2
Expansão em frações contínuas

Neste capítulo veremos que dado qualquer número real x existe uma seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números naturais (em alguns casos esta seqüência pode ser finita) tal que podemos escrever o número x da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \tag{2-1}$$

onde a_0 é um número inteiro. Esta expressão é a expansão (ou representação) em *frações contínuas* de x, que significa que o número x é o limite da seqüência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}.$$

Os números a_i são chamados os *quocientes* de x e as frações p_k/q_k são os convergentes de x. Escreveremos

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + [a_1, \ldots, a_k].$$

Veremos que um número admite uma única representação em frações contínuas. Além disso, um número é racional se, e somente se, sua expansão em frações contínuas é finita. Veremos isto na Seção 2.1 usando o Algoritmo da Divisão.

Na Seção 2.2, estudaremos expansões em frações contínuas de números irracionais. A ferramenta para obter a expansão em frações contínuas de números do intervalo $[0, 1)$ é a *Transformação de Gauss,* que será introduzida na Seção 2.2.1. As imagens de um número irracional pela transformação de Gauss determinam os quocientes de x.

O objetivo da Seção 2.3 é estudar as propriedades dos convergentes de um número real x (o caso interessante ocorre quando x é irracional). A primeira etapa é estudar as propriedades aritméticas dos convergentes. Isto é feito na Seção 2.3.1. Estas propriedades serão usadas sistematicamente ao longo do texto e terão um papel essencial. Na Seção 2.3.2 obteremos uma re-interpretação dos convergentes usando rotações do círculo.

A Seção 2.3 contém os dois principais resultados do capítulo. O primeiro (Teorema 2.8) é que a seqüência dos convergentes de um número real x converge a x. O segundo resultado é um recíproco (Teorema 2.12). O primeiro passo é o seguinte, dada uma seqüência de números naturais $(a_i)_{i\geq 0}$ definimos a seqüência $a_0 + [a_1, \ldots, a_k]$, então esta seqüência converge a um número real x, veja a Proposição 2.9. A segunda etapa é ver que a expansão em frações contínuas de x é dada exatamente pelos a_i. Para provar esta propriedade usaremos a dinâmica simbólica associada à Transformação de Gauss (veja a Seção 2.3.4).

2.1 Expansão em frações contínuas de números racionais. O Algoritmo de Divisão

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema que segue do Algoritmo da Divisão:

Teorema 2.1 *Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, admite uma expansão em frações contínuas finita.*

Observamos que da prova do teorema decorre que a expansão em frações contínuas de um número racional é necessariamente única (a menos da modificação do último termo que veremos mais adiante).

Em primeiro lugar, veremos como a expansão em frações contínuas em (2-1) é obtida quando x é um número racional em $[0, 1)$, isto é, $x = \dfrac{r_1}{r_0}$, onde $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $r_0 > r_1 > 0$ e os números r_0 e r_1 são primos entre si. Para isso, lembraremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo da Divisão de Euclides: *Dados dois números naturais a e b, $a \geq b$, escrevemos*

$$a = b\,q + p,$$

onde p e q são números naturais tais que $0 \leq p < q$. Os números p e q estão unicamente definidos.

Construtivamente, q é o número natural definido pela relações

$$b\,q \leq a \quad e \quad b\,(q+1) > a.$$

Então, por construção, $p = (a - b\,q)$ é necessariamente estritamente menor do que q.

Usando o Algoritmo da Divisão, dado $x = \dfrac{r_1}{r_0}$ determinamos de forma única números naturais $a_1 \geq 1$ e $r_2 \geq 0$, com $0 \leq r_2 < r_1$, tais que:

$$r_0 = a_1\, r_1 + r_2.$$

Se r_2 for zero, o processo termina. Caso contrário, escrevemos, usando novamente o Algoritmo de Divisão,

$$r_1 = a_2\, r_2 + r_3,$$

onde $0 \leq r_3 < r_2 < r_1$, obtendo

$$r_0 = a_1\,(a_2\, r_2 + r_3) + r_2.$$

Novamente, se r_3 for nulo o processo termina, caso contrário, dividimos r_2 por r_3. O processo continua de forma indutiva e obtemos números inteiros não negativos r_k dados pela relação

$$r_k = a_{k+1}\, r_{k+1} + r_{k+2},$$

onde $r_{k+2} < r_{k+1} < r_k \cdots < r_1 < r_0$. Este processo é necessariamente finito. Portanto, existe um primeiro n tal que $r_{n+1} = 0$. Este processo também fornece a seqüência dos a_k onde

