6
O shift de Bernoulli

Neste capítulo estabeleceremos uma relação entre o *shift de Bernoulli* σ e a expansão em frações contínuas de um número no intervalo $[0,1)$. Mostraremos que o shift de Bernoulli e a transformação de Gauss são isomorfos. Desta forma podemos obter propriedades topológicas da transformação de Gauss que já foram obtidas na Seção 5.1.

Usando a expansão em frações contínuas, a um número irracional x associamos a seqüência infinita

$$x \in \mathbb{I} \mapsto a(x) = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots] \in \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}}.$$

Também temos que

$$a(T(x)) = [a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots].$$

Por outro lado, a um número racional x a expansão em frações contínuas associa uma seqüência finita $a(x) = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$. Temos $a(T(x)) = [a_2(x), \ldots, a_n(x)]$, isto é, se a expansão de x possui n termos, a de $T(x)$ tem $(n-1)$ termos. Em ambos os casos temos a seguinte relação para os dígitos da expansão em frações contínuas,

$$a_i(T(x)) = a_{i+1}(x).$$

Em resumo, a função $a(\cdot)$ que associa a um número de $[0,1)$ sua expansão em frações contínuas estabelece as relações biunívocas

$$a \ : \mathbb{Q} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \ldots\}^n,$$

$$a \ : \mathbb{I} \to \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}}.$$

Como os números racionais têm medida de Lebesgue e de Gauss nula, do ponto de vista de medida podemos esquecer $\mathbb{Q}$ e nos concentrar nos números irracionais $\mathbb{I}$. As relações obtidas acima sugerem uma introdução da transformação de translação à esquerda (shift) σ definida no conjunto $\{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}}$ como segue

$$\sigma \quad : \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}},$$

$$\sigma(i_k) = (j_k), \quad \text{onde} \quad j_k = i_{k+1}.$$

As relações acima implicam que

$$a(T(x)) = \sigma(a(x)).$$

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo que relaciona o shift, a Transformação de Gauss e a expansão em frações contínuas de um número irracional:

$$\begin{tikzcd}
\sigma\colon \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}} \arrow[r] & \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}} \\
T\colon \mathbb{I} \arrow[u, "a"] \arrow[r] & \mathbb{I} \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

Antes de continuar, consideraremos quadrúplas $(X, \mathcal{F}, \rho, T)$, onde X é um conjunto qualquer não vazio, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra definida em X, ρ é uma medida de probabilidade associada à σ-álgebra e f é uma transformação que preserva a medida ρ. No nosso caso consideraremos dois tipos de quadrúplas. A primeira da forma $X = [0, 1)$, $f = T$ a transformação de Gauss, $\rho = \mu$ a medida de Gauss. Na segunda teremos $X = \{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}}$ e $f = \sigma$ (o shift), sendo que a medida deverá ser definida mais tarde.

Definimos um isomorfismo entre duas quadrúplas da seguinte forma:

Definição 6.1 *As quadrúplas* $(X, \mathcal{F}, \rho, F)$ *e* $(Y, \mathcal{C}, \eta, G)$ *são isomorfas se existir uma transformação mensurável*

$$\psi : (X \backslash N) \rightarrow (Y \backslash N')$$

onde $N \subset X$, $N' \subset Y$ *com* $\rho(N) = \eta(N') = 0$, *que verifica as seguintes propriedades:*

(I) ψ *é bijetiva;*

(II) ψ *preserva medida, isto é,* $\rho(\psi^{-1}(C)) = \eta(C)$; *para todo* $C \in \mathcal{C}$,

(III) $\psi \circ F = G \circ \psi$.

Considere os números irracionais de $[0,1)$, que possuem medida de Gauss total, e a transformação $a: \mathbb{I} \to \{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}$ definida acima. Consideramos os cilindros $I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ de $[0,1)$ e a cada cilindro associamos um cilindro $H_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ em $\{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}$ como segue,

$$H_{i_1,\ldots,i_n} = \{(y_j) \in \{1,2,\ldots\}^n : y_1 = i_1, \cdots, y_n = i_n\}.$$

Agora estamos em condições de definir a σ-álgebra $\mathcal{C}$ e a medida ν em $\{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}$: os borelianos são os conjuntos $H_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$ e a medida é $\nu(H_{i_1,\ldots,i_n}) = \mu(I_{i_1,\ldots,i_n})$.

