4
Convergentes e boas aproximações

O primeiro objetivo desta seção é determinar a proximidade entre um número x e os seus convergentes. Esta proximidade é dada pelo seguinte teorema que será utilizado repetidas vezes a partir de agora.

Teorema 4.1 *Seja x um número irracional e p_k/q_k seu k-ésimo convergente. Então, para todo $k \geq 0$, se verifica*

$$\frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}}.$$

A seguir consideraremos o problema da aproximação de um número irracional x (digamos $x \in [0,1)$, para simplificar) por números racionais. Veremos que as aproximações dadas pelos convergentes de um número são as melhores. A forma mais simples de formular este tipo de problema é o seguinte. Considere um número (irracional) x e um número natural q, consideramos o conjunto $\mathcal{A}_q$

$$\mathcal{A}_q = \{a/b: \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \leq q\}.$$

A pergunta é qual é o número de $\mathcal{A}_q$ que melhor aproxima x. A resposta é que (com a única exceção de $x = 1/2$) este número é um convergente de x. Veja os Teoremas 4.4 e 4.5 que afirmam que *todo convergente é uma boa aproximação e vice-versa.*

A seguinte etapa é estudar para que números irracionais x as desigualdades da forma

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^n}, \tag{4-1}$$

onde C é uma constante positiva e $n \in \mathbb{N}$, têm solução. O Teorema 4.1 garante (de forma imediata) que quando $n = 1$ a desigualdade (4-1) sempre admite solução. Para isto é suficiente observar que $q_k \to \infty$, portanto $C > 1/q_{k+1}$ para k suficientemente grande. Assim

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} < \frac{C}{q_k}.$$

Estudaremos este tipo de problemas na Seção 4.3. Em primeiro lugar provaremos na Proposição 4.9 que quando $C = 1/2$ e $n = 2$, as soluções da desigualdade (4-1) são convergentes de x. Veremos também que quando $C \geq 1/\sqrt{5}$ e $n = 2$ a desigualdade possui infinitas soluções dadas por convergentes (veja o Corolário 4.11). Por outro lado, quando $C < 1/\sqrt{5}$ e $n = 2$, para o número de ouro (veja a Seção 3.1) a desigualdade tem apenas um número finito de soluções.

Finalmente, provaremos um resultado geral (Teorema 4.15) sobre as soluções da desigualdade (4-1) quando $n = 2$: se os quocientes a_i de x são limitados então existe C tal que a desigualdade não tem solução, quando os quocientes são ilimitados há sempre (para todo C) infinitas soluções para a desigualdade.

A Seção 4.4 trata da prova do Teorema de Liouville (Teorema 4.17), que carateriza os números algébricos como aqueles que não admitem boas aproximações por números racionais que excedem uma determinada ordem (obviamente, se o número algébrico é racional, isto significa que não pode ser bem aproximado por outros números racionais). Mais precisamente, dizemos que um número é algébrico de ordem k se é raíz de um polinômio de coeficientes inteiros de grau k (e não é raíz de polinômios de grau menor). O Teorema de Liouville afirma que se x é algébrico de ordem k a desigualdade (4-1) não admite solução para certa constante $C > 0$ e $n = k$.

Também veremos que o Teorema de Liouville fornece uma ferramenta para a construção de exemplos de números transcendentes.

Já vimos que os números irracionais se caraterizam por ter expansões em frações contínuas infinitas (veja o Teorema 2.12). Na última seção deste capítulo obteremos uma interessante conseqüencia do Teorema 4.1: um número irracional tem expansão periódica (puramente periódica ou periódica a partir de um determinado termo) se, e somente se, é solução de uma equação algébrica de segundo grau (Teorema 4.19). Um exemplo deste tipo de número é o número de ouro (Seção 3.1).

4.1
Aproximação por convergentes

Nesta seção provaremos o Teorema 4.1.

Prova do Teorema: Em primeiro lugar, pela equação (2-7) obtida na demonstração do Teorema 2.8, temos que para $x \in [0, 1)$,

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{T^k(x)}{q_k\,(q_k + T^k(x)\,q_{k-1})},$$

Como x é irracional, $T^k(x) \neq 0$ para todo k. Portanto, podemos dividir por $T^k(x)$, obtendo

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k \left((T^k(x))^{-1} q_k + q_{k-1} \right)}. \tag{4-2}$$

Como, pela equação (2-5), $a_{k+1}(x) = \lfloor (T^k(x))^{-1} \rfloor$ temos que,

$$a_{k+1}(x) \leq (T^k(x))^{-1} < a_{k+1}(x) + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} q_k \left((a_{k+1}(x) + 1) q_k + q_{k-1} \right) &> q_k \left((T^k(x))^{-1} q_k + q_{k-1} \right) \geq \\ &\geq q_k \left(a_{k+1}(x) q_k + q_{k-1} \right). \end{aligned} \tag{4-3}$$

Pela Propriedade (I),

$$a_{k+1}(x) = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k}.$$

Portanto, usando desigualdade (4-3) e a igualdade acima obtemos,

$$\begin{aligned} q_k (q_{k+1} + q_k) &= q_k (q_{k+1} - q_{k-1} + q_k + q_{k-1}) = \\ &= q_k \left(\left(\frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} + 1 \right) q_k + q_{k-1} \right) = \\ &= q_k \left((a_{k+1} + 1) q_k + q_{k-1} \right) > \\ &> q_k \left((T^k(x))^{-1} q_k + q_{k-1} \right) \geq \\ &\geq q_k \left(a_{k+1} q_k + q_{k-1} \right) = \\ &= q_k \left(\left(\frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} \right) q_k + q_{k-1} \right) = \\ &= q_k (q_{k+1} - q_{k-1} + q_{k-1}) = q_k q_{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, pela equação (4-2),

$$\frac{1}{q_k (q_{k+1} + q_k)} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Acabamos de provar o teorema para $x \in [0, 1)$.

Usando a prova anterior, mostraremos o teorema para $y \in \mathbb{R}$. Escolha

$a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y - a_0 \in [0, 1)$. Como

$$\frac{p_k(y)}{q_k(y)} = a_0 + \frac{p_k(x)}{q_k(x)},$$

temos

$$\left| y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)} \right| = \left| (x + a_0) - \left(a_0 + \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \right) \right| = \left| x - \frac{p_k(x)}{q_k(x)} \right|.$$

Logo, pelo o que acabamos de mostrar,

$$\frac{1}{q_k(x)\,(q_{k+1}(x) + q_k(x))} < \left| y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)} \right| \leq \frac{1}{q_k(x)\,q_{k+1}(x)}.$$

Note que, $q_0(x) = 1 = q_0(y)$. Supondo que $q_j(x) = q_j(y)$ para $0 \leq j < k$, obtemos usando Propriedade (I) e que

$$q_{k+1}(x) = a_{k+1}(x)\,q_k(x) + q_{k-1}(x) = a_{k+1}(y)\,q_k(y) + q_{k-1}(y) = q_{k+1}(y).$$

Portanto,

$$\frac{1}{q_k(y)\,(q_{k+1}(y) + q_k(y))} < \left| y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)} \right| \leq \frac{1}{q_k(y)\,q_{k+1}(y)}.$$

Isto finaliza a prova do teorema. □

4.2 Boas aproximações

Nesta seção veremos uma aplicação das frações contínuas sobre a aproximação dos números irracionais por números racionais, também conhecida como *Aproximação Diofantina*. Um resultado importante desta seção é que *as melhores aproximações de um número real x por números racionais são os convergentes da sua expansão em frações contínuas* (com uma exceção que será vista no Teorema 4.5). A prova deste fato depende do Lema 2.10 e do Teorema 4.1.