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad a_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad \cdots, \quad a_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor, \tag{2-2}$$

lembramos que $\lfloor \varsigma \rfloor$ denota a parte inteira de ς. Observamos que neste processo os números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e os *restos* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ estão determinados de forma única.

Afirmamos que os números naturais a_k determinam a expansão em frações contínuas de x:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Para isso escrevemos

$$x = \frac{r_1}{r_0}, \quad T_1 = \frac{r_2}{r_1}, \quad T_2 = \frac{r_3}{r_2}, \quad \ldots, \quad T_{n-1} = \frac{r_n}{r_{n-1}}. \tag{2-3}$$

Lembrando a definição dos a_k obtemos,

$$\frac{1}{x} = a_1 + T_1, \quad \frac{1}{T_1} = a_2 + T_2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{T_{n-2}} = a_{n-1} + T_{n-1}, \quad \frac{1}{T_{n-1}} = a_n + 0.$$

Portanto,

$$x = \frac{1}{a_1 + T_1} = \frac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + T_2}} = \cdots = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Observamos que nosso processo de construção garante a unicidade da expansão em frações contínuas de um número racional, a menos de uma modificação no último termo (uma vez que quando $a_n > 1$ podemos substituí-lo por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$). Por exemplo, na representação acima teríamos

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}}.$$

O recíproco, se a expansão em frações contínuas é finita o número é racional, é óbvio. Isto termina a prova do Teorema 2.1 para números racionais no intervalo $[0, 1)$.

Finalmente, quando o número x não pertence ao intervalo $[0, 1)$ escolhemos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x - a_0 \in [0, 1)$ e aplicamos o processo anterior ao número racional $y \in [0, 1)$. Isto mostra que um número racional $x = \frac{p}{q}$ sempre tem uma expansão em frações contínuas finita,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Introduzimos agora a seguinte notação, dada uma família de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ escrevemos

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Com esta notação temos,

$$x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Note que neste caso $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números naturais, mas em alguns casos usaremos a mesma notação para números que não são necessariamente naturais.

Exemplo 1 *Vamos expandir a fração* $\frac{79}{28}$ *em frações contínuas usando o algoritmo de divisão:*

$$79 = 2 \cdot 28 + 23, \quad 28 = 1 \cdot 23 + 5, \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2, \quad 3 = 1 \cdot 2 + 1, \quad 2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

A partir dessas igualdades obtemos:

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{23}{28} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{28}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{5}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Isto é,

$$\frac{79}{28} = 2 + [1, 4, 1, 1, 2].$$

2.2 Expansão em frações contínuas de números irracionais

Nesta seção introduziremos a *transformação de Gauss* que nos permitirá obter a seqüência a_i de quocientes de um número (irracional) $x \in [0,1)$. Em princípio esta associação é puramente formal, mais adiante veremos que de fato a seqüência dos convergentes $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ converge a x.

2.2.1 A transformação de Gauss. Quocientes e convergentes

Definição 2.2 *A transformação de Gauss $T : [0,1) \to [0,1)$ é definida por*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

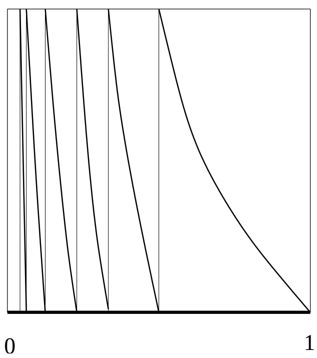

Figura 2.1: A transformação de Gauss

Observação 2.3 *Um número x é irracional se, e somente se, $T(x)$ é irracional. Portanto, se x é um número irracional então $T^n(x)$ é irracional (logo não nulo) para todo n.*

Existe a seguinte relação entre a transformação de Gauss e o Algoritmo de Divisão.

