A opção de compra é um direito do emissor que, no objetivo de minimizar o valor do título a cada instante, jamais irá permitir que o valor deste exceda o preço de exercício da opção de compra. Para isso, jamais irá exercer se o valor do mesmo estiver abaixo deste preço. Por outro lado, sempre irá exercer

[4] Por exemplo, o direito de converter o título em uma data futura T^*, somente poderá possuir valor neste instante no caso de as opções de compra (por parte do emissor) e venda (por parte do investidor) não tiverem sido exercidas em nenhuma data anterior a T^*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

caso o valor do título esteja acima do preço de exercício da opção. Quando o emissor exerce a opção de compra, o investidor pode escolher entre receber o preço de exercício ou o valor de conversão. Vale lembrar que o exercício da opção de compra pode ocorrer fora das datas previstas no contrato, sendo o preço de exercício ajustado segundo a taxa a termo implícita entre os preços de exercício.

consequência: em nenhum instante, o valor do título pode exceder o maior entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão.

Estratégia de Venda - A opção de venda é um direito do investidor que, no objetivo de maximizar o valor do título a cada instante, jamais irá permitir que o valor deste seja menor que o preço de exercício da opção de venda. Para isso, em cada data em que é prevista a possibilidade de exercício da opção, não irá exercê-la se o valor do título for maior que o preço de exercício. Por outro lado, irá sempre exercê-la caso o valor do mesmo seja menor que o preço de exercício.

consequência: em qualquer data de opção de venda prevista, o valor do título não pode ser menor que o preço de exercício desta.

Assumiu-se que as mudanças no preço da ação do emissor são representadas pelo Movimento Geométrico Browniano, modelo mais amplamente usado para descrever o comportamento do preço das ações. O uso deste modelo implica que o valor corrente da ação do emissor seja conhecido e que os valores futuros tenham distribuição lognormal com variância que cresce linearmente com o horizonte de tempo [18].

5.2
A Equação do Título

Como o valor do título depende do preço da ação do emissor e do tempo, mediante a aplicação do Lema de Itô (apêndice 1) chega-se a eq. (1), que é a equação diferencial satisfeita por um derivativo dependente de uma ação que paga dividendo contínuo. Essa equação é bastante conhecida e é na verdade a equação diferencial, à

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

qual, dadas as adequadas condições de contorno, o valor do título deverá satisfazer para que não haja possibilidade de arbitragem. O desenvolvimento matemático para se chegar à equação está apresentado no apêndice 2.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 L}{\partial S^2} + (r-q)\frac{\partial L}{\partial S} S + \frac{\partial L}{\partial t} - rL = 0 \qquad (1)$$

As letras *L*, *S*, *q* e *r* representam respectivamente o derivativo em questão, o preço do ativo objeto (no caso, o preço da ação do emissor), a taxa de dividendos do ativo objeto e a taxa de juros sem risco.

Assumindo que o pagamento de dividendos (*q*) tem a forma:

$$D(S,t) = d_y S + de^{g(t-t_0)}$$

Onde d_y é a taxa (percentual) de pagamento de dividendos sobre o preço da ação; d é o valor monetário do pagamento do dividendo; g é a taxa constante de crescimento do dividendo; e t_0 é a data de emissão do título. Permite-se tanto uma taxa constante de pagamento de dividendos em relação ao preço da ação do emissor (quando d=0) quanto uma taxa constante de crescimento do valor monetário do pagamento (quando d_y =0).

Assim, o valor do título deverá satisfazer à seguinte equação:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 L}{\partial S^2} + (r - d_y S - de^{g(t-t_0)})\frac{\partial L}{\partial S} S + \frac{\partial L}{\partial t} - rL = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Equação Diferencial que determina o comportamento do LYON}} \qquad (2)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

5.3
Condições de Contorno

A eq. (2) possui muitas soluções, correspondentes a todos os diferentes derivativos dependentes de uma ação que paga dividendo contínuo que podem ser definidos. O derivativo obtido quando a equação é resolvida depende das condições de contorno utilizadas, que especificam os valores deste nas fronteiras dos valores possíveis de *S* e *t*. As condições de contorno utilizadas no modelo desenvolvido derivam das estratégias ótimas de conversão, venda e compra, bem como das condições de maturidade especificadas no contrato.