Em primeiro lugar, explicaremos o que significa ser *uma boa* aproximação do número real x.

Definição 4.2 *A fração a/b, $b > 0$, é uma* boa aproximação *do número real x se*

$$|d\,x - c| > |b\,x - a|, \quad \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b} \quad \textit{com} \quad 0 < d \leq b.$$

Observação 4.3 *A definição implica que se a/b é uma boa aproximação de x, então a/b é a melhor aproximação por números racionais de x dentre todos* *os números racionais com denominador menor ou igual do que b. Dado c/d com $d \leq b$, temos*

$$|d\,x - c| > |b\,x - a| \Longrightarrow \left|\frac{d}{b}\,x - \frac{c}{b}\right| > \left|x - \frac{a}{b}\right| \Longrightarrow \frac{d}{b}\left|x - \frac{c}{d}\right| > \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Como $d/b \leq 1$, obtemos

$$\left|x - \frac{c}{d}\right| > \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Para simplificar a exposição, ao longo deste capítulo suporemos que $x \in [0, 1)$. O caso geral segue de forma totalmente análoga. Em primeiro lugar, provaremos que toda boa aproximação do número real x é um convergente de x. Em seguida, mostraremos a recíproca desta afirmação com sua única exceção.

Teorema 4.4 *Toda boa aproximação de x é um convergente da sua expansão em frações contínuas.*

Prova: Seja a/b uma boa aproximação para x. Provaremos o teorema por absurdo supondo que a/b não é um convergente de x.

Em primeiro lugar, examinamos a posição de a/b em relação aos convergentes da expansão em frações contínuas de x. Pelo Lema 2.10, os convergentes estão na seguinte posição na reta real em relação a x:

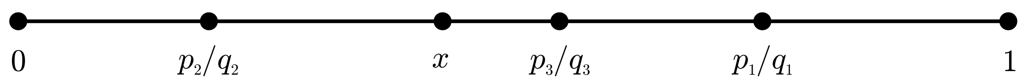

Figura 4.1: Posições relativas dos convergentes

Vamos, em primeiro lugar, mostrar que $0 \leq \dfrac{a}{b} < 1$. Note que se $0 = \dfrac{a}{b}$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p_0}{q_0}$ é um convergente e assim não há o que provar.

Para mostrar que $0 \leq \dfrac{a}{b}$, suponha o contrário, que $0 > \dfrac{a}{b}$. Assim, como $x \geq 0$,

$$|1 \cdot x - 0| < \left|x - \frac{a}{b}\right| \leq |b\,x - a|, \quad 1 \leq b.$$

Logo, a/b não seria uma boa aproximação do número real x.

Portanto, $0 \leq \dfrac{a}{b}$. Novamente por contradição, vamos provar que $\dfrac{a}{b} < 1$. Suponha que $\dfrac{a}{b} \geq 1$. Em particular, $\dfrac{a}{b} > \dfrac{p_1}{q_1} > x$. Então,

$$|b\,x - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| > b\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| = b\left|\frac{p_1\,b - a\,q_1}{q_1\,b}\right|.$$

Como $p_1\,b - a\,q_1$ é um número inteiro diferente de zero,

$$|b\,x - a| > b\,\frac{1}{q_1\,b} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1\,q_0 + q_{-1}} = \frac{1}{a_1},$$

onde a última igualdade segue de $q_0 = 1$ e $q_{-1} = 0$.

Por outro lado, pelo Teorema 4.1 e observando que $a_0 = 0$ temos

$$|x| = |x - a_0| = \left|x - \frac{p_0}{q_0}\right| \leq \frac{1}{q_0\,q_1} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Então,

$$|b\,x - a| > \frac{1}{a_1} \geq |x - a_0|.$$

Logo, a/b não seria uma boa aproximação de x, o que novamente resulta em um contradição.

Podemos então ter duas situações, caso 1: *a/b está entre p_{k-1}/q_{k-1} e p_{k+1}/q_{k+1}* (onde $k \geq 1$ pode ser par ou ímpar) ou caso 2: *a/b está entre p_1/q_1 e* 1.

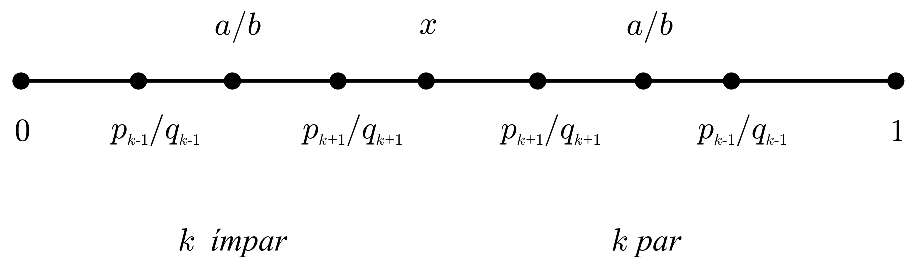

Figura 4.2: Posições relativas de a/b com respeito aos convergentes

No primeiro caso, como $a\,q_{k-1} - b\,p_{k-1}$ é um inteiro diferente de zero, temos que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{a\,q_{k-1} - b\,p_{k-1}}{b\,q_{k-1}}\right| \geq \frac{1}{b\,q_{k-1}}.$$

Pela posição relativa dos convergentes, temos que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k\,q_{k-1} - p_{k-1}\,q_k}{q_k\,q_{k-1}}\right| = \left|\frac{(-1)^k}{q_k\,q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k\,q_{k-1}},$$

onde na penúltima igualdade usamos a Propriedade (III).

Logo,

$$\frac{1}{b\,q_{k-1}} < \frac{1}{q_k\,q_{k-1}},$$

e portanto, $b > q_k$.

Por outro lado, raciocinando como nos casos precedentes,

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{p_{k+1}\, b - a\, q_{k+1}}{b\, q_{k+1}}\right| \geq \frac{1}{b\, q_{k+1}}.$$

Assim,

$$|b\, x - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Além disso, pelo Teorema 4.1,

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} \Longrightarrow |q_k\, x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Obtemos então,

$$|q_k\, x - p_k| \leq |b\, x - a|, \quad \text{onde} \quad b > q_k.$$

Logo, a/b não é uma boa aproximação de x, o que contradiz a hipótese do teorema. Isto prova o teorema para o primeiro caso.

Vamos agora provar o teorema para o segundo caso, isto é, quando

$$1 > \frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}.$$

Neste caso,

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{p_1\, b - a\, q_1}{b\, q_1}\right| \geq \frac{1}{b\, q_1}.$$

Então, $|b\, x - a| > \dfrac{1}{q_1}$.