Lema 2.4 *Se x é racional em $[0,1)$ então, com a notação em (2-3),*

$$T^j(x) = T_j, \quad \textit{para todo } j \geq 1.$$

Observação 2.5 *O Lema 2.4 e o Teorema 2.1 implicam que se x é racional então existe n tal que $T_1, \ldots, T_n \neq 0$ e $T_k = 0$ para todo $k \geq n+1$.*

Prova: Para provar o lema note que se $x = r_1/r_0$ então se

$$r_0 = a_1\, r_1 + r_2$$

temos que

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Logo,

$$T_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0}{r_1} - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x).$$

Suponha agora indutivamente que $T^j(x) = T_j$ para $1 \le j \le n$. Se

$$r_n = a_{n+1}\, r_{n+1} + r_{n+2}$$

então

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor.$$

Logo,

$$T_{n+1} = \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor.$$

Por outro lado, pela hipótese de indução,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T(T_n) = T\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right) = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor.$$

Portanto, $T_{n+1} = T^{n+1}(x)$, o que termina a prova do lema. □

O Lema 2.4 sugere a seguinte notação,

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor \tag{2-4}$$

e definimos de forma indutiva

$$a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)). \tag{2-5}$$

Isto é,

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor, \quad n \ge 1.$$

Pelas definições de $T(x)$ e $a_1(x)$ temos

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}.$$

Repetindo o processo,

$$T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}.$$

Portanto, indutivamente obtemos

$$\begin{aligned} x &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} = \\ &= [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x) + T^n(x)]. \end{aligned} \tag{2-6}$$

Finalmente, quando x é um número real qualquer, escolhemos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - a_0 \in [0, 1)$. Aplicando o processo anterior para $x - a_0$ temos que

$$\begin{aligned} x &= a_0(x) + \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} = \\ &= a_0 + [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x) + T^n(x)], \end{aligned}$$

onde $a_0(x) \in \mathbb{Z}$ é tal que $x - a_0 \in [0, 1)$.

Exemplo 2 *A expansão em frações contínuas de* $\sqrt{3}$ *é periódica com*

$$a_{2i+1}(\sqrt{3}) = 1 \quad e \quad a_{2i+2}(\sqrt{3}) = 2,$$

para todo $i \geq 0$. *Escrevendo*

$$a_0(\sqrt{3}) = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1,$$

temos

$$\sqrt{3} = a_0(\sqrt{3}) + [1, 2, 1, 2, \ldots].$$

Veremos que esta expressão significa que a seqüência

$$x_n = a_0(\sqrt{3}) + [a_1(\sqrt{3}), a_2(\sqrt{3}), \ldots, a_n(\sqrt{3})]$$

converge para $\sqrt{3}$.

De fato, veremos no Teorema 4.19, que um número tem uma expansão em frações contínuas periódica se, e somente se, é raíz de um polinômio de grau dois.

Para obter a expansão de $\sqrt{3}$ usaremos a transformação de Gauss. Como $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, aplicamos a transformação de Gauss a $y = x - a_0 \in [0, 1)$

$$a_1(y) = \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1,$$

$$\begin{aligned} a_2(y) &= \left\lfloor \frac{1}{T(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{y} - \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\,(\sqrt{3}+1)}{2} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3(y) &= \left\lfloor \frac{1}{T^2(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{T(y)} - \left\lfloor \frac{1}{T(y)} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = 1. \end{aligned}$$

Concluímos então que $a_1(y) = a_3(y)$ e também que $y = T^2(y)$ Portanto, $T(y) = T^3(y)$. Isto garante que $a_2(y) = a_4(y)$. Continuando o processo indutivamente obtemos que se $i \geq 0$ e então

$$1 = a_1(y) = a_3(y) = \ldots = a_{2\,i+1}(y) \quad \text{e} \quad 2 = a_2(y) = a_4(y) = \ldots = a_{2\,i+2}(y).$$

Logo, a expansão em frações contínuas de $\sqrt{3}$ é dada por

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = 1 + [1, 2, 1, 2, ...].$$

Definição 2.6 *Denominaremos*

– *os inteiros* $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots$ *por* quocientes de x;

– *o número racional* $a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$ *por* n-ésimo convergente *de* x.

