5
Transformação de Gauss: Propriedades topológicas e ergódicas

Este capítulo está dedicado ao estudo das propriedades de mistura (topológicas) da Transformação de Gauss. Daremos versões probabilísticas para alguns dos resultados obtidos nos capítulos precedentes.

Primeiro estudaremos, na Seção 5.1, algumas propriedades topológicas da Transformação de Gauss como a existência de órbitas densas e a densidade de pontos periódicos. Provaremos que dados dois abertos diferentes do intervalo $[0, 1)$ eles se interceptam após iterações (Proposição 5.2). Veremos como esta propriedade implica e existência de um conjunto residual de pontos cujas órbitas são densas (Proposição 5.4). A prova deste resultado usa os cilindros (intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$) que introduzimos na Seção 2.3.4. De fato, estes cilindros desempenham um papel importante neste capítulo.

A Seção 5.2 está dedicada ao estudo das propriedades mensuráveis (ergódicas) da Transformação de Gauss T. Em primeiro lugar definiremos a medida de Gauss μ (Definição 5.5). Veremos que ela é equivalente à medida de Lebesgue λ. Portanto, resultados para *quase todo ponto* (q.t.p) com respeito à medida de Gauss são também resultados q.t.p. para a medida de Lebesgue. Provaremos que a medida de Gauss é T-invariante (Proposição 5.8) e ergódica (Teorema 5.9).

Exploraremos na Seção 5.3 algumas conseqüências da ergodicidade da medida de Gauss, que nos permitirá utilizar o Teorema de Birkhoff (veja o Teorema 5.12) para obter resultados probabilísticos sobre a distribuição de dígitos de números reais genéricos (propriedades q.t.p.).

Finalmente, na Seção 5.4 daremos uma versão em termos de medida do Teorema 4.15 sobre boas aproximações de números reais por racionais. Em primeiro lugar, provaremos que o conjunto de números reais x cujos quocientes $a_i(x)$ são limitados tem medida nula (Teorema 5.17). Como conseqüência obteremos que o conjunto dos números reais $x \in [0, 1)$ para os quais a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

tem infinitas soluções para todo $C > 0$, tem medida de Gauss total (Corolário 5.18). No Teorema 5.25 veremos uma versão mais geral destes resultados.

5.1 Propriedades Topológicas

Nesta seção veremos algumas propriedades topológicas da Transformação de Gauss (transitividade, misturadora, e existência de órbitas densas). Estas propriedades decorrem da construção dos intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ da Seção 2.3.4, que chamaremos de cilindros.

Definição 5.1 *Dizemos que uma transformação $f : [0,1) \to [0,1)$ é*

- topologicamente transitiva *se para quaisquer par de conjuntos abertos não vazios U e $V \subseteq [0,1)$ existir um número natural n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;*
- topologicamente misturadora *se para quaisquer par de conjuntos abertos não vazios U e $V \subseteq [0,1)$, existir um número natural N tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n > N$.*

Obviamente, topologicamente misturador implica topologicamente transitivo. Observamos que existem transformações que são topologicamente transitivas que não são topologicamente misturadoras. Os exemplos mais simples são as rotações irracionais do círculo.

Proposição 5.2 *A transformação de Gauss T é topologicamente misturadora.*

Prova: Consideremos dois abertos não vazios U e V de $[0,1)$. Sabemos que existe um cilindro $I_{i_1,\dots,i_j,k}$ contido em U (para isto basta tomar j suficientemente grande). Então, lembrando as propriedades dos cilindros $I_{i_1,\dots,i_n}$, obtemos

$$T^j(x) \in T^j(I_{i_1,\dots,i_j,k}) = I_k$$

Como $T(I_k) = [0,1)$,

$$T^{j+1}(I_{i_1,\dots,i_j,k}) = T(T^j(I_{i_1,\dots,i_j,k})) = T(I_k) = [0,1).$$

Portanto, para todo $m \geq 1$ se verifica $T^{j+m}(U) = [0,1)$. Logo $T^{j+m}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $m \geq 1$. Tomando $N = j$ na definição de transformação topologicamente misturadora concluímos a prova. $\square$

Corolário 5.3 *Os pontos periódicos da transformação de Gauss formam um conjunto denso de $[0,1)$.*

Prova: Na prova da Proposição 5.2 obtivemos que dado qualquer intervalo I aberto existe $m \in \mathbb{N}$ e um subintervalo J de I tal que T^m é contínua em J e $T^m(J) = [0,1)$. Portanto, $J \subset T^m(J)$ e por continuidade T^m possui um ponto fixo em J. Como I pode ser escolhido arbitrariamente pequeno obtemos o resultado. $\square$

Proposição 5.4 *Existe um conjunto residual (portanto, denso) D do intervalo $[0,1)$ tal que a órbita de qualquer ponto de D é densa em $[0,1)$.*

Prova: Em primeiro lugar observamos que dado qualquer aberto U do intervalo $[0,1)$ o conjunto

$$P(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(U)$$

é denso em $[0,1)$. Esta afirmação é conseqüência da Proposição 5.2. Considere qualquer ponto $x \in [0,1)$ e qualquer $\epsilon > 0$, e a bola aberta $B_\epsilon(x)$ com centro $x \in [0,1)$ e raio ϵ. Pela Proposição 5.2 temos que $T^i(B_\epsilon(x)) \cap U \neq \emptyset$, e portanto $B_\epsilon(x) \cap T^{-i}(U) \neq \emptyset$. Isto prova que $P(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(U)$ é denso em [0,1).

Consideremos agora uma base enumerável $\{U_n\}_{i \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças do intervalo $[0,1)$. Para cada aberto U_n consideramos o aberto

$$P_n = P(U_n) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(U_n).$$

Pela observação anterior estes conjuntos são densos. Portanto,

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

é um conjunto residual (portanto denso) de $[0,1)$.

Afirmamos que todo ponto $z \in D$ tem órbita positiva densa no intervalo $[0,1)$. Dados $y \in [0,1)$ e $\epsilon > 0$ devemos encontrar um iterado positivo de z em $B_\epsilon(y)$. Observamos que existe algum aberto U_n contido em $B_\epsilon(y)$. Como $z \in D$, $z \in P(U_n)$, e portanto existe j tal que $z \in T^{-j}(U_n)$. Assim, $T^j(z) \in U_n \subset B_\epsilon(y)$, concluindo a prova. $\square$

5.2 Propriedades Ergódicas

Nesta seção veremos que a Transformação de Gauss possui uma medida invariante e ergódica, que chamaremos *medida de Gauss* e está definida como segue:

Definição 5.5 *A* medida de Gauss μ *do intervalo* (a,b) *de* $[0,1)$ *é dada por*

$$\mu(a,b) = \frac{1}{\log 2}\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right). \tag{5-1}$$

Esta fórmula implica que a medida de Gauss é equivalente a medida de Lebesgue (possuem os mesmos conjuntos de medida nula), que denotaremos por λ. Mais precisamente:

Observação 5.6 *Como a densidade da medida de Gauss verifica*

$$\frac{1}{2\log 2} < \frac{1}{(\log 2)\,(1+x)} \leq \frac{1}{\log 2},$$

temos que para qualquer conjunto mensurável $A \subseteq [0,1)$ *satisfaz*

$$\frac{1}{2\log 2}\,\lambda(A) < \mu(A) \leq \frac{1}{\log 2}\,\lambda(A).$$

Esta relação implica que as medidas de Gauss e Lebesgue são equivalentes (possuem os mesmos conjuntos de medida nula).