A seguir serão descritas as condições de contorno relacionadas ao problema em questão:

- Condições de Maturidade - No vencimento do contrato, o investidor irá resgatar o maior entre o valor de conversão e o valor de face do contrato. Assim, o valor do título neste instante será o maior entre estes dois valores.

$$L(S,T) = Max(CR \times S, F)$$

onde:

L (S,T) é o valor do LYON para um determinado S no vencimento do ativo, T

CR é a taxa de conversão

S é o valor do ativo objeto (ação)

F é o valor de face do título conversível

A figura 3 ilustra o valor do título no vencimento para cada preço da ação do emissor.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

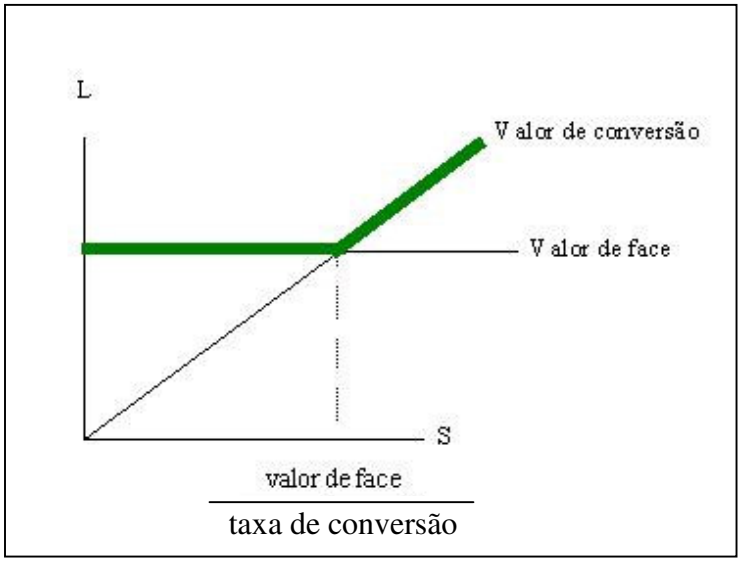

Figura 3 - Condição de Maturidade

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

- Condição de Conversão - Em qualquer instante, o valor do título deve ser maior ou igual ao valor de conversão, caso contrário o investidor converteria o título de acordo com sua estratégia ótima.

$$L(S,t) \geq CR \times S$$

onde:

L (S,T) é o valor do LYON para um determinado S e um instante de tempo qualquer, t;

CR é a taxa de conversão;

S é o valor do ativo base (ação).

A figura 4 ilustra a região restrita de valores para o título (em verde) para cada preço da ação do emissor, desconsiderando, a princípio, a presença das opções de compra e venda.

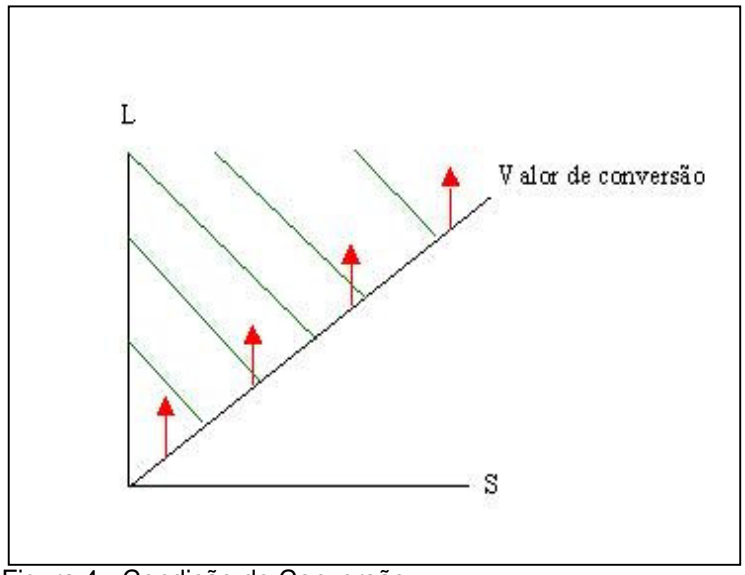

Figura 4 - Condição de Conversão

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

- Condições de Venda - Nas datas de exercício da opção de venda, o valor do título deverá ser maior ou igual aos preços de exercício, caso contrário o investidor exerceria a opção de venda de acordo com sua estratégia ótima.

$$L(S,t_p) \geq P(t_p)$$

onde:

$L(S,t_p)$ é o valor do LYON para um determinado S e um instante de tempo t_p;

t_p é um instante de tempo em que há opção de venda;

S é o valor do ativo objeto (ação);

$P(t_p)$ é o preço de exercício da opção de venda no instante t_p.