O Lema 2.4 e o Teorema 2.1 implicam que se x é racional então existe n tal que

$$x = a_0 + [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)].$$

No Teorema 2.8 provaremos que quando x é irracional a seqüência

$$\begin{aligned} x_n &= a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)] = \\ &= a_0(x) + \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_n(x)}}} \end{aligned}$$

converge a x quando n tende a infinito.

2.3 Convergentes

Na seção anterior, a cada número irracional $x \in [0, 1)$ associamos usando a Transformação de Gauss, uma seqüencia de quocientes $(a_i)_{i \geq 1}$ e definimos a seqüencia associada $[a_1, \ldots, a_k]$ de convergentes de x. O objetivo desta seção é provar que, de fato, os convergentes convergem para x, veja o Teorema 2.8.

O primeiro passo para provar o Teorema 2.8 é obter uma série de propriedades aritméticas dos convergentes, isto é feito na Seção 2.3.1. Estas propriedades aritméticas desempenham um papel fundamental ao longo do texto.

Na Seção 2.3.2 daremos uma interpretação dinâmica e geométrica dos convergentes usando rotações do círculo.

2.3.1 Propriedades aritméticas dos convergentes

Nesta seção veremos que dado um número real x existe uma representação racional $p_n(x)/q_n(x)$ do n-ésimo convergente $a_0(x) + [a_1(x), \ldots, a_n(x)]$ de x que verifica as Propriedades (I), (II), (III), (IV) e (V) abaixo. Veremos que esta escolha implica que as frações $p_n(x)/q_n(x)$ são irredutíveis (ver a Observação 2.7). A estas frações (com certo abuso de notação) chamaremos também de convergentes de x. Veremos também que a expansão em frações contínuas de $p_n(x)/q_n(x)$ é dada por $a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$.

A seguir fixaremos x e, para simplificar a notação, escreveremos a_i, p_i e q_i no lugar de $a_i(x)$, $p_i(x)$ e $q_i(x)$ quando não for necessário explicitar o x (no item (IV) esta dependência é necessariamente explícita). Temos que os p_n e q_n

podem ser escolhidos de forma que as propriedades abaixo sejam satisfeitas. Por convenção, escreveremos

$$q_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = a_0 \quad \text{e} \quad p_{-1}(x) = q_0(x) = 1.$$

(I) Para todo $n \geq 1$ se verifica

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \text{e} \quad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}.$$

(II) Para todo $n \geq 0$,

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}}.$$

(III) Para todo $n \geq 0$,

$$p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n.$$

(IV) Para todo $n \geq 0$,

$$p_n(x) = q_{n-1}(T(x)).$$

(V) Para todo $n \geq 2$ se verifica

$$p_n(x) \geq 2^{(n-2)/2} \quad \text{e} \quad q_n(x) \geq 2^{(n-1)/2}$$

Observação 2.7 *Note que a Propriedade (III) garante que qualquer divisor comum de p_n e q_n deve ser também um divisor de ± 1. Portanto, os números p_n e q_n são primos entre si e o convergente p_n/q_n é irredutível.*

Provaremos apenas a Propriedade (I), as outras seguem de forma análoga usando o método de indução e sua prova será omitida (ver referência (3)) .

Para provar (I), observamos que $\dfrac{p_0}{q_0} = a_0$ e que

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + [a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1\, a_0 + 1}{a_1}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_1 = a_1\, a_0 + 1 \quad \text{e} \quad q_1 = a_1,$$

obtendo (I) para $n = 1$.

Para $n = 2$, por definição, temos

$$a_0 + [a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0\, a_2\, a_1 + a_0 + a_2}{a_2\, a_1 + 1}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_2 = a_0\, a_2\, a_1 + a_0 + a_2 = a_2\,(a_1\, a_0 + 1) + a_0 \quad \text{e} \quad q_2 = a_2\, a_1 + 1,$$

obtendo (I) para $n = 2$.