Por outro lado, usando o Teorema 4.1,

$$|x| = |x - a_0| \leq \frac{1}{q_0\, q_1} = \frac{1}{q_1}.$$

Obtemos então que,

$$|b\, x - a| > |x - a_0|, \quad 1 \geq b.$$

Isto novamente contradiz o fato de a/b ser uma boa aproximação do número real x. Terminamos, portanto, a prova do teorema. □

Provaremos agora a recíproca do Teorema 4.4 com a sua única exceção.

Teorema 4.5 *Se $x \in [0,1)$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$, então todo convergente é uma boa aproximação do número real x.*

Note que $x = 1/2$ é de fato uma exceção para a recíproca do Teorema 4.4. O convergente $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{0}{1} = 0$ não é uma boa aproximação de $1/2$, pois

$$|1 \cdot x - 1| = |1 \cdot x - 0| = |x - 0|.$$

Prova: Veremos que dado qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o k-ésimo convergente de x, p_k/q_k, é uma boa aproximação de x.

Para isso consideremos a expressão

$$M(\beta, \alpha) = |\beta\, x - \alpha|,$$

onde $\beta = 1, 2, \ldots, q_k$ e α é um número inteiro qualquer. Queremos minimizar essa expressão. Observamos que há no máximo um número finito de valores α a considerar, pois se α minimiza a expressão para algum β, necessariamente $0 \leq \alpha \leq \lfloor q_k\, x \rfloor + 1$. Portanto, há um número finito de possíveis pares (β, α) que minimizam. Dentre estes pares escolhemos aqueles com $\beta = \beta_0$ mínimo. A princípio poderiam existir dois valores de α, digamos α_0 e $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$, que minimizam a expressão $M(\beta_0, \alpha)$. Neste caso, necessariamente, $\beta_0\, x = \alpha_0 + 1/2$. Afirmamos que existe uma única escolha para α, que denominaremos α_0:

Lema 4.6 *Se α_0 minimiza $M(\beta_0, \alpha)$ então $\alpha_1 = \alpha_0 \pm 1$ não minimiza $M(\beta_0, \alpha)$.*

Posporemos a prova do lema, usando-o concluiremos a prova do teorema. A prova do teorema tem duas partes: primeiro veremos que α_0/β_0 é uma boa aproximação de x (e pelo Teorema 4.4 é um convergente), e em segundo lugar veremos que o convergente é exatamente p_k/q_k.

Lema 4.7 *O número α_0/β_0 é uma boa aproximação de x.*

Prova: Como α_0 é o único valor que minimiza $|\beta_0\, x - \alpha|$, temos que

$$|\beta_0\, x - \alpha_0| < |\beta_0\, x - \alpha|, \quad \text{onde} \quad \frac{\alpha_0}{\beta_0} \neq \frac{\alpha}{\beta_0}, \quad 1 \leq \beta_0.$$

Também temos que não existe $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\beta_0\, x - \gamma| < |\beta_0\, x - \alpha_0|.$$

Isto significa que α_0/β_0 é uma boa aproximação de x. □

Lema 4.8 $\alpha_0/\beta_0 = p_k/q_k$.

Prova: Como α_0/β_0 é uma boa aproximação de x, o Teorema 4.4 garante que ele é um convergente de x, $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0} = \dfrac{p_s}{q_s}$. Pela escolha de β_0, $\beta_0 \leq q_k$, e como os q_i são crescentes, temos $s \leq k$. Se $s = k$ o lema está provado. Suponha agora que $s < k$. Veremos que este caso é impossível.

Como, pelo Teorema 4.1,

$$\left| x - \frac{p_s}{q_s} \right| > \frac{1}{q_s\,(q_s + q_{s+1})}.$$

Como $(q_i)_{i\geq 1}$ é uma seqüência monótona crescente, temos que

$$|q_s\, x - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}. \tag{4-4}$$

Além disso, como pelo Teorema 4.1

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}},$$

obtemos que $|q_k\, x - p_k| \leq \dfrac{1}{q_{k+1}}$. Como o par (β_0, α_0) minimiza a expressão $M(\beta, \alpha)$, onde $\beta = 1, 2, \ldots, q_k$, temos que

$$|q_s\, x - p_s| = |\beta_0\, x - \alpha_0| \leq |q_k\, x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}. \tag{4-5}$$

De (4-4) e (4-5),

$$\frac{1}{q_k + q_{k-1}} < \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Isto é, $q_{k+1} < q_k + q_{k-1}$, o que contradiz a definição de q_{k+1}: $q_{k+1} = a_{k+1}\, q_k + q_{k-1}$, onde $a_{k+1} \geq 1$. Esta contradição termina a prova do lema. □

Para concluirmos a prova do teorema precisamos demonstrar o Lema 4.6.

Prova do Lema: Suponha que existem α_0 e $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$ que minimizam $M(\beta, \alpha)$. Em tal caso se verifica que

$$x = \frac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0} \neq \frac{\alpha_0}{\beta_0}.$$

Em primeiro lugar, provaremos que a fração $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ é irredutível. Suponha que não seja irredutível, então existe $\ell \geq 2$.

$$2\,\alpha_0 + 1 = \ell\, p \quad \text{e} \quad 2\,\beta_0 = \ell\, q$$

Se $\ell = 2$, então $\beta_0 = q$ e $p = \dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2}$. Portanto,

$$|q\,x - p| = |\beta_0\,x - p| = \left|\frac{2\,\alpha_0 + 1}{2} - \frac{2\,\alpha_0 + 1}{2}\right| = 0 < |\beta_0\,x - \alpha_0|.$$

Isto contradiz a escolha do par (β_0, α_0) que minimiza $M(\beta, \alpha)$ para $\beta = 1, \ldots, q_k$ e $\alpha \in \mathbb{N}$.

Se $\ell > 2$, temos que $x = \dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0} = \dfrac{p}{q}$ e $\beta_0 > q$. Então,

$$0 = |q\,x - p| < |\beta_0\,x - p|$$

que contradiz a escolha de β_0 (mínimo com a propriedade de existir algum α tal que $M(\beta, \alpha)$ seja mínimo).

Portanto, $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ é irredutível. Expandindo este número racional em frações contínuas, temos que seu último convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$ é ele próprio, isto é,

$$p_n = 2\,\alpha_0 + 1, \quad q_n = 2\,\beta_0 = a_n\,q_{n-1} + q_{n-2},$$

para $a_n \geq 2$, $n \geq 1$.