Lembramos que uma medida ν é *invariante* pela Transformação de Gauss se $\nu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$ para todo conjunto A mensurável. A medida ν é *ergódica* com respeito à Transformação de Gauss se os conjuntos invariantes de T (isto é, que verificam $T^{-1}(A) = A$) verificam $\nu(A) = 1$ ou $\nu(A) = 0$ (estamos supondo que ν é uma medida de probabilidade).

Os dois principais resultados desta seção são os seguintes:

– A medida de Gauss é T-invariante (Proposição 5.8);

– A medida de Gauss é ergódica (Teorema 5.9).

Para obter estes resultados necessitamos retornar aos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ da Seção 2.3.4. Um passo essencial é calcular a medida de Lebesgue destes intervalos. A primeira etapa é escrever estes intervalos em função dos convergentes.

Lema 5.7 *Os intervalos* $I_{i_1,\dots,i_n}$ *são dados por:*

– $I_{i_1,\dots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$, *se* n *é par,*

– $I_{i_1,\dots,i_n} = \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right]$, *se* n *é ímpar,*

onde $\frac{p_n}{q_n}$ *é o n-ésimo convergente* $[i_1,\dots,i_n]$.

Prova: Em primeiro lugar veremos que o intervalo $I_{i_1,\ldots,i_n}$ tem extremos

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{e} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}.$$

Para isso é suficiente observar que, por construção, todo número x do intervalo $I_{i_1,\ldots,i_n}$ é da forma

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + T^n(x)}}}}.$$

Então, pela Propriedade (II), todo número $x \in I_{i_1,\ldots,i_n}$ pode ser escrito da forma

$$\frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}}.$$

Como $0 \leq T^n(x) < 1$ temos que todo número $x \in I_{i_1,\ldots,i_n}$ está entre

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{e} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}.$$

Por outro lado, novamente pela Propriedade (III), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \quad &\Longleftrightarrow p_n\, q_n + p_n\, q_{n-1} < p_n\, q_n + p_{n-1}\, q_n \\
&\Longleftrightarrow 0 < p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n \\
&\Longleftrightarrow n \text{ é par .}
\end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema. □

Assim, denotando a medida de Lebesgue por λ e usando o Lema 5.7 e a Propriedade (III), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda(I_{i_1,\ldots,i_n}) \quad &= \pm\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = \\
&= \pm\left(\frac{p_n\, q_n + p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_n + p_n\, q_{n-1}}{q_n(q_n + q_{n-1})}\right) = \qquad (5\text{-}2) \\
&= \pm\left(\frac{(-1)^n}{q_n(q_n + q_{n-1})}\right) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Note que usamos $+$ quando n é par e $-$ quando n é ímpar.

Proposição 5.8 *A medida de Gauss μ é T-invariante.*

Prova: Observamos em primeiro lugar que no intervalo $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ temos que $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n$. Portanto, qualquer número $x \in I_n$ pode ser escrito da forma $x = \dfrac{1}{n+\alpha}$, onde $\alpha \in (0,1)$. Por definição temos,

$$T(x) = T\left(\frac{1}{n+\alpha}\right) = (n+\alpha) - \lfloor n+\alpha \rfloor = n + \alpha - n = \alpha.$$

Logo, se $(a,b) \subset [0,1)$, temos que sua pré-imagem no intervalo I_n é

$$\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Portanto, como o intervalo (a,b) tem uma pré-imagem em cada intervalo I_n, temos que

$$T^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Seja $\mu(T^{-1}((a,b))) = K$, então temos que

$$\begin{aligned} K = \ & \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1 + \frac{1}{n+a}}{1 + \frac{1}{n+b}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{\frac{n+a+1}{n+a}}{\frac{n+b+1}{n+b}}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{n+a+1}{n+a} \, \frac{n+b}{n+b+1}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+a+1) - \log(n+a) + \log(n+b) - \log(n+b+1)}{\log 2} = \\ & = \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right) = \mu((a,b)). \end{aligned}$$

Isto termina a prova da proposição. $\square$

Teorema 5.9 *A transformação de Gauss é ergódica com respeito a medida de Gauss μ.*

Prova: O ingrediente principal da prova do teorema é o seguinte lema:

Lema 5.10 *Considere um número natural* n *e um intervalo* $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$. *Então qualquer conjunto mensurável* A *contido em* $[0,1)$ *verifica*

$$\frac{1}{4}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq 4\,\mu(A).$$

Lembramos que dada uma medida ν e dois conjuntos mensuráveis A e B com $\nu(B) > 0$, a medida condicional de A com respeito a B, $\nu(A|B)$, é definida como

$$\frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}.$$

Posporemos a prova do lema e usando-o demonstraremos a seguir o teorema.

Seja A um conjunto T-invariante mensurável tal que $\mu(A) > 0$. Devemos provar que $\mu(A) = 1$. Pelo Lema 5.10 e a T-invariância de A,

$$\frac{1}{4}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) = \mu(A|I_{[n]}) \leq 4\,\mu(A).$$

Como a $\mu(A) > 0$ e $T^{-n}(A) = A$, esta condição é equivalente a

$$\frac{1}{4}\,\mu(I_{[n]}) < \mu(I_{[n]}|T^{-n}(A)) = \mu(I_{[n]}|A) \leq 4\,\mu(I_{[n]}).$$

Finalmente, como os intervalos $I_{[n]}$ geram a σ-algebra obtemos

$$\frac{1}{4}\,\mu(B) < \mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \leq 4\,\mu(B), \tag{5-3}$$

para qualquer conjunto mensurável $B \subseteq [0,1)$.

Agora estamos prontos para finalizar a prova do teorema. Suponha por contradição que $\mu(A) < 1$. Escolhemos $B = [0,1)\backslash A$, então $\mu(B) > 0$. Por outro lado, usando a equação (5-3), temos que

$$\frac{1}{4}\,\mu(B) < \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \frac{0}{\mu(A)} = 0,$$

o que contradiz o fato $\mu(B) > 0$. Logo, $\mu(A) = 1$, e portanto T é ergódica.