Agora suponha, indutivamente, que a Propriedade (I) é verdadeira para todo k menor ou igual do que n,

$$a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}} = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k\, p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Antes de provar (I) para $n + 1$ necessitamos a seguinte propriedade de independência dos p_k e q_k: o método de indução também implica que para todo $k \leq n$ os números inteiros positivos p_k e q_k dependem somente dos quocientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ e são independentes de a_{k+1}. Para provar essa afirmação observamos que, pela hipótese de indução,

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, p_{n-2} + p_{n-3}}{a_{n-1}\, q_{n-2} + q_{n-3}}.$$

e assim os números inteiros positivos p_{n-1}, q_{n-1} dependem somente dos inteiros positivos $a_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, q_{n-2}, q_{n-3}$. Novamente, como

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-2}\, p_{n-3} + p_{n-4}}{a_{n-2}\, q_{n-3} + q_{n-4}},$$

temos que os inteiros positivos p_{n-2}, q_{n-2} dependem somente de a_{n-2}, p_{n-3}, p_{n-4}, q_{n-3} e q_{n-4}. Assim, indutivamente, obtemos a afirmação.

Agora estamos prontos para provar a Propriedade (I) para $n + 1$. Observamos que

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

e que, pela hipótese de indução,

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Assim concluímos que o $(n+1)$-ésimo convergente

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$$

é obtido substituindo na expressão do n-ésimo convergente $a_0 + [a_1, \ldots, a_n]$ o número a_n por $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$, isto é,

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] = a_0 + \left[a_1, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].$$

Observamos que a substituição de a_n por $(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ não altera a definição dos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ precedentes. Portanto, como $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ são independentes do quociente a_n, eles não se alteram com esta substituição. Isto é,

$$\begin{aligned}
a_0 + [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] &= a_0 + \left[a_1, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \\
&= \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \\
&= \frac{a_n\, a_{n+1}\, p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2}\, a_{n+1}}{a_n\, a_{n+1}\, q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2}\, a_{n+1}} = \\
&= \frac{a_{n+1}\,(a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}\,(a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Lembrando que pela hipótese de indução

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}$$

obtemos

$$a_0 + [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_{n+1} = a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1},$$

que conclui a prova da Propriedade (I).

Com as propriedades (I), (II), (III), (IV) e (V) podemos provar que dado um número x a seqüência dos números racionais formada pelos seus convergentes converge para o próprio número x. Isso será provado na Seção 2.3.3.

2.3.2
Outra interpretação dos convergentes: Convergentes e rotações

Vamos agora dar uma outra explicação dos convergentes de um número x usando rotações do círculo.

Representaremos o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ como o conjunto de pontos da forma $e^{i\,x}$, $x \in \mathbb{R}$ (isto é, $e^{i\,x}$ e $e^{i\,(x+2\,k\,\pi)}$ representam o mesmo ponto do círculo). A *rotação* do círculo de ângulo $2\,\pi\,\alpha$, que denotaremos por $R_\alpha(\cdot)$, se define, na notação multiplicativa, como

$$R_\alpha(z) = e^{2\,\pi\,\alpha\,i}\, z.$$

Observe que se $z = e^{i\,x}$ então

$$R_\alpha(z) = R_\alpha(e^{i\,x}) = e^{i\,(2\,\pi\,\alpha + x)}.$$

Tomaremos x um número irracional com expansão em frações contínuas dada por $[a_1, a_2, \ldots]$.

Seja I_0 o arco de 1 até o ponto $e^{2\,\pi\,x\,i}$ (ou, usando a forma aditiva I_0 denota o subintervalo $[0, x]$ em $[0, 1]$).