A figura 5 ilustra a região restrita de valores para o título (em verde) para cada preço da ação do emissor, desconsiderando, a princípio, a presença da opção de compra.

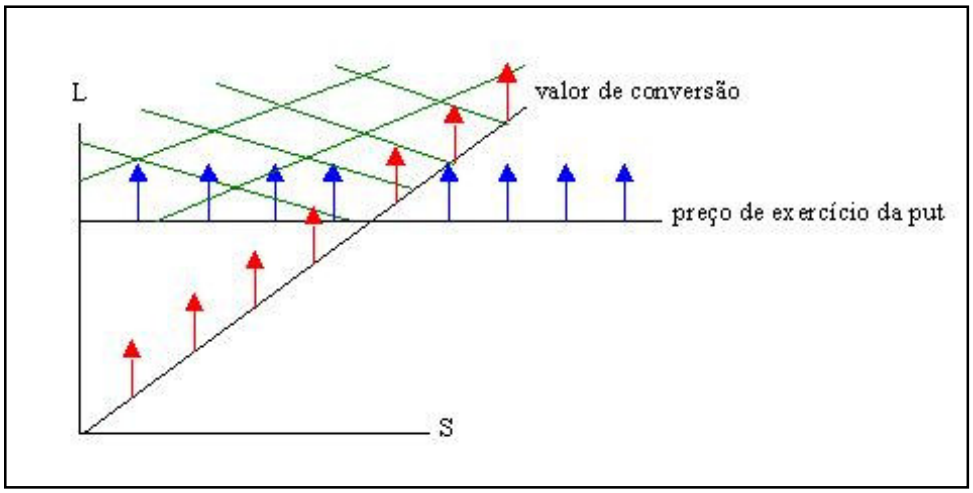

Figura 5 - Condição de Venda

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

- Condição de Compra – Conforme já dito, quando o emissor exerce a opção de compra, o investidor pode escolher entre receber o preço de exercício ou o valor de conversão. Assim, em qualquer instante, o valor do título deve ser menor ou igual ao maior entre o preço de exercício da opção de compra e o valor de conversão, caso contrário o emissor exerceria a opção de compra de acordo com sua estratégia ótima.

$$L(S,t) \leq Max\{C(t), CRS\}$$

onde:

L (S,t) é o valor do LYON para um determinado S e um instante de tempo em que há opção de compra, ou seja, em um instante fora do período de proteção à opção de compra (*call protection*);

CR é a taxa de conversão;

S é o valor do ativo base (ação);

C(t) é o preço de exercício da opção de compra no instante t.

A figura 6 ilustra a região restrita de valores para o título (em verde) para cada preço da ação do emissor, para uma data T', em que há opção de compra e não há opção de venda.