Prova do Lema: Fixados um número natural n e uma família $i_1, \dots, i_n$ de números naturais, consideramos o intervalo $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$. Pelo Lema 5.7,

$$I_{i_1,\dots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right) \ (n \text{ par}), \quad I_{i_1,\dots,i_n} = \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right] \ (n \text{ ímpar}).$$

Pela Propriedade (II), todo $z \in I_{i_1,\dots,i_n}$ pode ser escrito da forma

$$z = \frac{p_n + (T^n(z))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(z))\, q_{n-1}}.$$

Como para qualquer intervalo $(a,b) \subset [0,1)$ temos

$$z \in T^{-n}((a,b)) \cap I_n = \{z \colon z \in I_n \text{ e } a < T^n(z) < b\},$$

donde

$$T^{-n}((a,b)) \cap I_n = \left(\frac{p_n + a\, p_{n-1}}{q_n + a\, q_{n-1}}, \frac{p_n + b\, p_{n-1}}{q_n + b\, q_{n-1}} \right), \quad \text{se } n \text{ é par},$$

$$T^{-n}((a,b)) \cap I_n = \left(\frac{p_n + b\, p_{n-1}}{q_n + b\, q_{n-1}}, \frac{p_n + a\, p_{n-1}}{q_n + a\, q_{n-1}} \right), \quad \text{se } n \text{ é ímpar}.$$

Assim, fixados qualquer intervalo $(a,b) \subset [0,1)$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
K_n &= \lambda(T^{-n}((a,b)) \cap I_{[n]}) = \\
&= \pm \left(\frac{p_{n-1}\, b + p_n}{q_{n-1}\, b + q_n} - \frac{p_{n-1}\, a + p_n}{q_{n-1}\, a + q_n} \right) = \\
&= \pm \left[\left(\frac{a\, b\, p_{n-1}\, q_{n-1} + a\, p_n\, q_{n-1} + b\, p_{n-1}\, q_n + p_n\, q_n}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{-a\, b\, p_{n-1}\, q_{n-1} - b\, p_n\, q_{n-1} - a\, p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_n}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) \right] = \\
&= \pm \left(\frac{b\, p_{n-1}\, q_n + a\, p_n\, q_{n-1} - a\, p_{n-1}\, q_n - b\, p_n\, q_{n-1}}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) = \\
&= \pm \left(\frac{(b-a)\,(p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1})}{(q_n + a\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) = \\
&= \frac{b-a}{(q_n + a\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos a Propriedade (III). Observamos que usamos $+$ quando n é par e $-$ quando n é ímpar.

Usando a equação (5-2),

$$\lambda(I_{i_1,\dots,i_n}) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

temos que

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-n}((a,b))|I_{[n]}) &= \frac{\lambda(T^{-n}((a,b)) \cap I_{[n]})}{\lambda(I_{[n]})} = \\ &= (b-a)\, \frac{q_n(q_n+q_{n-1})}{(q_n+b\,q_{n-1})(q_n+a\,q_{n-1})}. \end{aligned} \tag{5-4}$$

Afirmação 5.11

$$\frac{1}{2} < \frac{q_n(q_n+q_{n-1})}{(q_n+b\,q_{n-1})(q_n+a\,q_{n-1})} \leq 2.$$

Posporemos a prova da afirmação e concluiremos a prova do Lema 5.10. Usando a equação (5-4) e a Afirmação 5.11, obtemos

$$\frac{1}{2}\,\lambda((a,b)) = \frac{1}{2}\,(b-a) < \lambda(T^{-n}((a,b))|I_{[n]}) \leq 2\,(b-a) = 2\,\lambda((a,b)).$$

Finalmente, como os intervalos (a,b) geram a σ-algebra da medida de Gauss, obtemos

$$\frac{1}{2}\,\lambda(A) < \lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq 2\,\lambda(A), \tag{5-5}$$

para qualquer conjunto mensurável $A \subseteq [0,1)$.

Agora, usando a Observação 5.6,

$$\frac{1}{2\log 2}\,\lambda(A) < \mu(A) \leq \frac{1}{\log 2}\,\lambda(A),$$

e a equação (5-5) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\,\mu(A) \leq \frac{1}{4\,\log 2}\,\lambda(A) &< \frac{1}{2\,\log 2}\,\lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) < \\ &< \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\log 2}\,\lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq \frac{2}{\log 2}\,\lambda(A) \leq 4\,\mu(A). \end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{4}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq 4\,\mu(A).$$

Portanto, para concluir a prova do lema falta demonstrar a Afirmação 5.11.

Prova da Afirmação: Provaremos a última desigualdade (a primeira decorre de forma análoga e será omitida). Como a seqüência (q_i) é monótona crescente e $q_i > 1$ para todo $i \geq 2$ (lembre a Propriedade (V)), temos que

$$\begin{aligned} 2\, q_n\,(q_n + q_{n-1}) \leq 2\, q_n\,(q_n + q_n) = 4\, q_n^2 &= 4\,(q_n + 0\, q_{n-1})(q_n + 0\, q_{n-1}) \\ &\leq 4\,(q_n + a\, q_{n-1})(q_n + a\, q_{n-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{q_n\,(q_n + q_{n-1})}{(q_n + a\, q_{n-1})(q_n + a\, q_{n-1})} \leq \frac{4}{2} = 2.$$

O que prova a última desigualdade da afirmação. □

A prova do lema agora está concluida. □

Provado o lema, a demonstração do Teorema 5.9 está finalizada. □

5.3 Conseqüências da ergodicidade

Com a ergodicidade da Transformação de Gauss podemos usar o Teorema de Birkhoff para obter algumas propriedades relevantes sobre a distribuição de dígitos na expansão em frações contínuas de quase todo número do intervalo $[0, 1)$ (isto é, um conjunto de medida de Gauss total, e como a medida de Gauss é equivalente à medida de Lebesgue, para um conjunto de medida de Lebesgue 1 em $[0, 1)$). Por exemplo, obteremos a freqüência com que um determinado número natural aparece na seqüência de quocientes de quase todo número real x (veja a Proposição 5.13). Outras propriedades sobre quocientes e os convergentes de quase todo número real são obtidas na Proposição 5.14.

Em primeiro lugar enunciaremos o Teorema de Birkhoff (para ver uma prova deste teorema veja a referência (6)), para isso necessitamos de algumas definições.

Um *espaço de probabilidade* é a tripla $(X, \mathcal{F}, \nu)$, onde X é um conjunto qualquer não-vazio, $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra definida em X, e ν é uma medida de probabilidade associada à σ-álgebra $\mathcal{F}$. Lembramos que uma transformação $G\colon X \to X$ preserva a medida ν (ou que ν é G-invariante) se $G^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ e $\nu(G^{-1}(B)) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}$. Denotaremos por $L^1(X)$ o conjunto das funções integráveis no espaço de probabilidade $(X, \mathcal{F}, \nu)$. Agora podemos enunciar o Teorema Ergódico de Birkhoff.