Note que para $a_n = 2$ e $n = 1$ temos que

$$x = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}.$$

Como por hipótese $x \neq \dfrac{1}{2}$, temos que $a_n > 2$ quando $n = 1$ ou $a_n \geq 2$ quando $n > 1$. Assim, se $n = 1$,

$$2\,\beta_0 = a_n\,q_{n-1} + q_{n-2} \geq a_n\,q_{n-1} > 2\,q_{n-1}.$$

Por outro lado, se $n \geq 2$,

$$2\,\beta_0 = a_n\,q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2\,q_{n-1} + q_0 = 2\,q_{n-1} + 1 > 2\,q_{n-1}.$$

Em ambos os casos obtemos

$$\beta_0 > q_{n-1}. \tag{4-6}$$

Por outro lado, usando a Propriedade (III),

$$\begin{aligned} |q_{n-1}\,x - p_{n-1}| &= \left|q_{n-1}\,\frac{p_n}{q_n} - p_{n-1}\right| = \left|\frac{q_{n-1}\,p_n - p_{n-1}\,q_n}{q_n}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2\,\beta_0} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4-7}$$

Por outro lado,
$$|\beta_0\,x-\alpha_0| = \left|\beta_0\,\frac{2\,\alpha_0+1}{2\,\beta_0}-\alpha_0\right| = \frac{1}{2}. \tag{4-8}$$
Finalmente, das equações (4-7), (4-6) e (4-8) obtemos

$$|q_{n-1}\,x-p_{n-1}| \le |\beta_0\,x-\alpha_0|, \quad q_{n-1}<\beta_0.$$

Isto contradiz o fato de β_0 ser mínimo minimizando $M(\beta,\alpha)$. Completamos então a prova do lema. □

Terminamos assim a prova do Teorema 4.5. □

4.3 Ordem de Aproximação

Até agora vimos que as boas aproximações do número x são dadas pelos seus convergentes. Nesta seção, dado um número irracional x, estudaremos a existência de números racionais a/b que verificam a desigualdade

$$\left|x-\frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \tag{4-9}$$

para certo $C>0$.

Na Seção 5.4, veremos que existem soluções para a desigualdade acima para quase todo número real (um conjunto de medida total em $\mathbb{R}$).

Observamos que é suficiente considerar x irracional (pois para os números racionais a desigualdade sempre tem solução) e soluções a/b onde a e b são primos entre si (pois se c/d verifica a equação (4-9) e $a/b=c/d$ com a e b primos entre si, então a/b também verifica a desigualdade).

Por simplicidade, começaremos a examinar as soluções para $C=1/2$.

Proposição 4.9 *Toda fração irredutível a/b satisfazendo a desigualdade*

$$\left|x-\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de x.

Prova: Pelo Teorema 4.4, para provar essa proposição basta provarmos que a fração irredutível a/b que satisfaz o enunciado da proposição é uma boa aproximação do número x. Suponha, por absurdo, que a/b não é uma boa aproximação de x. Então, existe $\dfrac{c}{d}\neq\dfrac{a}{b}$ com $0<d\le b$ tal que,

$$|d\,x-c| < |b\,x-a| < \frac{1}{2\,b}.$$

Portanto,

$$\left|x-\frac{c}{d}\right|<\frac{1}{2\,b\,d}.$$

Logo,

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|\le\left|\frac{c}{d}-x\right|+\left|x-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2\,b\,d}+\frac{1}{2\,b^2}=\frac{b+d}{2\,b^2\,d}. \tag{4-10}$$

Por outro lado, como $\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}$, temos que $c\,b-a\,d$ é um número inteiro diferente de zero, portanto,

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{c\,b-a\,d}{d\,b}\right|\ge\frac{1}{b\,d}. \tag{4-11}$$

De (4-10) e (4-11) obtemos,

$$\frac{1}{b\,d}<\frac{b+d}{2\,b^2\,d}\Longrightarrow 2\,b\,d<d\,b+d^2\Longrightarrow b\,d<d^2.$$

Como b e d são positivos, temos $b<d$, o que é uma contradição.

Portanto, a/b é uma boa aproximação de x, completando a prova da proposição. □

Proposição 4.10 *Dado um número real x e três convergentes consecutivos dele,*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}},\quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\quad \frac{p_n}{q_n},$$

no mínimo um deles satisfaz a desigualdade

$$\left|x-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,b^2}.$$

O seguinte corolário decorre imediatamente da proposição:

Corolário 4.11 *Dado qualquer número irracional x e $C\ge 1/\sqrt{5}$ a desigualdade*

$$\left|x-\frac{a}{b}\right|<\frac{C}{b^2},\qquad a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N},$$

tem infinitas soluções.

Prova da Proposição: Consideramos a seqüência p_k/q_k de convergentes de x e escrevemos,

$$\phi_k=\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}\,(k\ge 2),\qquad r_k=(T^k(x))^{-1}\,(k>1),\qquad \psi_k=\phi_k+r_{k-1}.$$

Lema 4.12 *Se $\psi_k\le\sqrt{5}$ e $\psi_{k-1}\le\sqrt{5}$, para $k\ge 2$, então*

$$\phi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Posporemos a prova do lema e usando-o terminaremos a prova da proposição.

A prova da proposição é por contradição. Suponhamos que existe $k \geq 2$ tal que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, q_n^2}, \quad \text{para } n = k, k-1, k-2. \tag{4-12}$$

Usando a Propriedade (II) dos convergentes,

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}} = \frac{p_n\, r_n + p_{n-1}}{q_n\, r_n + q_{n-1}},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{p_n\, r_n + p_{n-1}}{q_n\, r_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \\ &= \left| \frac{p_n\, r_n\, q_n + p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_n\, r_n - p_n\, q_{n-1}}{q_n\, (q_n\, r_n + q_{n-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1}}{q_n^2\, r_n + q_n\, q_{n-1}} \right|. \end{aligned}$$

Pela Propriedade (III) dos convergentes, temos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n^2\, r_n + q_n\, q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n^2\, r_n + q_n\, q_{n-1}}.$$

Usando a definição de ψ_k e de ϕ_k temos,

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \frac{1}{q_n^2\, r_n + q_n\, q_{n-1}} = \frac{1}{q_n^2\, r_n + q_n^2\, \phi_{n+1}} = \\ &= \frac{1}{q_n^2 (r_n + \phi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2\, \psi_{n+1}}. \end{aligned} \tag{4-13}$$

As equações (4-12) e (4-13) implicam que

$$\frac{1}{q_n^2\, \psi_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, q_n^2} \Longrightarrow \psi_{n+1} \leq \sqrt{5}.$$

Logo, $\psi_{n+1} \leq \sqrt{5}$ para $n = k, k-1, k-2$. Assim podemos aplicar o Lema 4.12, obtendo

$$\phi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{e} \quad \phi_{k+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{q_k - q_{k-2}}{q_{k-1}} &= \frac{1}{\phi_{k+1}} - \phi_k < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \\ &= \frac{4-(\sqrt{5}-1)^2}{2\,(\sqrt{5}-1)} = \frac{2\,(\sqrt{5}-1)}{2\,(\sqrt{5}-1)} = 1.\end{aligned}$$

Isto é, $q_k < q_{k-1} + q_{k-2}$, o que contradiz a definição da seqüência $(q_k)_{k\geq -1}$.

Para terminar a prova da proposição precisamos provar o lema.