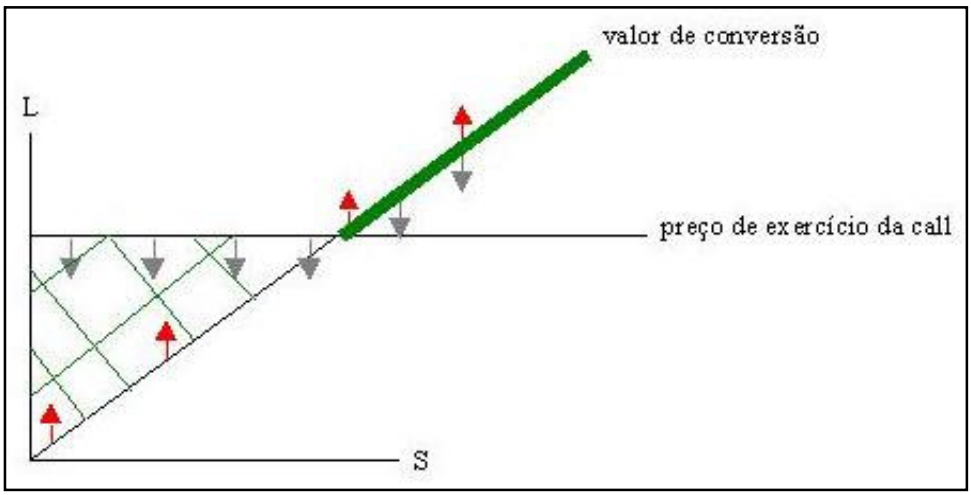

Figura 6 - Condição de Compra (sem opção de venda)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

A figura 7 ilustra a região restrita de valores para o título (em verde) para cada preço da ação do emissor, para uma data T", em que há opção de compra e opção de venda, sendo a de venda com preço de exercício menor que a de compra:

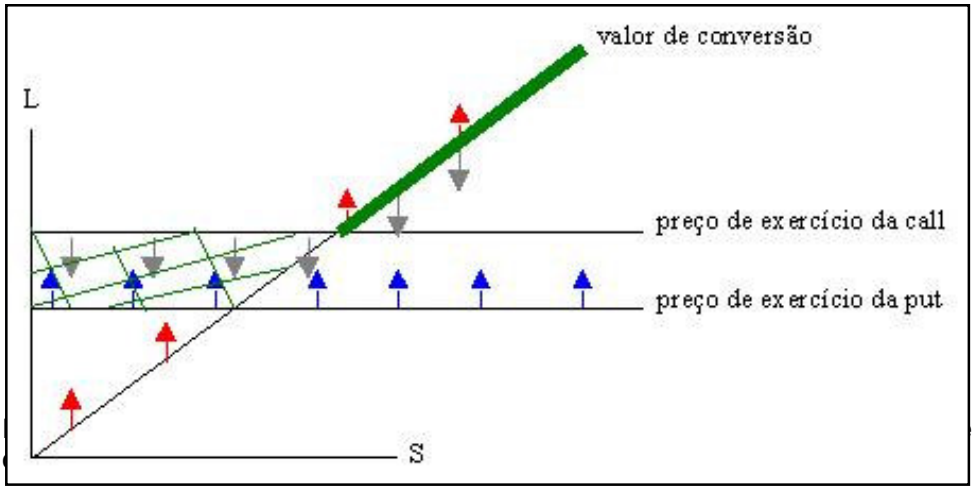

Figura 7 - Condição de Compra (preço de exercício da opção de venda maior que o da opção de compra)

A figura 8 ilustra a região restrita de valores para o título (em verde) para cada preço da ação do emissor, para uma data T"', em que há opção de compra e opção de venda com preços de exercício iguais:

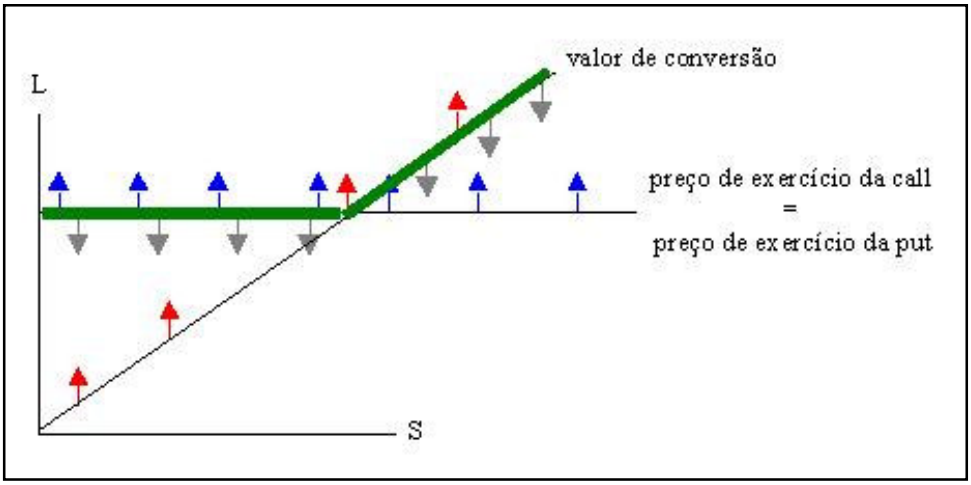

Figura 8 – Condição de Compra (preço de exercício da opção de venda igual ao da opção de compra)