Teorema 5.12 (Teorema Ergódico de Birkhoff) *Seja $(X, \mathcal{F}, \nu)$ um espaço de probabilidade e $G\colon X \to X$ uma transformação que preserva a medida ν. Então, para qualquer $f \in L^1(X)$, existe uma função mensurável $g_f \in L^1(X)$ e G-invariante com as seguintes propriedades:*

– *para quase todo* $x \in X$ *(respeito à medida* ν*) se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ G^i(x) = g_f(x)$$

– $\int_X f\, d\nu = \int_X g_f\, d\nu.$

Além disso, se a medida ν *é ergódica (respeito a* G*),* g_f *é constante em particular,*

$$g_f(x) = \int_X f\, d\mu, \quad \text{para quase todo } x \in X.$$

Veremos agora algumas conseqüências do Teorema Ergódico de Birkhoff.

Proposição 5.13 *Para quase todo* $x \in [0,1)$*, a freqüência com que aparece um número* $k \in \mathbb{N}$ *na expansão em frações contínuas de* x*,* $[a_1(x), a_2(x), \ldots]$*, verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \in [1,n] \colon a_i(x) = k\}}{n} = \frac{1}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

Prova: Seja χ_A a função característica do conjunto $A = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Como $a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$, temos que:

$$a_n(x) = k \Longleftrightarrow T^{n-1}(x) \in A \Longleftrightarrow \chi_A(T^{n-1}(x)) = 1.$$

Assim,

$$\frac{\#\{1 \le i \le n,\, a_i = a_i(x) = k\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)).$$

Como T é ergódica com respeito à medida de Gauss e $\chi_A \in L^1[0,1)$ (onde $L^1[0,1)$ denota o conjunto das funções integráveis em $[0,1)$), pelo Teorema de Birkhoff, para quase todo ponto $x \in [0,1)$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)) = \int_0^1 \chi_A(T^i(x))\, d\mu = \mu(A).$$

Portanto,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \le i \le n,\ a_i = a_i(x) = k\}}{n}.$$

Finalmente, pela definição da medida de Gauss, lembre a equação (5-1), temos

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1 + \dfrac{1}{k}}{1 + \dfrac{1}{k+1}} \right) = \frac{1}{\log 2} \log \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Donde obtemos a proposição. □

Na Proposição 5.13 calculamos a freqüência com que aparece um determinado número (dígito) na expansão em frações contínuas de quase todo ponto do intervalo $[0,1)$. A seguir generalizaremos este resultado calculando a freqüência com que um determinado bloco de k números naturais maiores ou iguais do que 1 da forma $i_1\, i_2\, \ldots\, i_k$ aparece.

Como $a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x))$, temos que

$$\begin{gathered} a_j(x) = i_1 \Longleftrightarrow a_1(T^{j-1}(x)) = i_1 \Longleftrightarrow T^{j-1}(x) \in I_{i_1}; \\ \vdots \\ a_{j+r}(x) = i_{r+1} \Longleftrightarrow a_1(T^{j+r-1}(x)) = i_{r+1} \Longleftrightarrow T^{j+r-1}(x) \in I_{i_{r+1}}; \\ \vdots \\ a_{j+k-1}(x) = i_k \Longleftrightarrow a_1(T^{j+k-2}(x)) = i_k \Longleftrightarrow T^{j+k-2}(x) \in I_{i_k}. \end{gathered}$$

Da definição do intervalo $I_{i_1,\cdots,i_k}$, concluímos que

$$a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1} = i_k \Longleftrightarrow T^{j-1}(x) \in I_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Chamaremos $I_{i_1,\ldots,i_k} = A$ e χ_A a função característica do conjunto A. Temos então que

$$a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1}(x) = i_k \Longleftrightarrow \chi_A(T^{j-1}(x)) = 1.$$

Como χ_A é integrável em $[0,1)$ e a Transformação de Gauss preserva a medida de Gauss μ, pelo Teorema de Birkhoff, para quase todo ponto $x \in [0,1)$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_A(T^{j-1}(x)) = \int_0^1 \chi_A \, d\mu = \mu(A)$$

Como dado $x \in [0,1)$ se verifica

$$\frac{1}{n}\,\#\{j \in [1,n] \colon a_j(x) = i_1, \dots, a_{j+k-1}(x) = i_k\} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_A(T^{j-1}(x)),$$

obtemos que quase todo ponto $x \in [0,1)$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\#\{j \in [1,n] \colon a_j(x) = i_1, \dots, a_{j+k-1}(x) = i_k\} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_A(T^{j-1}(x)) = \mu(A).$$

Pela equação (5-1) temos que

– Se k é par

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2}\ \log\left(\frac{1 + \dfrac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}}{1 + \dfrac{p_k}{q_k}}\right);$$

– Se k é ímpar

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2}\ \log\left(\frac{1 + \dfrac{p_k}{q_k}}{1 + \dfrac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}}\right).$$

Proposição 5.14 *Para quase todo $x \in [0,1)$:*

(I)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,(a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)) = \infty.$$

(II)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\,a_2(x)\,\cdots\,a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log k/\log 2}.$$

(III)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\log(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12\,\log 2}.$$

(IV)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\log\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = \frac{-\pi^2}{6\log 2}.$$

Isto significa que o erro de aproximação entre x e o convergente $\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$ é de ordem $\exp\left(\dfrac{-n\,\pi^2}{6\,\log 2}\right)$.

Prova: Consideramos a função

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1(x).$$

Como $a_i(x) = a_1(T^{i-1}(x))$, temos que

$$\frac{1}{n}\left(a_1(x) + \cdots + a_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

Infelizmente, $f \notin L^1[0,1)$ e, portanto, não podemos aplicar o Teorema de Birkhoff diretamente. De fato, temos que

$$1 > T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - f(x),$$

logo

$$f(x) > \frac{1-x}{x}.$$

Donde,

$$\int_0^1 f\,d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx > \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1-x}{x\,(1+x)}\,dx = \infty.$$

Para sanar o problema da não integrabilidade de f consideramos seus truncamentos. Mais precisamente, para cada $N > 0$ definimos a função

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq N; \\ 0 & \text{se } f(x) > N. \end{cases}$$

Note que esta função é limitada e com um número finito de descontinuidades, portante é integrável. Então, como T preserva a medida de Gauss μ, podemos agora aplicar o Teorema de Birkhoff a cada f_N. Assim, para qualquer $N > 0$ e para quase todo ponto $x \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) = \\ &= \int_0^1 f_N\,d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}\,dx.\end{aligned}$$

Mas,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}\, dx = \infty.$$

Portanto, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \infty.$$

Isto termina a prova do item (I).

Provaremos agora o item (II). Seja $g(x) = \log(a_1(x))$. Em primeiro lugar, veremos que $g \in L^1[0,1)$. Para isso é suficiente ver que sua integral com respeito a medida de Gauss é finita,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g\, d\mu \quad &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, é suficiente ver que a última série é convergente. Expandindo em série de Taylor a função $\log(1+1/x)$ no ponto 1 obtemos que se k é suficientemente grande então

$$\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Portanto, é suficiente ver a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$$

Usando agora o critério de comparação, isto decorre do fato da integral $\int_1^{\infty} (\log x)/x^2\, dx$ ser convergente. Logo $g \in L^1[0,1)$.

