3
Exemplos

Neste capítulo apresentaremos dois exemplos de expansões em frações contínuas. O primeiro deles é a expansão do *número de ouro* que será usada como contra-exemplo no Capítulo 4. O segundo exemplo é a expansão do número e. Este exemplo é interessante por dois motivos. Em primeiro lugar a expansão do número e em frações contínuas tem fórmula de recorrência extraordinariamente simples. Em segundo lugar sua obtenção envolve apenas as propriedades dos convergentes e a expansão em séries de potências da exponencial.

3.1
O número de ouro e a seqüência de Fibonacci

O número de ouro é obtido quando uma quantidade (por exemplo, um segmento de reta ou um retângulo) é dividida em duas partes tal que a proporção entre o todo e a maior parte é a mesma que a proporção da maior parte e o restante. Tomando o comprimento ou área inicial igual a 1 e o tamanho da maior parte igual a α, obtemos que o número de ouro $\mathcal{O}$ verifica:

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Note que

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Assim,

$$\mathcal{O} = 1 + \frac{1}{\mathcal{O}}.$$

Repetindo esse processo infinitas vezes obtemos a expansão em frações contínuas de $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = 1 + [1, 1, \ldots, 1, \ldots].$$

Faremos agora uma observação que usaremos mais adiante (na Seção 4.5).

Observação 3.1 *Comparando a expressão acima com*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + T^n(x - a_0)}}}}$$

obtemos que

$$T^n(\mathcal{O} - 1) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = \mathcal{O}^{-1}.$$

Isto é, $T^n(\mathcal{O} - 1) = \mathcal{O}^{-1}$, *para todo* $n \geq 0$.

Por outro lado, como $\mathcal{O}$ é a raíz do polinômio $P(z) = z^2 - z - 1$ e por definição $\mathcal{O} > 1$, temos que

$$\mathcal{O} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Observamos também que $a_i = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lembramos que uma seqüência $(y_n)_{n \geq 0}$ é uma *seqüência de Fibonacci* se verifica a relação

$$y_{k-2} + y_{k-1} = y_k, \quad k \geq 2.$$

Seja p_k/q_k o k-ésimo convergente do número de ouro $\mathcal{O}$. Como a seqüência $(q_i)_{i \geq -1}$ é dada por

$$q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} = q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k \geq 1,$$

temos que $(q_i)_{i \geq -1}$ é uma *seqüência de Fibonacci*.

Afirmamos que no caso do número de ouro também se verifica $p_k = q_{k+1}$. Para isto raciocinamos indutivamente, suponha que $p_j = q_{j+1}$ para $1 \leq j \leq k$. Pela Propriedade (I) obtemos que

$$p_{k+1} = a_{k+1}\, p_k + p_{k-1} = a_{k+1}\, q_{k+1} + q_k = q_{k+2},$$

concluindo a prova de que $p_k = q_{k+1}$ para $k \geq 0$.

Consideremos agora a seqüência de Fibonacci $(y_n)_{n \geq 0}$ obtida da forma

$$y_{k+1} = q_k \quad \text{e} \quad y_{k+2} = p_k, \quad k \geq -1.$$

Pela Propriedade (III) dos convergentes,

$$y_{k+1}\, y_{k+1} - y_{k+2}\, y_k = y_{k+1}^2 - y_{k+2}\, y_k = (-1)^k.$$

Pela Observação 2.7, y_{k+1} e y_{k+2} são primos entre si. Finalmente, pelo Teorema 2.8,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+2}}{y_{k+1}} = \mathcal{O}.$$

3.2 A expansão do número e

Nesta seção veremos que a expansão em frações contínuas do número e é dada por

$$2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 16, 1, 1, \ldots].$$

Para isso, consideraremos o número θ cuja expansão em frações contínuas é

$$\theta = 2+[a_1, a_2, \ldots,], \quad \text{onde} \quad a_1 = 1, \quad a_{3\,k-1} = 2\,k \quad \text{e} \quad a_{3\,k} = a_{3\,k+1} = 1,\ k \geq 1$$

e veremos que este número é igual a e.