Pode-se então determinar a ação ótima que seria tomada pelo emissor e pelo investidor - exercício da opção de compra, exercício da opção de venda ou conversão - quando o LYON e o preço do ativo base assumissem um determinado valor. A figura 9 ilustra algumas situações em um determinado instante de tempo em que há opção de venda com preço de exercício menor que a opção de compra. Esta figura é na verdade uma interpretação conjunta das restrições impostas pelas condições de contorno.

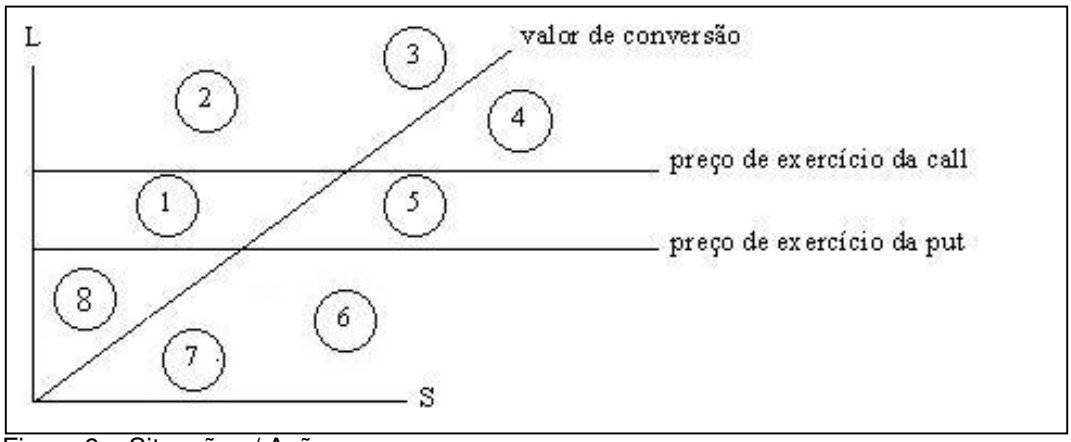

Figura 9 – Situações / Ações

L = valor do LYON
S = preço do ativo base (ação)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

De acordo com a figura 9, pode-se definir as seguintes situações:

- Situação 1 - Não há exercício das opções e da conversão, pois o preço do título conversível atende a todas as condições de contorno do modelo.
- Situação 2 - A opção de compra é exercida e o investidor escolhe receber o preço de exercício da opção, já que nesta situação este valor é maior do que o valor de conversão.
- Situação 3 - A opção de compra é exercida e o investidor escolhe receber o valor de conversão, já que nesta situação este valor é maior do que o preço de exercício da opção de compra.
- Situação 4 - Exercício da Conversibilidade, já que nesta situação o valor do título não estaria sendo maximizado pelo investidor caso a mesma não fosse exercida (preço do título abaixo do valor de conversão).
- Situação 5 - Exercício da Conversibilidade, já que nesta situação o valor do título não estaria sendo maximizado pelo investidor caso a mesma não fosse exercida (preço do título abaixo do valor de conversão).
- Situação 6 - Exercício da Conversibilidade, já que nesta situação o valor do título não estaria sendo maximizado pelo investidor caso a mesma não fosse exercida (preço do título abaixo do valor de conversão).
- Situação 7 - Exercício da opção de venda, pois o preço do título encontra-se abaixo do preço de exercício da opção de venda, e este último encontra-se acima do valor de conversão.
- Situação 8 - Exercício da opção de venda, pois o preço do título encontra-se abaixo do preço de exercício da opção de venda, e este último encontra-se acima do valor de conversão.