Assim, podemos aplicar o Teorema de Birkhoff (lembre também que T preserva a medida de Gauss) à função g, obtendo que para quase todo $x \in [0,1)$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) = \int_0^1 g\, d\mu.$$

Partindo o intervalo $[0,1)$ em intervalos $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, onde a função g é constante, obtemos

$$\int_0^1 g\, d\mu = \int_{\cup_{k=1}^{\infty} I_k} g\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} g\, d\mu.$$

Como no intervalo $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, sabemos que $a_1(x) = k$. Então,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k \, d\mu = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log k/\log 2}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, sabendo que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log(a_1(T^i(x)))\right) &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(a_i(x))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\, a_2(x) \cdots a_n(x)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para quase todo $x \in [0,1)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\, a_2(x) \cdots a_n(x)} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i(x)\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log a_1(T^i(x))\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log k/\log 2}\right)\right) = \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log k/\log 2}.
\end{aligned}
$$

Assim, finalizamos a prova de (II).

Iniciaremos a prova do item (III) lembrando da Propriedade (IV),

$$p_n(x) = q_{n-1}(T(x)).$$

Desta forma obtemos,

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{1}{q_n(x)} \frac{p_n(x)}{q_{n-1}(T(x))} \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-2}(T^2(x))} \cdots \frac{p_2(T^{n-2}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))} \frac{p_1(T(x))}{q_0(T(x))}.$$

Portanto, reagrupando os fatores obtemos,

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} \frac{p_{n-2}(T^2(x))}{q_{n-2}(T^2(x))} \cdots \frac{p_1(T(x))}{q_1(T(x))} \frac{1}{q_0(x)}.$$

Assim, tomando logaritmos,

$$\log\left(\frac{1}{q_n(x)}\right) = \log\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Isto é,

$$-\log q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Dividindo por n,

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Obtendo finalmente que

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log T^k(x) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right) - \log T^k(x)\right).$$

Portanto, para concluir a prova do item (IV) é suficiente verificar que para quase todo ponto $x \in [0,1)$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log(T^k(x)) = -\frac{\pi^2}{12\,\log 2}$$

e que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right) - \log T^k(x)\right)$$

converge para 0 quando $n \to \infty$.

A primeira afirmação segue do Teorema de Birkhoff. Isto é, para quase todo $x \in [0,1)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log T^k(x) &= \int_0^1 \log x \, d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = \\
&= \frac{1}{\log 2}\left[\log(x)\, \log(1+x) - \int \frac{\log(1+x)}{x}\, dx\right]_0^1 = \\
&= -\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx.
\end{aligned}$$

Expandindo em série $\log(1+x)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log T^k(x) &= -\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) dx = \\
&= -\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right) dx = \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots\right]_0^1 = \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\right) = \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(\frac{\pi^2}{12}\right),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$ (veja (10)).

Vamos agora provar a segunda afirmação. Para n par temos que

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio, dado $x \in I_{i_1,\cdots,i_n}$, temos

$$0 < \frac{\log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{x - \frac{p_n}{q_n}} = \frac{d\log(\gamma)}{d\gamma}, \quad \text{onde} \quad \gamma \in \left(\frac{p_n}{q_n}, x\right).$$

Portanto, como $x \in I_{i_1,\cdots,i_n}$ e $\gamma \in \left(\frac{p_n}{q_n}, x\right)$, usando a Propriedade (III), obtemos

$$0 < \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) <$$

$$< \frac{q_n}{p_n}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{q_n}{p_n}\left(\frac{q_n\, p_{n-1} - p_n\, q_{n-1}}{q_n\,(q_n + q_{n-1})}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{p_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{p_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n}.$$

Como para n ímpar,

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right].$$

De maneira totalmente análoga temos que

$$0 > \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) > \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right)\frac{1}{\gamma} > -\frac{1}{q_n}.$$

Isto mostra que

$$\left|\log x - \log\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)\right| < \frac{1}{q_n}.$$

Observando que $T^k(x) \in I_{i_1,\ldots,i_{n-k}}$, a mesma prova fornece

$$\left|\log(T^k(x)) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| < \frac{1}{q_{n-k}(T^k(x))}.$$

Como pela Propriedade (V), $q_n(T^k(x)) \geq 2^{(n-1)/2}$, temos que

$$\left|\log(T^k(x)) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| \to 0$$

quando $n \to \infty$. Isto termina a prova da segunda afirmação.

Portanto, para quase todo $x \in [0, 1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Isto termina a prova do item (III) e a demonstração da proposição.

Para provar o item (IV), note que pelo Teorema 4.1,

$$\frac{1}{q_n\,(q_{n+1} + q_n)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n\, q_{n+1}}.$$

Como $q_{n+1} \geq q_n$, temos que,

$$2\, q_n\, q_{n+1} = q_n\, (q_{n+1} + q_{n+1}) \geq q_n\, (q_{n+1} + q_n).$$

Logo,

$$\frac{1}{2\, q_n\, q_{n+1}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n\, q_{n+1}}.$$

Tomando logaritmos e usando suas propriedades, temos que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{2\, q_n\, q_{n+1}}\right) &= -\log(2\, q_n\, q_{n+1}) = -\log 2 - \log q_n - \log q_{n+1} < \\
&< \log\left(\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|\right) \leq \log\left(\frac{1}{q_n\, q_{n+1}}\right) = \\
&= -\log(q_n\, q_{n+1}) = -\log q_n - \log q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dividindo por n,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\,\log 2 - \frac{1}{n}\,\log q_n - \frac{1}{n}\,\log q_{n+1} \quad &< \frac{1}{n}\,\log\left(\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|\right) \leq \\
&\leq -\frac{1}{n}\,\log q_n - \frac{1}{n}\,\log q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Como, usando o item (III), para quase todo $x \in [0,1)$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\log q_n = \frac{\pi^2}{12\,\log 2},$$

e como (também para quase todo ponto)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\log q_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{n+1}\,\log q_{n+1} = \frac{\pi^2}{12\,\log 2},$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|\right) = -2\left(\frac{\pi^2}{12\,\log 2}\right) = \frac{-\pi^2}{6\,\log 2}$$

Isto termina a prova do item (IV), e da Proposição. $\square$

5.4 Aplicação para aproximação Diofantina

Vimos no Teorema 4.15 que os números x com quocientes limitados não admitem soluções para a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2},$$

quando C é suficientemente pequeno. Veremos agora que os números para os quais a desigualdade não tem solução (isto é, aqueles com quocientes limitados) constituem um conjunto de medida nula. Em particular, o conjunto dos números reais com quocientes ilimitados tem medida total, assim, novamente pelo Teorema 4.15, quase todos os números admitem infinitas soluções para desigualdade dada acima.