Por construção, da condição $a \circ T = \sigma \circ a$, tomando na Definição 6.1 $X = [0,1)$, $N = \mathbb{Q}$, $F = T$ (a transformação de Gauss), $\rho = \mu$ (a medida de Gauss) $Y = \{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}$, $N' = \emptyset$, $G = \sigma$ (o shift), $\eta = \nu$ (o *pullback* da medida de Gauss) e $\psi = a$ obtemos o seguinte:

Proposição 6.2 *Existe um isomorfismo entre as quadrúplas*

$$([0,1), \mathcal{B}, \mu, T) \quad e \quad (\{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}, \nu, \sigma).$$

Usando esta proposição podemos obter propriedades sobre a Transformação de Gauss de forma simples. Por exemplo, dado qualquer número $k \in \mathbb{N}$ existem os seguintes pontos periódicos de período k de T: consideramos todos os blocos de k números naturais (há uma infinidade deles) e para cada bloco $i_1, \ldots, i_k$ formamos a seqüência periódica

$$\iota = (i_1, \ldots, i_k, i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_1, \ldots, i_k, \ldots) \in \{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}.$$

Por construção e pela definição do shift σ,

$$\sigma^k(\iota) = \iota.$$

Logo, como $a \circ T = \sigma \circ a$, temos que $a^{-1}(\iota)$ é um ponto de período k de T.

Finalmente, observamos que usando a Proposição 6.2 podemos re-obter as propriedades topológicas da Seção 5.1. Para isto necessitariamos, em primeiro lugar, introduzir uma métrica (ou uma topologia) no conjunto $\{1,2,\ldots\}^{\mathbb{N}}$ que faça a conjugação ser um homeomorfismo. Basicamente, isto pode ser feito considerando os cilindros $H_{i_1,\ldots,i_k}$ como uma base da topologia. Intuitivamente, duas seqüências tal que seus primeiros termos coincidam estão próximas (e quanto mais termos coincidam aumenta a proximidade). Com esta topologia a transformação de conjugação a é contínua. Agora supondo que esta topologia está definida e aceitando a interpretação de proximidade dada veremos como obter uma órbita densa. Para isto consideraremos uma seqüência ι que *contém* todas as seqüências finitas de $\{1, 2, \ldots\}^{\mathbb{N}}$.

Supondo que a seqüência ι foi obtida veremos que sua órbita é densa. Dada uma seqüência ξ, uma vizinhança de ξ está definida pelas seqüências ζ cujos primeiros k termos coincidem com os de ξ. Quando k cresce, a vizinhança decresce. Suponhamos que os primeiros k termos de ξ são $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Como ι contém todas as seqüências finitas, este bloco aparece em ι no ℓ-ésimo lugar (isto é, se $\iota = (j_n)$ então $j_\ell = i_1, j_{\ell+1} = i_2, \ldots, j_{\ell+k-1} = i_k$). Agora temos que $\sigma^{\ell-1}(\iota)$ está na vizinhança escolhida de ξ: seus primeiros k termos são exatamente $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Afirmamos agora que a órbita de $a^{-1}(\iota)$ por T é densa. Para isto usa-se o fato de a ser um homeomorfismo, a conjugação $a \circ T = \sigma \circ a$, e que ι é densa para σ.

Finalmente, explicaremos como a seqüência ι pode ser obtida. Procedemos indutivamente, acrescentado em cada etapa um número finito de termos como segue: o primeiro passo é o termo 1, suponha dados k passos, o passo $k+1$ consiste em acrescentar todas as seqüências finitas cuja soma seja no máximo $(k+1)$ (estas seqüências têm no máximo $(k+1)$ termos). Note também que em cada passo acrescentamos um número finito de blocos. Se consideramos agora qualquer seqüência finita $(i_1, \ldots, i_k)$ cuja soma seja $j = i_1 + \cdots + i_k$, este processo garante que ela aparece no máximo na etapa j-ésima.