Prova do Lema: Pela definição de ϕ_{n+1} e pela Propriedade (I) dos convergentes se verifica

$$\frac{1}{\phi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \phi_n.$$

Por outro lado, das definições de r_n e a_n e da transformação de Gauss,

$$\frac{1}{r_n} = T^n(x) = \frac{1}{T^{n-1}(x)} - \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor = r_{n-1} - a_n.$$

Assim temos que,

$$\frac{1}{\phi_{n+1}} + \frac{1}{r_n} = a_n + \phi_n + r_{n-1} - a_n = \phi_n + r_{n-1} = \psi_n.$$

Portanto,

$$\psi_n = \frac{1}{\phi_{n+1}} + \frac{1}{r_n} = \phi_n + r_{n-1}.$$

Então, pelas hipóteses do lema, para cada $k \geq 2$ se verifica

$$\phi_k + r_{k-1} = \psi_k \leq \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\phi_k} + \frac{1}{r_{k-1}} = \psi_{k-1} \leq \sqrt{5}.$$

Reescrevendo as desigualdades,

$$r_{k-1} \leq \sqrt{5} - \phi_k \quad \text{e} \quad \frac{1}{r_{k-1}} \leq \sqrt{5} - \frac{1}{\phi_k}.$$

Multiplicando as desigualdades obtemos

$$1 \leq \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\phi_k}\right)\left(\sqrt{5} - \phi_k\right) = 5 - \sqrt{5}\,\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{\phi_k} + 1.$$

Isto é,

$$5 - \sqrt{5}\,\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{\phi_k} \geq 0.$$

Multiplicando por $\dfrac{\sqrt{5}\,\phi_k}{5}$, obtemos

$$\phi_k^2 + 1 - \sqrt{5}\,\phi_k \leq 0, \quad \Longrightarrow \quad \left(\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0.$$

Portanto,

$$\left(\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \phi_k\right) < \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \phi_k,$$

terminando a prova do lema. □

Com o Lema 4.12 provado, terminamos a prova da proposição. □

Vamos provar agora, usando o número de ouro visto na Seção 3.1, que a constante $C = 1/\sqrt{5}$ na Proposição 4.10 não pode ser reduzida. Provaremos que se $C < 1/\sqrt{5}$, então existe apenas um número finito de soluções a/b para a desigualdade (4-9);

Lembramos que o Corolário 4.11 garante que, para números irracionais, quando $C \geq 1/\sqrt{5}$ existe um número infinito de soluções (dadas por convergentes) para a desigualdade (4-9).

Proposição 4.13 *Considere $C < 1/\sqrt{5}$ e o número de ouro $\mathcal{O} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Então a desigualdade*

$$\left|\mathcal{O} - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},$$

tem apenas um número finito de soluções.

Prova: Para provar essa proposição lembramos que a expansão em frações contínuas do número de ouro $\mathcal{O}$ é $1 + [1, \ldots, 1, \ldots]$ (veja a Seção 3.1).

Pela Observação 3.1, $(T^n(\mathcal{O} - 1))^{-1} = \mathcal{O}$, para todo $n \geq 0$. Portanto, pela Propriedade (II),

$$\mathcal{O} = \frac{p_k + (T^k(\mathcal{O}))\,p_{k-1}}{q_k + (T^k(\mathcal{O}))\,q_{k-1}} = \frac{p_k\,(T^k(\mathcal{O}))^{-1} + p_{k-1}}{q_k\,(T^k(\mathcal{O}))^{-1} + q_{k-1}} = \frac{p_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}}{q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1}}.$$

Logo, usando a Propriedade (III),

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| &= \left|\frac{p_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}}{q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \\ &= \left|\frac{p_k\,q_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}\,q_k - p_k\,q_k\,\mathcal{O} - p_k\,q_{k-1}}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^k}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})}\right| = \frac{1}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})} = \\ &= \frac{1}{q_k^2\left(\mathcal{O} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}. \end{aligned} \tag{4-14}$$

Para continuarmos a prova desta proposição precisaremos da seguinte propriedade geral dos convergentes:

Lema 4.14 *Considere um número real* $x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. *Para todo* $k \geq 1$ *se verifica*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Prova: A prova será feita por indução. Observe que para $k = 1$ temos, usando a Propriedade (I), que

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1\,q_0 + q_{-1}}{1} = \frac{a_1}{1} = a_1.$$

Portanto, o lema é verdadeiro para $k = 1$. Suponha que o lema vale para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, isto é,

$$\frac{q_j}{q_{j-1}} = a_j + [a_{j-1}, \ldots, a_1].$$

Dividindo por q_{k-1} a Propriedade (I), $q_k = a_k\,q_{k-1} + q_{k-2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{1}{\dfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}}} = \\ &= a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} = \\ &= a_k + [a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1]. \end{aligned}$$

Logo, por indução, o lema está provado. □

Continuamos com a prova da proposição. Como $a_i = 1$ para todo $i \geq 0$. usando o Lema 4.14, temos

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1] = 1 + [1, \ldots, 1]$$

Sabemos que

$$a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1] = 1 + [1, \ldots, 1] \to \mathcal{O} \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Portanto,

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\mathcal{O}} + \epsilon_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \epsilon_k,$$

onde $\epsilon_k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Substituindo na equação (4-14), obtemos,

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \epsilon_k\right)} = \frac{1}{q_k^2\left(\sqrt{5}+\epsilon_k\right)}.$$

Logo, para $C < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e k suficientemente grande

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{C}{q_k^2}.$$

Assim, a desigualdade

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{C}{q_k^2}$$

é satisfeita apenas para um número finito de valores de k. Isto termina a prova da proposição. $\square$

Note que, de fato, pela Proposição 4.9, toda fração irredutível que satisfaz a desigualdade

$$\left|\mathcal{O} - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de $\mathcal{O}$.

Então como $C < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$ temos que a/b é um convergente de $\mathcal{O}$, isto é, $a/b = p_k/q_k$, para algum k.

Agora veremos que dado um número irracional x, para C suficientemente pequeno, a desigualdade (4-9),

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2},$$

não tem soluções se, e somente se, os quocientes $a_i(x)$ da expansão em frações contínuas de x são limitados.

Teorema 4.15 *Dado uma constante $C > 0$ e um número x*

$$x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

considere a desigualdade (4-9)

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N}.$$

Quocientes limitados. *Dada qualquer constante $M \geq 1$, para todo*

$$C < C_0(M) = \frac{1}{M+2}.$$

e todo número irracional x cujos quocientes a_i são limitados por M, $a_i < M$, a desigualdade acima não tem solução.

Quocientes ilimitados. *Para todo número irracional x com quocientes ilimitados e toda constante $C > 0$, a desigualdade acima tem infinitas soluções.*

Este teorema implica que números irracionais com quocientes limitados não possuem boas aproximações. Na Seção 5.4, veremos que os número irracionais que possuem quocientes limitados constituem um conjunto de medida zero. O teorema agora significa que existe um conjunto de medida total de números que admitem um número infinito de boas aproximações.

Prova: Provaremos primeiro a parte do teorema sobre quocientes limitados. Suponha que o número irracional x é tal que $a_i < M$ para todo $i \geq 0$. Veremos que não existem números racionais a/b que verificam a desigualdade.

Considere um número racional irredutível a/b, $b \in \mathbb{N}$. Sabemos pela Proposição 4.9 que toda fração irredutível que satisfaz

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de x.

Portanto, como $C < C_0(M) = \dfrac{1}{M+2} < \dfrac{1}{2}$ temos que a/b é um convergente de x ($a/b = p_k/q_k$ para algum $k \geq 0$)

Assim, usando o Teorema 4.1 e a Propriedade (I) dos convergentes, temos para qualquer $k \geq 0$,

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} = \frac{1}{q_k\,(q_k + a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_k^2 \left(1 + a_{k+1} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

Como $q_k \geq q_{k-1}$ (lembre a Propriedade (I) dos convergentes) e como $a_k < M$ por hipótese,

$$1 + a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} < 1 + M + 1 = M + 2,$$

temos

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2\,(M+2)} = \frac{C_0(M)}{q_k^2} > \frac{C}{q_k^2}.$$

Esta última desigualdade implica que a/b não é solução da desigualdade do teorema quando $C < C_0(M)$. Concluímos assim a prova da primeira parte do teorema.