Dada uma seqüência $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos, para cada n definimos o conjunto

$$E_n = E_{\alpha_n} = \{x = [a_1(x), \dots, a_k(x), \dots] \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\}.$$

Um dos principais resultados desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 5.15 *Considere a medida de Gauss μ, uma seqüência $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos e a seqüência de conjuntos mensuráveis $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$E_n = \{x \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\}.$$

Defina o conjunto

$$E_\infty = \{x \in [0,1) \colon a_i(x) > \alpha_i \quad \textit{para infinitos valores de } i\},$$

isto é, E_∞ é o conjunto dos números $x \in [0,1)$ que pertencem a infinitos E_n. Então,

- $\mu(E_\infty) = 0, \quad$ *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty;$
- $\mu(E_\infty) = 1, \quad$ *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$

Observamos que, pela definição de E_∞, se verifica

$$E_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$

portanto, o conjunto E_∞ é mensurável.

Assim, podemos reescrever o teorema acima da seguinte maneira:

– $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\right)=0,\ \text{se}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}<\infty;$

– $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\right)=1,\ \text{se}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}=\infty.$

Observação 5.16 *Como um exemplo do Teorema 5.15 podemos observar que o limite da expressão*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_i \tag{5-6}$$

não existe para quase todo número em $[0,1)$*.*

Para isso é suficiente ver que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

é divergente (basta aplicar o Teste da Condensação de Cauchy).

Assim, pelo Teorema 5.15, temos que para infinitos valores de n

$$a_n > n\log n$$

para quase todo número em $[0,1)$*. Então,*

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i > n\log n$$

para infinitos valores de n *e para quase todo número em* $[0,1)$*.*

Então a quantidade (5-6) não possui limite para quase todo ponto.

Posporemos a demonstração do Teorema 5.15 e obteremos a seguir uma importante conseqüência dele:

Teorema 5.17 *Considere* L *o conjunto dos números irracionais de* $[0,1)$ *cujos quocientes são limitados,*

$$L=\{x\in[0,1):\textit{existe } \ell(x) \textit{ tal que } a_j(x)\le\ell(x) \textit{ para todo } j\}.$$

O conjunto L *tem medida de Gauss nula.*

Este teorema implica que o conjunto dos números em $[0,1)$ que possuem quocientes limitados tem medida zero. Portanto, o conjunto dos números irracionais que têm quocientes ilimitados tem medida total. Esta observação e a Teorema 4.15 implicam diretamente o seguinte:

Corolário 5.18 *Considere a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad C > 0,\, a\, b \in \mathbb{N}.$$

Existe um subconjunto de $[0,1)$ *de medida de Gauss igual a* 1 *tal que a desigualdade acima admite infinitas soluções para todo* $C > 0$.

Prova do Teorema 5.17: Para cada número natural i definimos o conjunto

$$L_i = \{x \in [0,1)\colon \text{existe } N(x) \text{ tal que } a_j(x) \leq i \text{ para todo } j \geq N(x)\}.$$

Afirmação 5.19

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Esta afirmação implica que para provar que a medida de Gauss do conjunto L é nula, é suficiente provar que a medida de cada L_i é nula.

Prova da Afirmação: Suponha que $x \in L$, então existe $\ell(x)$ tal que $a_i(x) \leq \ell(x)$ para todo i. Portanto, $x \in L_{\ell(x)}$ (podemos tomar $N(x) = 1$), e obtemos a inclusão $L \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i$.

Para provar a outra inclusão, considere $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i$. Então $x \in L_i$ para algum i. Isto implica que existe $N(x)$ tal que $a_j(x) \leq i$ para todo $j \geq N(x)$. Considere agora

$$M = \max\{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{N(x)}, i\}.$$

Neste caso, $M \geq a_j(x)$ para todo j. Portanto, $x \in L$. □

Para ver que, para todo i, o conjunto L_i tem medida nula, consideramos a seqüência divergente $\alpha_n = i$, para todo n, e os conjuntos E_n associados a esta seqüência.

Afirmação 5.20

$$(L_i)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Esta afirmação implica diretamente que L_i tem medida nula: como a seqüência $(\alpha_n = i)_{n\geq 1}$ verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty,$$

a Teorema 5.15 implica que $\mu((L_i)^c) = 1$. Portanto, $\mu(L_i) = 0$.

Para terminar a prova do teorema falta provar a última afirmação:

Prova da Afirmação: Em primeiro lugar, suponha que $x \in (L_i)^c$. Então, existem infinitos j tais que $a_j(x) > i = \alpha_j$. Ou seja, x está em infinitos E_n. Portanto, por definição,

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Agora, suponha que x está em infinitos E_n, isto é,

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Então, existem infinitos valores de j tais que $a_j(x) > \alpha_j = i$. Logo, $x \notin L_i$. Isto termina a prova da afirmação. $\square$

A prova do teorema esta finalizada. $\square$

Na prova do Teorema 5.15 usaremos o seguinte resultado clássico da teoria de medida, cuja prova incluimos para que a exposição seja completa:

Lema 5.21 (Lema de Borel-Cantelli) *Considere uma medida de probabilidade ν e uma seqüência $(F_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis. Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) < \infty,$$

então

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) = 0.$$

Prova: Sabemos que

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=r}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=r}^{\infty} \nu(F_n),$$

para todo r.

Fixamos $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) < \infty$, existe r tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \nu(F_n) < \epsilon.$$

Logo,

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=r}^{\infty} \nu(F_n) < \epsilon.$$

Como esta desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$, o conjunto tem medida nula, o que termina a prova do Lema de Borel-Cantelli. $\square$

Prova do Teorema 5.15: Em primeiro lugar, consideramos o conjunto

$$E'_n = \{x \in [0,1) \colon a_1(x) > \alpha_n\}.$$

Pela invariância da medida de Gauss μ, temos que

$$\begin{aligned} \mu(E'_n) &= \mu(T^{-(n-1)}(E'_n)) = \mu(\{x \in [0,1) \colon T^{n-1}(x) \in E'_n\}) = \\ &= \mu(\{x \in [0,1) \colon a_1(T^{n-1}(x)) > \alpha_n\}. \end{aligned}$$

Como $a_1(T^{n-1}(x)) = a_n(x)$, temos

$$\mu(E'_n) = \mu(\{x \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\}) = \mu(E_n). \tag{5-7}$$

Provaremos agora a primeira parte do teorema:

- $\mu(E_\infty) = 0, \quad$ se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty.$

Fixe n. Afirmamos que

$$E'_n = \left[0, \frac{1}{\alpha_n}\right). \tag{5-8}$$

Para ver a inclusão "$\subset$", considere $x \in E'_n$ e note que como $x^{-1} \geq \lfloor x^{-1} \rfloor = a_1(x) > \alpha_n$. Portanto, $x < 1/\alpha_n$. A inclusão "$\supset$" é óbvia.

As equações (5-7) e (5-8) e a Observação 5.6 implicam que

$$\mu(E_n) = \mu(E'_n) \leq \frac{1}{(\log 2)\, \alpha_n}.$$

Como por hipótese, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/\alpha_n < \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty.$$

Assim podemos aplicar o Lema 5.21 aos conjuntos E_∞ e E_n, e obter que $\mu(E_\infty) = 0$.

Provaremos agora o segundo item do teorema.