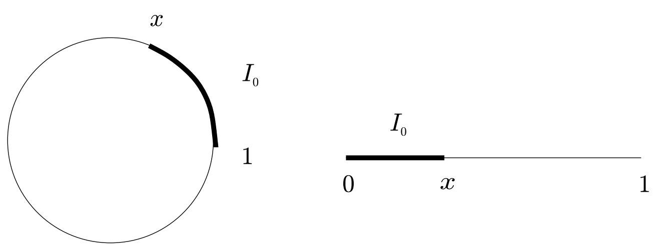

Figura 2.2: O arco I_0

Como

$$a_1 = a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$

temos que $a_1 \leq \dfrac{1}{x} < a_1 + 1$, e portanto, $a_1\, x \leq 1 < (a_1 + 1)\, x$. Isto significa que podemos colocar exatamente a_1 arcos consecutivos do tamanho do arco I_0 no círculo (usando a forma aditiva, isto corresponde a a_1 subintervalos consecutivos de tamanho x).

A partir de agora denotaremos o tamanho de um arco I por $s(I)$.

Seja J_1 o arco de extremos $a_1\, x$ e 1 (ou, usando a forma aditiva, J_1 é o subintervalo $[a_1\, x, 1]$). Transladaremos este arco à origem obtendo o arco $I_1 = [0, 1 - a_1\, x]$.

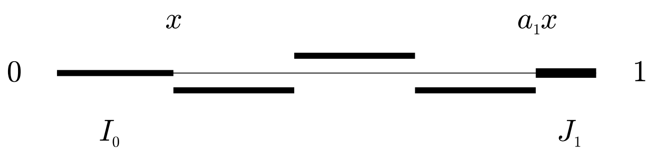

Figura 2.3: Os intervalos I_0 e J_1

Assim, como $s(I_1) = 1 - a_1\, x$ obtemos

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{s(I_1)}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} - \frac{s(I_1)}{a_1}.$$

Observamos que

$$\frac{s(I_1)}{s(I_0)} = \frac{1 - a_1\, x}{x} = \frac{1}{x} - a_1 = T(x).$$

Como

$$a_2 = a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s(I_0)}{s(I_1)} \right\rfloor.$$

Então,

$$a_2 \leq \frac{s(I_0)}{s(I_1)} < a_2 + 1.$$

Isto é,

$$a_2\, s(I_1) \leq s(I_0) < (a_2 + 1)\, s(I_1).$$

Logo, existem exatamente a_2 arcos (ou intervalos) de tamanho $s(I_1)$ dentro de I_0. Como no primeiro caso, começaremos a por os intervalos a partir da origem. Seja J_2 o intervalo que resulta ao retirar de I_0 os a_2 intervalos consecutivos de tamanho I_1. Denotaremos por I_2 o transladado de J_2 à origem.

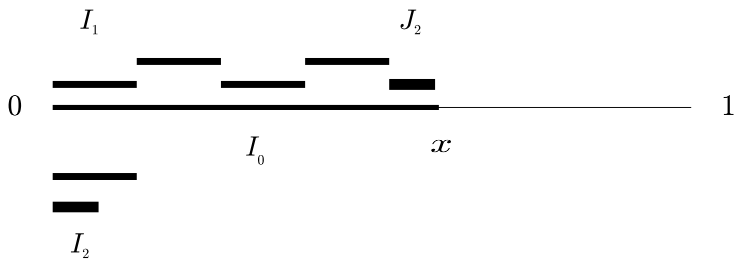

Figura 2.4: Construção do intervalo I_2

Usando a Propriedade (I) dos convergentes,

$$s(I_2) = x - a_2\,(1 - a_1\,x) = x\,(1 + a_2\,a_1) - a_2 = x\,q_2 - p_2.$$

Portanto,

$$x = \frac{a_2}{1 + a_2\,a_1} + \frac{s(I_2)}{1 + a_2\,a_1} = \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} + \frac{s(I_2)}{1 + a_2\,a_1} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{s(I_2)}{q_2}.$$

A idéia da construção é determinar quantos intervalos de tamanho $s(I_2)$ cabem no intervalo I_1, obter um resto de intervalo J_3, translada-lo a origem, obtendo um intervalo I_3 e repetir o processo com os intervalos I_2 e I_3, e assim sucessivamente.