Vamos agora provar a segunda parte. Para isso, observe que se os quocientes a_i de x são ilimitados, podemos, para qualquer $C > 0$ arbitrário, encontrar um número infinito de valores de k tal que

$$\frac{1}{a_{k+1}} < C.$$

Escolhemos k que verifica esta desigualdade. Veremos que o convergente p_k/q_k de x verifica a desigualdade do teorema (para o C fixado). Portanto, existem infinitos racionais que verificam a desigualdade.

Para provar esta afirmação, usamos o Teorema 4.1 e a Propriedade (I),

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k\,q_{k+1}} = \frac{1}{q_k\,(a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_k^2\,a_{k+1} + q_k\,q_{k-1}} < \frac{1}{q_k^2\,a_{k+1}} < \frac{C}{q_k^2},$$

para infinitos valores de k.

Isto termina a prova da segunda afirmação e do teorema. $\square$

4.4 Teorema de Liouville: aproximação de números algébricos

Começaremos esta seção com a definição de *números algébricos* e *trascendentes.*

Definição 4.16 *Um número x é um* número algébrico de grau n *se existe um polinômio $f(z)$ de grau n com coeficientes inteiros*

$$f(z) = c_o + c_1\, z + c_2\, z^2 + \cdots + c_n\, z^n, \quad c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z} \text{ e } c_n \neq 0,$$

tal que $f(x) = 0$, onde n é mínimo com esta propriedade.

Se o número x não é algébrico, então ele é chamado de transcendente.

O principal resultado desta seção é o Teorema de Liouville.

Teorema 4.17 (Teorema de Liouville) *Considere x um número algébrico de grau n. Então, existe uma constante $C = C(x) > 0$ tal que*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \frac{C}{b^n}, \qquad \text{para todo } a, b \in \mathbb{Z}, \quad b > 0, \text{ tal que } x \neq \frac{a}{b}.$$

Observação 4.18 *Todo número racional $x = c/d$ verifica a equação*

$$d\, x - c = 0.$$

Portanto, todo número racional é algébrico de grau 1.

Observamos que se $(c/d) \neq (a/b)$ e $C = 1/d$ se verifica

$$\left| \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{c\, b - a\, d}{d\, b} \right| \geq \frac{1}{d\, b} = \frac{C}{b}.$$

Antes de provar o teorema deduziremos algumas conseqüências dele. Em primeiro lugar o Teorema de Liouville limita a ordem das aproximações dos números algébricos por expansões em frações contínuas. Por outro lado, o Teorema de Liouville fornece uma poderosa ferramenta para construir números transcendentes que explicaremos agora.

Observe que, pelo Teorema de Liouville, se um número $x \in [0, 1)$ verifica que para toda constante $C > 0$ e todo número natural n existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^n},$$

então o número x é transcendente.

Usaremos esta observação para construir um número transcendente x. Veremos que basta escolher os quocientes a_i de x indutivamente da seguinte forma: suponha escolhidos os quocientes $a_1, \ldots, a_k$ e definidos os convergentes $p_1/q_1, \ldots, p_k/q_k$, escolhemos a_{k+1} satisfazendo a desigualdade

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}.$$

Afirmamos que o número resultante $x = [a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ é transcendente. Para provar esta afirmação, em primeiro lugar observamos que, pelo Teorema 4.1 e pela Propriedade (I),

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} = \frac{1}{q_k\,(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{q_k^2\, a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}},$$

onde a última desigualdade segue da escolha de a_{k+1}.

Agora é suficiente ver que x não é algébrico. Se fosse algébrico de ordem k ele verificaria o Teorema de Liouville. Por outro lado, fixado qualquer $C > 0$ existe k tal que $C > 1/q_k$. Mas a construção acima implica que o número racional p_k/q_k verifica

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^{k+1}} < \frac{C}{q_k^k},$$

o que contradiz o Teorema de Liouville (o fato de x ser algébrico de ordem k).

Prova do Teorema: Pela Observação 4.18, precisamos demonstrar o teorema apenas para números irracionais.

Como x é um número algébrico de grau n, ele verifica a equação com coeficientes inteiros,

$$f(z) = c_o + c_1\, z + c_2\, z^2 + \cdots + c_n\, z^n = 0, \quad c_n \neq 0.$$

Desta forma,

$$f(z) = (z - x)\, g(z), \tag{4-15}$$

onde g é um polinômio de grau $n-1$.

Afirmamos que $g(x) \neq 0$, pois caso contrário x seria um número algébrico de grau no máximo $(n-1)$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$g(z) \neq 0 \quad \text{para todo} \quad z \in V_\delta = [x - \delta, x + \delta].$$

Existem duas possibilidades para o número a/b: $a/b \in V_\delta$ e $a/b \notin V_\delta$.

No caso, $a/b \in V_\delta$, temos $g(a/b) \neq 0$. Fazendo $z = a/b$ na equação (4-15), obtemos

$$\frac{a}{b} - x = \frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{g\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c_o + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + \cdots + c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n}{g\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Multiplicando por b^n,

$$\frac{a}{b} - x = \frac{c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n}{b^n\, g\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Note que, $c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n \neq 0$, caso contrário, como $b^n \neq 0$ e $g(a/b) \neq 0$ teríamos $x = a/b$, o que contradiz o fato de x ser irracional. Portanto, como $c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n$ é um inteiro diferente de zero,

$$|c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n| \geq 1.$$

Seja $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$, para todo $z \in V_\delta$. Então,

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n}{b^n\, g\left(\frac{a}{b}\right)}\right| \geq \frac{1}{M\, b^n}.$$

No segundo caso, $a/b \notin V_\delta$, como $b^n \geq 1$, temos que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \delta > \frac{\delta}{b^n}.$$

Portanto, para provar o teorema basta escolher

$$C = \min\{1/(M+1), \delta/2\}.$$

A prova do teorema está concluida. □

4.5 Uma conseqüência do Teorema 4.1: periodicidade

Vimos na Seção 3.1 que o número de ouro $\mathcal{O}$ tem expansão $1 + [1, 1, \ldots]$ (portanto, a expansão é periódica) e satisfaz a equação quadrática

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

Nesta seção vamos mostrar que a expansão em frações contínuas de um número irracional x (necessariamente infinita) é periódica se, e somente se, x satisfaz uma equação quadrática, isto é, se x for raíz de um polinômio do tipo

$$P(z) = az^2 + bz + c,$$

onde a, b, c são inteiros e $a > 0$.

Antes de provarmos esta afirmação, introduziremos a notação para expansões em frações contínuas periódicas, similar a usada para as expansões n-árias periódicas. Como no caso das expansões n-árias, há dois tipos de expansões periódicas, as puramente periódicas e as pré-periódicas (aquelas que são periódicas a partir de certo dígito).

Dizemos que a expansão em frações contínuas de $x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots]$ é *periódica* se existe $m > 0$ tal que

$$a_i = a_{i+m}$$

para todo i. Neste caso, escrevemos

$$x = \overline{a_0 + [a_1, \ldots, a_{m-1}}].$$

Observe que $x \in [0, 1)$ tem expansão periódica de período m se, e somente se, $T^m(x) = x$ e $T^j(x) \neq x$ para $0 < j < m$.