Seja p_k/q_k o convergente k-ésimo de θ. Em primeiro lugar, note que por convenção,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = \frac{2}{1} \quad \text{e} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1\, p_0 + p_{-1}}{a_1\, q_0 + q_{-1}} = \frac{3}{1}.$$

Como $a_{3\,k} = a_{3\,k+1} = 1$ e $a_{3\,k-1} = 2\,k$, usando a Propriedade (I) dos convergentes de θ, obtemos para $k \geq 1$ a relação

$$\begin{aligned}
p_{3\,k+1} &= a_{3\,k+1}\, p_{3\,k} + p_{3\,k-1} = p_{3\,k} + p_{3\,k-1} = \\
&= a_{3\,k}\, p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} + p_{3\,k-1} = p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} + p_{3\,k-1} = \\
&= 2\, p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} = 2\,(a_{3\,k-1}\, p_{3\,k-2} + p_{3\,k-3}) + p_{3\,k-2} = \\
&= 2\,(2\,k\, p_{3\,k-2} + p_{3\,k-3}) + p_{3\,k-2} = (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + 2\, p_{3\,k-3} = \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (a_{3\,k-3}\, p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} = \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (a_{3\,(k-1)}\, p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} =
\end{aligned}$$

$$= (2\,(2\,k)+1)\,p_{3\,k-2} + (p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} =$$

$$= (2\,(2\,k)+1)\,p_{3\,k-2} + (p_{3\,k-3} + p_{3\,k-4}) + p_{3\,k-5} =$$

$$= (2\,(2\,k)+1)\,p_{3\,(k-1)+1} + (a_{3\,(k-1)+1}\,p_{3\,k-3} + p_{3\,k-4}) + p_{3\,(k-2)+1} =$$

$$= (2\,(2\,k)+1)\,p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1} =$$

$$= 2\,(2\,k+1)\,p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1}.$$

Isto é,

$$p_{3\,k+1} = 2\,(2\,k+1)\,p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1}, \quad k \geq 1. \tag{3-1}$$

Analogamente temos que

$$q_{3\,k+1} = 2\,(2\,k+1)\,q_{3\,(k-1)+1} + q_{3\,(k-2)+1}, \quad k \geq 1. \tag{3-2}$$

Para provar que e é igual ao número θ usaremos a série de potências

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Fixado $m \in \mathbb{Z}$ temos:

$$e^{1/m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{m}\right)^k.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left(e^{1/m} + e^{-1/m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k} \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{1/m} - e^{-1/m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1}.$$

Considere os números positivos

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!}{k!\,(2\,n+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n}. \tag{3-3}$$

Observamos que estes números estão bem definidos. Para isso vemos primeiro que

$$\xi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!\,(2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k} = \frac{1}{2}\left(e^{1/m} + e^{-1/m}\right).$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(1+k)!}{k!\,(2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(1+k)\,k!}{k!\,(2+2\,k)\,(1+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{1/m} - e^{-1/m}\right).
\end{aligned}$$

Lema 3.2 *Os números ξ_n na equação (3-3) verificam*

$$\xi_n - m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1} = \xi_{n+2}.$$

Prova: Escrevemos $\Delta = \xi_n - m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1}$. Temos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^n\,(n+k)!}{k!\,(2\,n+2\,k)!} - m\,(2\,n+1)\,\frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!}{m\,k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!\,(2\,n+2+2\,k)\,(2\,n+1+2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} - \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,n+1)\,2^{n+1}\,(n+1+k)!}{k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!\,2\,(n+1+k)\,(2\,n+1+2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} - \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,n+1)\,2^{n+1}\,(n+1+k)!}{k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!\,((2\,n+1+2\,k)-(2\,n+1))}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} =$$

$$= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!((2\,n+1)-(2\,n+1))}{(2\,n+2)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!\,(2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}\,k\,(n+1+k)!}{k\,(k-1)!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}\,((n+2)+(k-1))!}{(k-1)!\,(2\,(n+2)+2\,(k-1))!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,(k-1)+(n+2)} = \xi_{n+2}.$$