- $\mu(E_\infty) = 1, \quad$ se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$

Para provar o segundo item é suficiente verificar que $\mu(E^c_\infty) = 0$. Observamos que

$$\mu(E^c_\infty) = \mu\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right)^c\right).$$

Pelas leis de Morgan,

$$\mu(E_\infty^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right).$$

Escrevemos

$$A_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c, \quad \text{onde} \quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots.$$

Portanto,

$$\mu(E_\infty^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Assim, para provar $\mu(E_\infty^c) = 0$ é suficiente ver que cada A_k tem medida nula.

Observamos que

$$A_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c \subset E_k^c \cap E_{k+1}^c \cap \cdots \cap E_{k+m}^c, \quad \text{para todo } m.$$

Portanto,

$$\mu(A_k) \leq \mu(E_k^c \cap E_{k+1}^c \cap \cdots \cap E_{k+m}^c), \quad \text{para todo } m.$$

Logo a segunda parte do teorema é conseqüência da seguinte proposição:

Proposição 5.22 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_n^c \cap E_{n+1}^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c) = 0.$$

Prova da Proposição: O passo principal da prova da proposição é a seguinte desigualdade: para todo n e $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\mu(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m}^c) \leq \prod_{i=0}^{m}\left(1 - \frac{1}{(\log 2)}\,\frac{1}{1+\alpha_{n+i}}\right). \tag{5-9}$$

Para mostrarmos esta desigualdade precisamos do seguinte lema:

Lema 5.23 *Considere $n \in \mathbb{N}$ e um cilindro $I_{[n-1]} = I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$, então se verifica*

$$\mu(E_n | I_{[n-1]}) \geq \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}.$$

Prova do Lema: Em primeiro lugar, lembramos que pela definição de E_n e E_n',

$$\mu(E_n \cap I_{[n-1]}) = \mu(E_n) \quad \text{e} \quad \mu(E_n' \cap I_{[n-1]}) = \mu(E_n').$$

Como $\mu(E_n) = \mu(E_n')$, obtemos que

$$\mu(E_n|I_{[n-1]}) = \frac{\mu(E_n \cap I_{[n-1]})}{\mu(I_{[n-1]})} = \frac{\mu(E_n' \cap I_{[n-1]})}{\mu(I_{[n-1]})} = \mu(E_n'|I_{[n-1]}).$$

Pelo Lema 5.10 e pelas definições da medida de Gauss (equação (5-1)) e do conjunto E_n' (equação (5-8)), obtemos

$$\mu(E_n|I_{[n-1]}) = \mu(E_n'|I_{[n-1]}) \quad > \frac{1}{4}\,\mu([0,1/\alpha_n)) \geq \frac{1}{4\log 2}\,\log\left(\frac{1+\dfrac{1}{\alpha_n}}{1+0}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\log 2}\,\log\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Como

$$\log\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{\alpha_n}} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{\alpha_n\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1+\alpha_n},$$

obtemos que

$$\mu(E_n|I_{[n-1]}) \geq \frac{1}{(4\log 2)\,(1+\alpha_n)}.$$

Isto termina a demonstração do lema. □

Agora estamos prontos para concluir a prova da desigualdade (5-9). Fixado n, veremos que para todo $m \geq 0$ vale a desigualdade. Provaremos este fato por indução em m.

Em primeiro lugar, note que pelas definições de E_n e dos cilindros $I_{[n-1]}$,

$$E_n = \bigcup_{\iota \in J(n-1)} I_\iota \cap E_n, \qquad J(n-1) = \{\iota = (i_1, \ldots, i_{n-1})\colon i_1 \geq 0, \ldots, i_{n-1} \geq 0\}.$$

Observe que a união é considerada sobre todos os cilindros de ordem $n-1$. Portanto, como a união é disjunta,

$$\mu(E_n) \;= \mu\left(\bigcup_{\iota \in J(n-1)} I_\iota \cap E_n\right) = \sum_{\iota \in J(n-1)} \mu\left(I_\iota \cap E_n\right) =$$

$$= \sum_{\iota \in J(n-1)} \frac{\mu\left(I_\iota \cap E_n\right)}{\mu(I_\iota)}\,\mu(I_\iota) = \sum_{\iota \in J(n-1)} \mu(E_n|I_\iota)\,\mu(I_\iota).$$

Então, pelo Lema 5.23,

$$\begin{aligned}\mu(E_n) &\geq \sum_{\iota\in J(n-1)} \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}\,\mu(I_\iota) = \\ &= \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_n)} \sum_{\iota\in J(n-1)} \mu(I_{[i]}) = \\ &= \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}.\end{aligned}$$

Como $1 = \mu([0,1)) = \mu(E_n^c \cup E_n) = \mu(E_n^c) + \mu(E_n)$, temos que

$$\mu(E_n^c) = 1 - \mu(E_n) \leq 1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}.$$

Portanto, a desigualdade (5-9) está provada para $m = 0$.

Suponha que a desigualdade (5-9) é verdadeira para $(m-1)$, isto é,

$$\mu(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c) \leq \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right).$$

Para provar a desigualdade para m, escrevemos

$$E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c = \bigcup_{\iota\in H(n+m-1)} I_\iota,$$

onde

$$H(n+m-1) = \{i_1,\ldots,i_{n+m-1} \in \mathbb{N}\colon i_n \leq \alpha_n,\ldots,i_{n+m-1} \leq \alpha_{n+m-1}\}$$

Portanto,

$$E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c \cap E_{n+m}^c = \bigcup_{\iota\in H(n+m-1)} I_\iota \cap E_{n+m}^c,$$

Como a união dos cilindros é disjunta, obtemos

$$\begin{aligned}\mu\left(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c \cap E_{n+m}^c\right) &= \mu\left(\bigcup_{\iota\in H(n+m-1)} I_\iota \cap E_{n+m}^c\right) = \\ &= \sum_{\iota\in H(n+m-1)} \mu\left(I_\iota \cap E_{n+m}^c\right).\end{aligned}$$

Escreveremos

$$K = \mu\left(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c \cap E_{n+m}^c\right).$$

Portanto, como para qualquer cilindro se verifica

$$\mu\left(I_{[i]} \cap E_{n+m}^c\right) + \mu\left(I_{[i]} \cap E_{n+m}\right) = \mu\left(I_{[i]}\right),$$

temos que

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu(I_\iota) - \mu(I_\iota \cap E_{n+m}) = \\ &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu(I_\iota) - \frac{\mu(I_\iota \cap E_{n+m})}{\mu(I_\iota)} \mu(I_\iota) = \\ &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu(I_\iota)\left(1 - \frac{\mu(I_\iota \cap E_{n+m})}{\mu(I_\iota)}\right). \end{aligned}$$

Como os cilindros I_ι são de ordem $(n+m-1)$, podemos aplicar o Lema 5.23 ao conjunto E_n e a cada cilindro I_ι, para obter

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu(I_\iota)\left(1 - \frac{\mu(I_\iota \cap E_{n+m})}{\mu(I_\iota)}\right) \leq \\ &\leq \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu(I_\iota)\left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right) = \\ &= \mu(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m-1}^c)\left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} K &\leq \left(\prod_{i=0}^{m-1}\left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right) = \\ &= \prod_{i=0}^{m}\left(1 - \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right). \end{aligned}$$

Isto termina prova a desigualdade (5-9).