A construção é feita indutivamente. Suponhamos já definidos os arcos $I_0, I_1, \ldots, I_{k-2}$. Denominaremos J_{k-1} o arco de extremos $a_{k-1}\,s(I_{k-2})$ e o extremo direito do segmento I_{k-3}. Usando a forma aditiva, J_{k-1} é o subintervalo $[a_{k-1}\,s(I_{k-2}), s(I_{k-3})]$. Denotaremos por I_{k-1} o transladado de J_{k-1} à origem. Na notação aditiva, definimos I_{k-1} como o intervalo $[0, s(I_{k-3}) - a_{k-1}\,s(I_{k-2})]$.

Vamos provar que

$$\frac{s(I_{k-1})}{s(I_{k-2})} = T^{k-1}(x), \quad k \geq 2.$$

O caso $k = 2$ já foi visto. Suponha, indutivamente, que

$$\frac{s(I_{j-1})}{s(I_{j-2})} = T^{j-1}(x), \quad 2 \leq j < k.$$

Então, pela definição de I_{k-1} e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{s(I_{k-1})}{s(I_{k-2})} &= \frac{s(I_{k-3}) - a_{k-1}\, s(I_{k-2})}{s(I_{k-2})} = \frac{s(I_{k-3})}{s(I_{k-2})} - a_{k-1} = \\ &= \frac{1}{T^{k-2}(x)} - a_{k-1} = T^{k-1}(x).\end{aligned}$$

Está então provada a afirmação.

Como

$$a_k = a_k(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s(I_{k-2})}{s(I_{k-1})} \right\rfloor,$$

temos que $a_k \leq \dfrac{s(I_{k-2})}{s(I_{k-1})} < a_k + 1$. Portanto,

$$a_k\, s(I_{k-1}) \leq s(I_{k-2}) < (a_k + 1)\, s(I_{k-1}).$$

Assim podemos colocar exatamente a_k arcos (ou intervalos) de tamanho $s(I_{k-1})$ em I_{k-2}. Começaremos a por os intervalos a partir da origem. Seja J_k o intervalo que resulta ao retirar de I_{k-2} os a_k intervalos consecutivos de tamanho $s(I_{k-1})$. Denotaremos por I_k o transladado de J_k à origem, isto é, $I_k = [0, s(I_{k-2}) - a_k\, s(I_{k-1})]$. Temos

$$s(I_k) = s(I_{k-2}) - a_k\, s(I_{k-1}).$$

Mostraremos agora que, para todo $k \geq 1$

$$s(I_k) = \begin{cases} x\, q_k - p_k, & k \text{ é par;} \\ \\ p_k - x\, q_k, & k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para $k = 1$ e $k = 2$ já foi provado.

Suponha, indutivamente, que a afirmação acima é verdadeira para todo j, $2 \leq j < k$.

Se k é um número par, temos que $k - 2$ é par e $k - 1$ é ímpar. Portanto, usando a Propriedade (I) e a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} s(I_k) &= s(I_{k-2}) - a_k\, s(I_{k-1}) = x\, q_{k-2} - p_{k-2} - a_k\, (p_{k-1} - x\, q_{k-1}) = \\ &= x\, (q_{k-2} + a_k\, q_{k-1}) - (p_{k-2} + a_k\, p_{k-1}) = x\, q_k - p_k. \end{aligned}$$

Analogamente, se k for ímpar, temos que

$$\begin{aligned} s(I_k) &= s(I_{k-2}) - a_k\, s(I_{k-1}) = p_{k-2} - x\, q_{k-2} - a_k\, (x\, q_{k-1} - p_{k-1}) = \\ &= (p_{k-2} + a_k\, p_{k-1}) - x\, (q_{k-2} + a_k\, q_{k-1}) = p_k - x\, q_k. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova da afirmação.

Logo,

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_k}{q_k} + \dfrac{s(I_k)}{q_k}, & k \text{ é par;} \\ \\ x = \dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{s(I_k)}{q_k}, & k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Se escolhermos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + a_0$ teremos o mesmo resultado para um número real y.