A tabela 1 resume as ações que seriam tomadas e o desembolso (valor do LYON) para cada situação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

	situação 1	situação 2	situação 3	situação 4	situação 5	situação 6	situação 7	situação 8
$ ↑	PEoc	VT	VT	VC	VC	VC	PEoc	PEoc
	VT	PEoc	VC	VT	PEoc	PEoc	PEov	PEov
	PEov	PEov	PEoc	PEoc	VT	PEov	VT	VC
	VC	VC	PEov	PEov	PEov	VT	VC	VT
exercício da opção de compra		X	X					
exercício da opção de venda							X	X
conversão				X	X	X		
DESEMBOLSO	X	**PEoc**	**VC**	**VC**	**VC**	**VC**	**PEov**	**PEov**

VT = valor do TÍTULO
PEoc = preço de exercíco da opção de compra
PEov = preço de exercíco da opção de venda
VC = valor de conversão (conversion value)

Tabela 1 – Situações / Ações / Desembolso (valor do LYON)

De modo a esclarecer a tabela 1, apresenta-se a seguir a interpretação da situação 3:

- **situação 3** → valor do título (VT) > valor de conversão (VC) > preço de exercício da opção de compra (PE_{OC}) > preço de exercício da opção de venda (PE_{OV})

  ação: a opção de compra é exercida pelo emissor e o investidor escolhe receber o valor de conversão em detrimento do preço de exercício.

  desembolso (valor do título): valor de conversão (VC)

Resolvendo a equação diferencial do LYON (eq. 2), sujeita às 4 condições de contorno citadas anteriormente, tem-se o valor do título, dadas as premissas até aqui adotadas. Conforme já mencionado, o Método das Diferenças Finitas Implícito, descrito no apêndice 3, foi aplicado para resolução do problema, já que não existe uma solução analítica para a equação. Na aplicação do método, a equação diferencial é convertida em um conjunto de equações de diferenças, que, então, são resolvidas interativamente.

Assim, a equação diferencial que determina o comportamento do LYON (eq. 2) assume a forma:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

$$a_{i,j}L_{i,j-1} + b_{i,j}L_{i,j} + c_{i,j}L_{i,j+1} + = L_{i+1,j} \quad (3)$$

onde:

$$a_{i,j} = -\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t + \frac{1}{2} rj\Delta t - \frac{1}{2} d_y j\Delta t - \frac{1}{2\Delta S} de^{g(i\Delta t - t_0)}$$

$$b_{i,j} = \sigma^2 j^2 \Delta t + 1 + r\Delta t$$

$$c_{i,j} = -\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t - \frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} d_y j\Delta t + \frac{1}{2\Delta S} de^{g(i\Delta t - t_0)}$$

t_0 = diferença entre a data da emissão e a data de avaliação do título

Para discretização do preço da ação do emissor, S, escolhe-se uma quantidade de preços igualmente espaçados entre zero e $S_{máx}$, onde o $S_{máx}$ é determinado de forma que se possa definir o valor do título em qualquer instante, caso o preço da ação atinja este valor. Para discretização do tempo, t, escolhe-se uma quantidade de instantes, igualmente espaçados entre o tempo atual, zero, e o vencimento do título, T.

Para M+1 preços da ação do emissor e N+1 instantes, a representação gráfica dos valores discretizados de *S* e *t*, é uma grade com (M+1)x(N+1) pontos, cada um representando um valor de *S* e *t*. Observa-se que os valores possíveis dessas variáveis estão discretizados em um número finito de pontos, sendo o ponto (i,j) o correspondente ao instante iΔt e ao preço da ação jΔS. A figura 10 ilustra essa situação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