Para concluir a prova da Proposição 5.22, observamos que $1 - x < e^{-x}$

(isto segue usando a expansão de Taylor). Logo temos que

$$\begin{aligned}\mu(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m}^c) &< \prod_{i=0}^{m} \exp\left(-\frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right) = \\ &< \exp\left(-\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(4\,\log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right).\end{aligned}$$

Afirmação 5.24 *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_n}$$

é divergente.

Posporemos a prova desta afimação até o fim da prova da proposição.

A afirmação implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_{n+i}} = \infty$, para todo i. Portanto, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{\alpha_{n+i}+1}\right) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_n^c \cap \ldots \cap E_{n+m}^c) = 0,$$

obtendo a proposição. Para concluir a prova da Proposição 5.22 necessitamos demonstrar a afirmação acima.

Prova da Afirmação: Dividiremos a prova desta afirmação em dois casos:

- $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ contém uma subseqüência limitada;
- $(\alpha_n)_{n\geq 1} \to \infty$ quando $n \to \infty$.

No primeiro caso, existe uma subseqüência $(\alpha_{n_k})_{n_k}$ de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ limitada. Portanto, existe $M > 0$ tal que $(1+\alpha_{n_k}) < M$ para infinitos n_k. Portanto,

$$\frac{1}{1+\alpha_{n_k}} > \frac{1}{M},$$

que obviamente implica a afirmação no primeiro caso.

Para provar a afirmação quando $\alpha_n \to \infty$ é suficiente observar que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\frac{1+\alpha_n}{\alpha_n} < K \Rightarrow 1+\alpha_n < K\,\alpha_n,$$

para todo n suficientemente grande ($n \geq n_0$). Logo,

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{K\,\alpha_n}, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Isto é,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_n} > \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{K\,\alpha_n}.$$

Finalmente, pelo teste de comparação, a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ implica a afirmação. $\square$

Agora a prova da Proposição 5.22 está concluida. $\square$

Observamos que concluida a prova da proposição a demonstração do Teorema 5.15 está finalizada. $\square$

Terminaremos esta seção com um resultado (Teorema de Khintchine) que generaliza os precedentes:

Teorema 5.25 *Considere $x \in [0,1)$, uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e a desigualdade*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{f(b)}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

- *Se $b\,f(b)$ não é crescente e $\displaystyle\sum_b f(b) = \infty$, então, para quase todo $x \in [0,1)$, existem infinitas soluções para a desigualdade acima.*
- *Se $\displaystyle\sum_b f(b) < \infty$, então para quase todo $x \in [0,1)$, existe um número finito de soluções para a desigualdade considerada.*

Observe que, devido a equivalência entre as medidas de Lebesgue e Gauss, a frase *quase todo x* é independente da medida escolhida (Gauss ou Lebesgue).

Por exemplo, podemos aplicar o teorema para duas escolhas de f. Se fazemos $f(b) = C/b$, $C > 0$, a primeira parte do teorema dá uma nova prova do Corolário 5.18. Se tomamos $f(b) = C/(b^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$ e $C > 0$, aplicando o segundo item do teorema obtemos que a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^{2+\alpha}}, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

tem um número finito de soluções para quase todo ponto x.

Prova: Para iniciar a demonstração do primeiro item, escolha N um inteiro fixo tal que

$$\log N > \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Pelo item (III) da Proposição 5.14, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} < \log N.$$

Assim, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\frac{1}{n} \log q_n(x) < \log N, \tag{5-10}$$

para todo n grande.

Seja $\phi(n) = N^n f(N^n)$. Como $b\,f(b)$ não é crescente temos que

$$\sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} f(b) = \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{b\,f(b)}{b} \leq \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{N^n f(N^n)}{b} =$$

$$= N^n f(N^n) \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{1}{b}.$$

Logo, pela estimativa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n),$$

temos que

$$\sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} f(b) \leq N^n f(N^n) \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{1}{b} \leq$$

$$\leq \phi(n) \log\left(\frac{N^{n+1}-1}{N^n}\right) \leq \phi(n) \log N.$$

Como $\sum_{b\in\mathbb{N}} f(b) = \infty$, pelo teste de comparação, sabemos que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(n) = \infty$.

Consideramos os conjuntos

$$D_n = \left\{ x \in [0,1); \quad a_n(x) > \frac{1}{\phi(n-1)} \right\}.$$

Tomando $\alpha_n = 1/\phi(n-1)$, o Teorema 5.15 implica que o conjunto

$$D_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} D_n$$

tem medida de Gauss total.

Além disso, pela Propriedade (I) e pelo Teorema 4.1, temos que dado qualquer $x \in [0,1)$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| &\leq \frac{1}{q_n(x)\,q_{n+1}(x)} \leq \frac{1}{q_n(x)\,(a_{n+1}(x)\,q_n(x) + q_{n-1}(x))} \\ &\leq \frac{1}{a_{n+1}(x)\,q_n^2(x)}.\end{aligned}$$

Portanto, se $x \in D_\infty$, existem infinitos n tais que

$$\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| \leq \frac{\phi(n)}{q_n(x)^2}.$$

Assim, como $b\,f(b)$ é não crescente e $q_n(x) < N^n$ para quase todo x (lembre a equação (5-10) no início da demonstração) se verifica

$$\phi(n) = N^n\,f(N^n) \leq q_n(x)\,f(q_n(x))$$

para infinitos valores de n. Portanto, para quase todo $x \in [0,1)$

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\phi(n)}{q_n^2} < \frac{f(q_n)}{q_n}, \quad \text{para infinitos valores de } n.$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Para provar a segunda parte, para cada $a \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$H_b = \left\{x \in [0,1); \quad \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b}, \text{ para algum } a \in \mathbb{N}\right\}.$$

Considere também

$$H_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{b=k}^{\infty} H_b.$$

Para provar o teorema é suficiente ver que H_∞ tem medida de Lebesgue nula.

Pela definição de H_b,

$$H_b = \bigcup_{1 \leq a \leq b} \left(\frac{a}{b} - \frac{f(b)}{b}, \frac{a}{b} + \frac{f(b)}{b}\right).$$

Como esta união tem no máximo b intervalos e cada intervalo tem comprimento $(2\,f(b))/b$, temos que

$$\lambda(H_b) \leq b\left(\frac{2\,f(b)}{b}\right) = 2\,f(b).$$

Como $\sum_b f(b) < \infty$, pelo teste de comparação,

$$\sum_b \lambda(H_b) < \infty.$$

Então, pelo Lema 5.21,

$$\lambda(H_\infty) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{b=k}^{\infty} H_b\right) = 0.$$

Isto termina a demonstração do teorema. $\square$