Concluindo a prova do lema. □

Seja $\delta_n = \dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$. Temos

$$\delta_0 = \frac{\xi_0}{\xi_1} = \frac{e^{1/m}+e^{-1/m}}{e^{1/m}-e^{-1/m}} = \frac{e^{1/m}\,(e^{1/m}+e^{-1/m})}{e^{1/m}\,(e^{1/m}-e^{-1/m})} = \frac{(e^{2/m}+1)}{(e^{2/m}-1)}.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2,

$$\delta_n = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+2}+m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} = m\,(2\,n+1) + \frac{\xi_{n+2}}{\xi_{n+1}} =$$

$$= m\,(2\,n+1) + \frac{1}{\delta_{n+1}}.$$

Portanto,

$$\frac{(e^{2/m}+1)}{(e^{2/m}-1)} = \delta_0 = m + \frac{1}{\delta_1} = m + \cfrac{1}{3\,m + \cfrac{1}{\delta_2}} = \cdots.$$

Isto é, a expansão em frações contínuas de $(e^{2/m}+1)/(e^{2/m}-1)$ é

$$m + [b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots], \quad \text{onde} \quad b_n = (2\,n+1)\,m.$$

Em particular, para $m = 2$ temos que a expansão em frações contínuas de $(e+1)/(e-1)$ é

$$2 + [6, 10, \ldots, 2\,(2\,k+1), \ldots].$$

Usaremos esta relação mais tarde.

Escrevendo P_k/Q_k como os convergentes de $(e+1)/(e-1)$, onde $P_{-1} = 1$ e $Q_{-1} = 0$, temos que

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_1\, P_0 + P_{-1}}{b_1\, Q_0 + Q_{-1}} = \frac{6 \cdot 2 + 1}{6 \cdot 1 + 0} = \frac{13}{6} \quad \text{e}$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{b_k\, P_{k-1} + P_{k-2}}{b_k\, Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{2\,(2\,k+1)\, P_{k-1} + P_{k-2}}{2\,(2\,k+1)\, Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Lema 3.3 *Os convergentes p_k/q_k de θ e P_k/Q_k de $(e+1)/(e-1)$ verificam*

$$p_{3\,k+1} = P_k + Q_k \quad e \quad q_{3\,k+1} = P_k - Q_k, \quad k \geq 0.$$

Prova: A prova é por indução. Para $k = 0$ temos que

$$P_0 + Q_0 = 2 + 1 = 3 = p_1 \quad \text{e} \quad P_0 - Q_0 = 2 - 1 = 1.$$

Suponha que, para todo $1 \leq j < k$, se verifica

$$p_{3\,j+1} = P_j + Q_j \quad \text{e} \quad q_{3\,j+1} = P_j - Q_j.$$

Então, pela propriedade (I) dos convergentes,

$$P_k + Q_k = b_k\, P_{k-1} + P_{k-2} + b_k\, Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Pela hipótese de indução e pelas equações (3-1) e (3-2),

$$\begin{aligned} P_k + Q_k &= 2\,(2\,k+1)\, P_{k-1} + P_{k-2} + 2\,(2\,k+1)\, Q_{k-1} + Q_{k-2} = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(P_{k-1} + Q_{k-1}) + (P_{k-2} + Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(p_{3\,(k-1)+1}) + (p_{3\,(k-2)+1}) = p_{3\,k+1}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_k - Q_k &= (2\,(2\,k+1)\, P_{k-1} + P_{k-2}) - (2\,(2\,k+1)\, Q_{k-1} + Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(P_{k-1} - Q_{k-1}) + (P_{k-2} - Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(q_{3\,(k-1)+1}) + (q_{3\,(k-2)+1}) = q_{3\,k+1}. \end{aligned}$$

Isto termina a prova do lema. □

Finalmente, usando as relações anteriores, obtemos que

$$e = \frac{\frac{(e+1)}{(e-1)} + 1}{\frac{(e+1)}{(e-1)} - 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{P_k}{Q_k} + 1}{\frac{P_k}{Q_k} - 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{3\,k+1}}{q_{3\,k+1}} = \theta.$$

Isto prova que o número $e = \theta$ e portanto possui a expansão em frações contínuas anunciada no início desta seção.