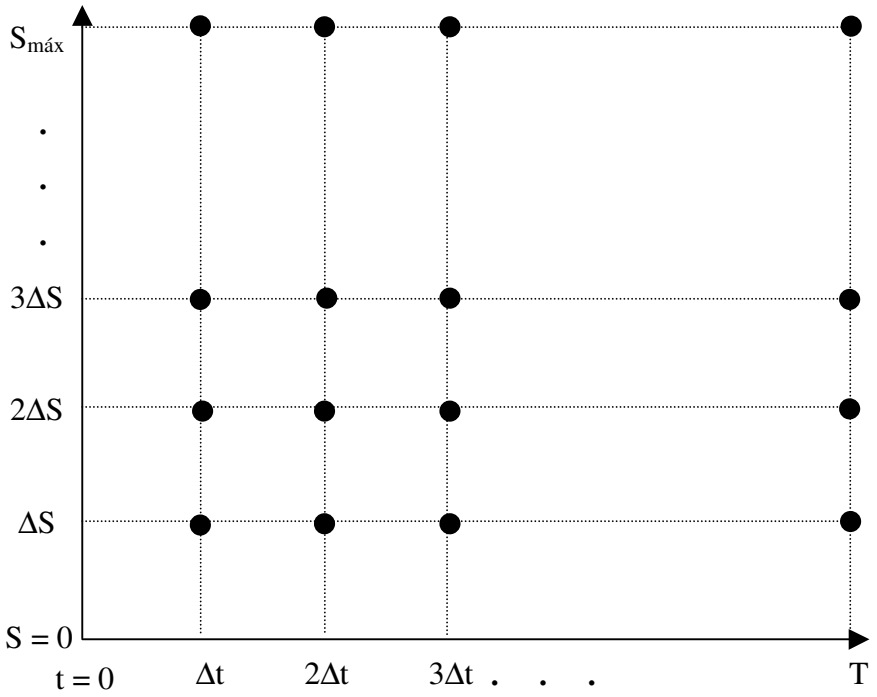

Figura 10 - Discretização dos valores do ativo objeto e do tempo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

5.4

Resolução da Equação - Definindo as Condições de Contorno no Método das Diferenças Finitas Implícito:

O valor do LYON no vencimento, T, é max [CRj ΔS, F], onde CR é o número de ações em que cada título pode ser convertido (taxa de conversão) e F é o valor de face. Assim:

$$L_{N,j} = máx[CRj\Delta S, F] \qquad j = 0,1,2,3...M$$

Caso $S=S_{max}$, o título será convertido. O S_{max} deve ser definido de forma que seja pouco provável o valor de conversão cair a ponto de ficar menor que o preço de exercício da opção de compra durante a vida útil do título (ver Figuras 6, 7 e 8). Logo:

$$L_{i,M} = CRM\Delta S \qquad i = 0,1,2,3...N$$

onde $M\Delta S = S_{máx}$

Caso S = 0, tem-se a falência do emissor, logo:

$$L_{i,0} = 0 \qquad i = 0,1,2,3...N$$

Graficamente, tem-se:

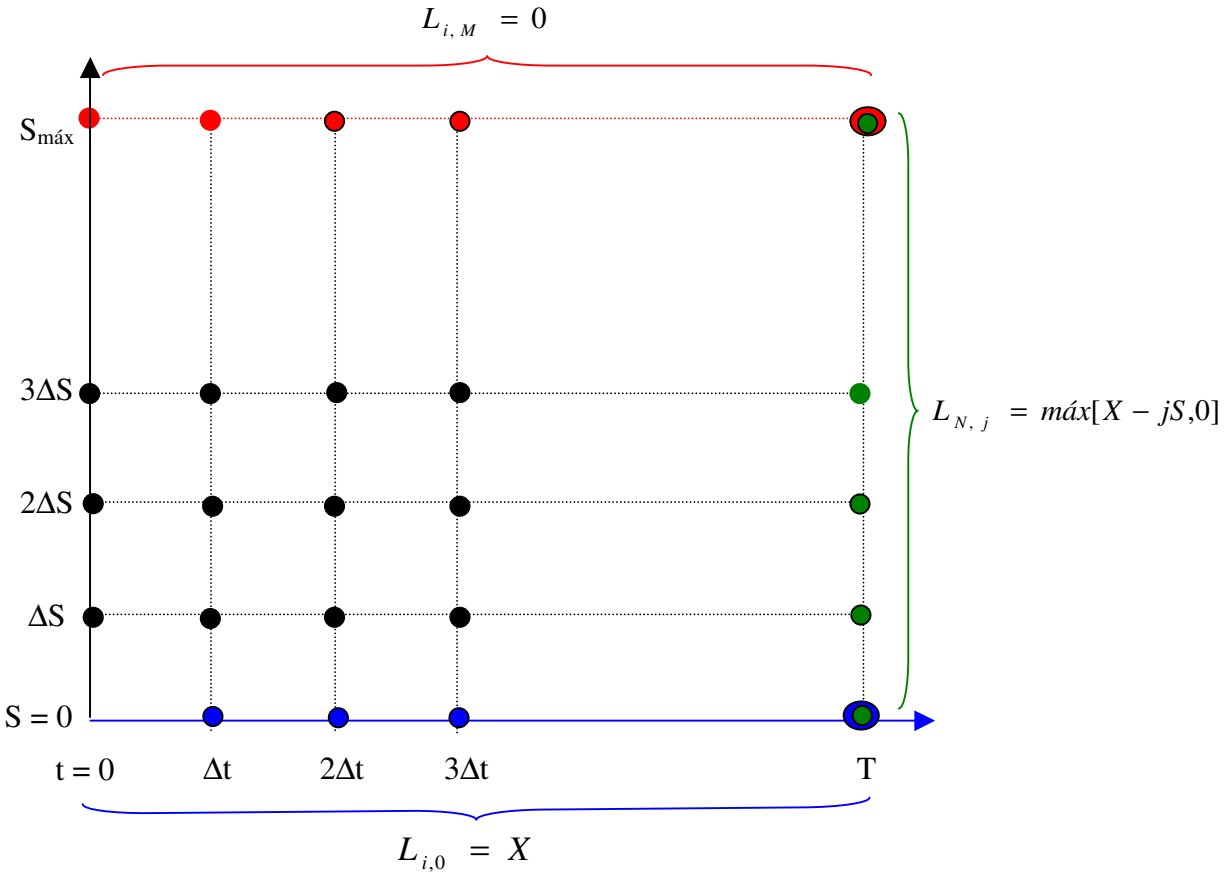

Figura 11 – Condições de Contorno

Definidos os valores do título nas três extremidades da grade, resta utilizar a eq. (3) para chegar-se ao valor de L em todos os outros pontos. Abordando primeiramente os pontos correspondentes ao instante T-Δt, ou seja, com i = N - 1:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA

$$a_{N-1,j}L_{N-1,j-1} + b_{N-1,j}L_{N-1,j} + c_{N-1,j}L_{N-1,j+1} + = L_{N,j} \quad (4)$$

Como j varia de 0 a M, para j = 0 e j = M, a eq. (4) não pode ser escrita, pois nestes casos não existiriam os temos $L_{N-1,\ j-1}$ e $L_{N-1,\ j+1}$ respectivamente. Assim, tem-se:

para j = 1: $a_{N-1,1}L_{N-1,0} + b_{N-1,1}L_{N-1,1} + c_{N-1,1}L_{N-1,2} + = L_{N,1}$

para j = 2: $a_{N-1,2}L_{N-1,1} + b_{N-1,2}L_{N-1,2} + c_{N-1,2}L_{N-1,3} + = L_{N,2}$

para j = 3: $a_{N-1,3}L_{N-1,2} + b_{N-1,3}L_{N-1,3} + c_{N-1,3}L_{N-1,4} + = L_{N,3}$

.

.

.

para j = M-1: $a_{N-1,M-1}L_{N-1,M-2} + b_{N-1,M-1}L_{N-1,M-1} + c_{N-1,M-1}L_{N-1,M} + = L_{N,M-1}$

Como estão definidos nas condições de contorno os valores de $L_{N-1,0}$, $L_{N-1,M}$ e ($L_{N,1}$, $L_{N,2}$, $L_{N,3,}$ ... $L_{N,M-1}$), obtem-se então M-1 equações e M-1 incógnitas.

Depois de determinados todos os valores possíveis do ativo para aquele determinado instante de tempo,"i", deve-se compará-los com os preços de exercício da opção de venda, com os preços de exercício da opção de compra e com o valor de conversão. Se o valor encontrado para o título em um determinado ponto (i,j) não estiver respeitando a área restrita pelas condições de contorno – ver regiões hachuradas em verde nas Figuras 3, 4, 5, 6, 7 e 8 – este então deve ser alterado de acordo com as estratégias ótimas definidas. Os nós correspondentes T-2Δt são então tratados de forma semelhante, e assim sucessivamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0212629/CA