Dizemos que a expansão em frações contínuas do número $x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots]$ é *pré-periódica* se existem $n \geq 1$ e $m > 0$ tais que

$$a_{n+i+m} = a_{n+i}$$

para todo $i \geq 0$. Isto é, existe um bloco inicial seguido de um outro bloco que se repete infinitas vezes. A notação para esse caso é

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{n+m-1}}].$$

Observe que $x \in [0, 1)$ tem expansão pré-periódica se, e somente se, existe n tal que $T^n(x)$ tem expansão periódica (assim justificamos o nome pré-periódico para este tipo de expansões).

Agora estamos prontos para provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.19 *A expansão em frações contínuas de um número irracional x é periódica ou pré-periódica se, e somente se, x é solução de uma equação quadrática.*

Prova: Em primeiro lugar, vamos provar que se x tem expansão periódica ou pré-periódica então ele satisfaz uma equação quadrática.

Veremos primeiro o caso em que a expansão de x é periódica (de período m). Neste caso, temos que

$$x = \overline{a_0 + [a_1, \ldots, a_{m-1}]} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_0 + \ddots}}}}.$$

Escrevemos $\bar{x} = x - a_0$ e observamos que pela definição de T e dos quocientes de x,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{m-2} + \cfrac{1}{a_{m-1} + T^{m-1}(\bar{x})}}}}.$$

Comparando as duas expressões obtemos que $T^{m-1}(\bar{x}) = 1/x$.

Então, pela Propriedade (II),

$$x = \frac{p_{m-1} + (T^{m-1}(\bar{x}))\, p_{m-2}}{q_{m-1} + (T^{m-1}(\bar{x}))\, q_{m-2}} = \frac{x\, p_{m-1} + p_{m-2}}{x\, q_{m-1} + q_{m-2}}.$$

Logo,

$$x^2\, q_{m-1} + x\, q_{m-2} = x\, p_{m-1} + p_{m-2}.$$

Isto é,

$$q_{m-1}\, x^2 + (q_{m-2} - p_{m-1})\, x - p_{m-2} = 0.$$

Finalmente, como $m > 0$, temos que $q_{m-1} \geq q_0 = 1$. Portanto, a equação acima é uma equação quadrática. Isto prova a afirmação para o caso periódico.

O caso pré-periódico segue de forma similar, temos que

$$\begin{aligned} x &= a_0 + [a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{n+m-1}}] \\ &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots + \cfrac{1}{a_{n+m-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}}. \end{aligned}$$

Escrevemos $\bar{x} = x - a_0$ e obtemos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + T^{n-1}(\bar{x})}},$$

Comparando as duas igualdades precedentes obtemos

$$T^{n-1}(\bar{x}) = \cfrac{1}{a_n + \ddots + \cfrac{1}{a_{n+m-1} + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}.$$

Isto é,

$$\frac{1}{T^{n-1}(\bar{x})} = \overline{a_n + [a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}]}.$$

Note também que pela definição de pré-periodicidade, $T^{n-1+m}(\bar{x}) = T^{n-1}(\bar{x})$, portanto,

$$\frac{1}{T^{n-1+m}(\bar{x})} = \overline{a_n + [a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}]}.$$

Repetindo esse processo e usando a definição de T, obtemos

$$T^{N+m}(\bar{x}) = T^{N}(\bar{x}), \quad \text{para todo } N \geq n-1.$$

Então, pela Propriedade (II),

$$x = \frac{p_{n-1} + (T^{n-1}(\bar{x}))\, p_{n-2}}{q_{n-1} + (T^{n-1}(\bar{x}))\, q_{n-2}}$$

e

$$x = \frac{p_{n-1+m} + (T^{n-1+m}(\bar{x}))\, p_{n-2+m}}{q_{n-1+m} + (T^{n-1+m}(\bar{x}))\, q_{n-2+m}} = \frac{p_{n-1+m} + (T^{n-1}(\bar{x}))\, p_{n-2+m}}{q_{n-1+m} + (T^{n-1}(\bar{x}))\, q_{n-2+m}}.$$

Portanto, usando a primeira equação obtemos

$$T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{x\, q_{n-2} - p_{n-2}}$$

e usando a segunda

$$T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{p_{n-1+m} - x\, q_{n-1+m}}{x\, q_{n-2+m} - p_{n-2+m}}.$$

Isto é,

$$\frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{x\, q_{n-2} - p_{n-2}} = \frac{p_{n-1+m} - x\, q_{n-1+m}}{x\, q_{n-2+m} - p_{n-2+m}}.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} a &= q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1}, \\ b &= p_{n-1}\, q_{n-2+m} + q_{n-1}\, p_{n-2+m} - p_{n-1+m}\, q_{n-2} - q_{n-1+m}\, p_{n-2}, \\ c &= p_{n-2}\, p_{n-1+m} - p_{n-2+m}\, p_{n-1}, \end{aligned}$$

obtemos que

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0.$$

Afirmamos que a equação acima é uma equação quadrática, isto é, que $a \neq 0$. Caso contrário teriamos,

$$q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1} = 0,$$

e portanto q_{n-1+m} divide $q_{n-2+m}\, q_{n-1}$. Pela Propriedade (III), q_{n-1+m} e q_{n-2+m} são primos entre si. Portanto, se q_{n-1+m} divide $q_{n-2+m}\, q_{n-1}$ necessariamente deve dividir q_{n-1}. Mas isto é absurdo já que $q_{n-1+m} > q_{n-1}$.

Logo,

$$q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1} \neq 0,$$

Assim a equação acima é uma equação quadrática, o que prova a primeira afirmação para o caso pré-periódico.

Vamos provar agora a recíproca da primeira afirmação, isto é, que se x é solução de uma equação quadrática então x tem expansão em frações contínuas periódica ou pré-periódica. Por hipótese, existem inteiros a, b e c, $a > 0$, tais que

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0.$$

Escrevemos $\bar{x} = x - a_0$ e, usando a Propriedade (II), para cada $k \geq 1$, substituimos x na equação acima por

$$x = \frac{p_k + (T^k(\bar{x}))\, p_{k-1}}{q_k + (T^k(\bar{x}))\, q_{k-1}}.$$

Obtemos assim, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a\, (p_k + (T^k(\bar{x}))\, p_{k-1})^2 \quad &+ b\, (p_k + (T^k(\bar{x}))\, p_{k-1})\, (q_k + (T^k(\bar{x}))\, q_{k-1}) + \\ &+ c\, (q_k + (T^k(\bar{x}))\, q_{k-1})^2 = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$a\,(p_k^2 + 2\,(T^k(\bar{x}))\,p_{k-1}\,p_k + (T^k(\bar{x}))^2\,p_{k-1}^2)+$$

$$+b\,(p_k\,q_k + (T^k(\bar{x}))p_k\,q_{k-1} + (T^k(\bar{x}))\,p_{k-1}\,q_k + (T^k(\bar{x}))^2\,p_{k-1}\,q_{k-1})+$$

$$+c(q_k^2 + 2\,(T^k(\bar{x}))\,q_k\,q_{k-1} + (T^k(\bar{x}))^2\,q_{k-1}^2) = 0.$$

Reorganizando a equação acima obtemos,

$$\begin{aligned}&(T^k(\bar{x}))^2\,(a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2)+\\ &+(T^k(\bar{x}))\,(2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + 2\,c\,q_k\,q_{k-1})+\\ &+a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2 = 0.\end{aligned} \tag{4-16}$$

Tome

$$\begin{aligned}A_i &= a\,p_{i-1}^2 + b\,p_{i-1}\,q_{i-1} + c\,q_{i-1}^2,\\ B_i &= 2\,a\,p_{i-1}\,p_i + b\,p_i\,q_{i-1} + b\,p_{i-1}\,q_i + 2\,c\,q_i\,q_{i-1},\\ C_i &= a\,p_i^2 + b\,p_i\,q_i + c\,q_i^2.\end{aligned} \tag{4-17}$$

Obtemos assim uma família de equações (que veremos que são quadráticas) da forma

$$A_k\,(T^k(\bar{x}))^2 + B_k\,T^k(\bar{x}) + C_k = 0.$$

Afirmamos que $A_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Suponhamos por absurdo que $A_k = 0$. Então $T^k(\bar{x})$ seria um número racional e portanto x também seria racional, o que é absurdo. Logo, $A_k \neq 0$ e portanto as equações (4-16) são quadráticas.

Como, pelo Teorema 4.1, para $k \geq 1$,

$$\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \leq \frac{1}{q_k\,q_{k-1}} \leq \frac{1}{q_{k-1}q_{k-1}} = \frac{1}{q_{k-1}^2},$$

podemos escrever

$$x = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{\epsilon}{q_{k-1}^2}, \quad \text{onde} \quad |\epsilon| \leq 1, \quad \text{isto é,}$$

$$p_{k-1} = x\,q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}}.$$

Substituindo o valor de p_{k-1} na equação (4-17) temos que

$$\begin{aligned} A_k &= a\left(x\,q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}}\right)^2 + b\left(x\,q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}}\right) q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2 = \\ &= a\,x^2\,q_{k-1}^2 + 2\,a\,x\,\epsilon + a\left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}}\right)^2 + b\,x\,q_{k-1}^2 + b\,\epsilon + c\,q_{k-1}^2 = \\ &= q_{k-1}^2\,(a\,x^2 + b\,x + c) + 2\,a\,x\,\epsilon + a\left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}}\right)^2 + b\,\epsilon. \end{aligned}$$

Como por hipótese $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ obtemos

$$A_k = 2\,a\,x\,\epsilon + a\left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}}\right)^2 + b\,\epsilon = \epsilon\left(2\,a\,x + b + a\left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}^2}\right)\right).$$

Como $q_{k-1} \geq 1$ e $|\epsilon| \leq 1$, usando a desigualdade triangular,

$$|A_k| = \left|\epsilon\left(2\,a\,x + b + a\left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}^2}\right)\right)\right| \leq 2\,|a\,x| + |b| + |a|.$$

Note também que, por definição, se verifica $A_i = C_{i-1}$ (confira diretamente na equação (4-17)). Portanto,

$$|C_k| = |A_{k+1}| < 2\,|a\,x| + |b| + |a|.$$

Portanto, como x, a e b estão fixos, $|A_k|$ e $|C_k|$ são limitados. Assim, como são inteiros, podem assumir apenas um número finito de valores diferentes quando k varia.

Podemos também, através de uma conta simples, provar o seguinte

Afirmação 4.20 *O discriminante Δ da equação (4-16) é*

$$\Delta = B_k^2 - 4\,A_k\,C_k = b^2 - 4\,a\,c.$$

Demonstraremos esta afirmação depois de terminar a prova do teorema.

Usando a afirmação obtemos,

$$|B_k|^2 = |B_k^2| = |b^2 - 4\,a\,c + 4\,A_k\,C_k|$$

Portanto, como $|A_k|$ e $|C_k|$ são limitados, e a, b e c estão fixos, B_k também é limitado.

Assim, obtemos um número finito de equações da forma (4-16). Portanto, $T^k(\bar{x})$ assume um número finito de valores. Assim existem k e h tais que

$T^k(\bar{x}) = T^{k+h}(\bar{x})$. Isto automaticamente implica que a seqüência $T^j(\bar{x})$ é ou periódica (se $k = 0$) ou pré-periodica. Isto implica que a expansão de x em frações contínuas é periódica ou pré-periódica. Para terminar a prova do teorema falta provar a Afirmação 4.20.

Prova da Afirmação: Em primeiro lugar, lembramos a definição de B_k em (4-17),

$$B_k = 2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + 2\,c\,q_k\,q_{k-1},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
B_k^2 &= (2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + 2\,c\,q_k\,q_{k-1})^2 = \\
&= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 2\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + 2\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + \\
&\quad +4\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + 2\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + \\
&\quad +b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + 2\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + 2\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + \\
&\quad +b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2 + 2\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + \\
&\quad +4\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + 2\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + 2\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + \\
&\quad +4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B_k^2 &= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + \\
&\quad +(8\,a\,c + 2\,b^2)\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + \\
&\quad +b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2 + 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + 4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2.
\end{aligned}$$

Como

$$A_k = a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2,$$

e

$$C_k = a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
-4\,A_k\,C_k &= -4\,\left(a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2\right)\,(a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2) = \\
&= -4\,a^2\,p_{k-1}\,p_k^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k - 4\,a\,c\,p_{k-1}^2\,q_{k-1}^2 - \\
&\quad -4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} - 4\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 - \\
&\quad -4\,a\,c\,p_k^2\,q_{k-1}^2 - 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k - 4\,c^2\,q_{k-1}\,q_k.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B_k^2 - 4\,A_k\,C_k &= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + \\
&\quad +(8\,a\,c + 2\,b^2)\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + \\
&\quad +b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2 + 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + 4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2 - \\
&\quad -4\,a^2\,p_{k-1}\,p_k^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k - 4\,a\,c\,p_{k-1}^2\,q_{k-1}^2 - \\
&\quad -4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} - 4\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 - \\
&\quad -4\,a\,c\,p_k^2\,q_{k-1}^2 - 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k - 4\,c^2\,q_{k-1}\,q_k.
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima

$$\begin{aligned}
B_k^2 - 4\,A_k\,C_k &= 8\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 2\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + \\
&\quad +(b^2 - 4\,a\,c)\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + (b^2 - 4\,a\,c)\,p_{k-1}^2\,q_k^2 = \\
&= +(b^2 - 4\,a\,c)\,(-2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + p_k^2\,q_{k-1}^2 + p_{k-1}^2\,q_k^2) = \\
&= (b^2 - 4\,a\,c)\,(p_k\,q_{k-1} - p_{k-1}\,q_k)^2.
\end{aligned}$$

Pela Propriedade (III),

$$B_k^2 - 4\,A_k\,C_k = (b^2 - 4\,a\,c)((-1)^{n+1})^2 = b^2 - 4\,a\,c.$$

Finalizamos assim a prova da afirmação. $\square$

Provada a afirmação a demonstração do teorema esta concluida. $\square$