2.3.3 Convergência

Nesta seção provaremos que os convergentes de um número x convergem para ele (Teorema 2.8). Também veremos, na Proposição 2.9, que dada qualquer seqüência de números naturais a_i a seqüencia $[a_1, \ldots, a_n]$ é convergente. Este resultado é o primeiro passo para obter a relação biunívoca entre números reais e expansões em frações contínuas estabelecida no Teorema 2.12.

Teorema 2.8 *Dado x real, a seqüência dos convergentes*

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = a_0 + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]$$

converge para x.

Prova: Primeiro, provaremos o teorema para $x \in [0, 1)$. Como x está fixo, omitiremos (quando possível) a dependência em x. Pela Propriedade (II), temos

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_n\, q_n + (T^n(x)\, p_{n-1})\, q_n - p_n\, q_n - (T^n(x)\, q_{n-1})\, p_n}{q_n\, (q_n + T^n(x)\, q_{n-1})} = \\ &= \frac{T^n(x)(p_{n-1}\, q_n - q_{n-1}\, p_n)}{q_n\, (q_n + T^n(x)\, q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Então, usando a Propriedade (III), $p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{T^n(x)(p_{n-1}\,q_n - q_{n-1}\,p_n)}{q_n\,(q_n + T^n(x)\,q_{n-1})}\right| = \left|\frac{T^n(x)\,(-1)^n}{q_n\,(q_n + T^n(x)\,q_{n-1})}\right| = \\ &= \frac{T^n(x)}{q_n\,(q_n + T^n(x)\,q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2}.\end{aligned} \tag{2-7}$$

Onde a última desigualdade segue observando que $0 \leq T^n(x) < 1$ e que q_n e q_{n-1} são positivos.

Finalmente, como a seqüência q_n é monótona crescente e $q_n > 1$ para todo $n \geq 2$ (estas afirmações seguem das Propriedades (I) e (V)), fazendo $n \to \infty$, temos que:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \to 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x,$$

o que termina a prova do teorema para $x \in [0, 1)$.

Para x um número real qualquer basta tomarmos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x - a_0 \in [0, 1)$, completando a prova do teorema. □

Já vimos no Teorema 2.1, como conseqüência do Algoritmo de Divisão, que todo número racional tem expansão em frações contínuas finita. Acabamos de mostrar que números irracionais possuem expansões infinitas que convergem aos mesmos. A seguir provaremos que toda expansão em frações contínuas infinita representa (converge para) um número irracional. Dessa forma obtemos uma relação biunívoca entre a reta e as expansões em frações contínuas.

Proposição 2.9 *Considere uma seqüência (infinita) a_n, $n \geq 1$, de números naturais. Para cada n defina o número racional*

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Então a seqüência $\frac{p_n}{q_n}$ converge a um número irracional x.

Veremos na Proposição 2.15 que, de fato, a expansão em frações contínuas do número x é dada pelos a_n.

Prova: Em primeiro lugar veremos que a seqüência $\frac{p_n}{q_n}$ é convergente.

Lema 2.10 *As seqüências de convergentes verificam*

- $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ *é monótona decrescente e limitada.*
- $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}$ *é monótona crescente e limitada.*

Portanto, as duas seqüências são convergentes

$$x^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = x^-.$$

Prova do Lema: Pela Propriedade (III), $p_{i-1}\, q_i - p_i\, q_{i-1} = (-1)^i$. Dividindo esta expressão por $q_i\, q_{i-1}$ obtemos,

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_{i-1}\, q_i}, \quad i \geq 1. \tag{2-8}$$

Note também que pela Propriedade (I),

$$\begin{aligned}
\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} &= \frac{p_{i-2}\, q_i - p_i\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} = \\
&= \frac{p_{i-2}\,(a_i\, q_{i-1} + q_{i-2}) - (a_i\, p_{i-1} + p_{i-2})\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} = \\
&= \frac{a_i\, p_{i-2}\, q_{i-1} + p_{i-2}\, q_{i-2} - a_i\, p_{i-1}\, q_{i-2} - p_{i-2}\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} = \\
&= \frac{a_i\,(p_{i-2}\, q_{i-1} - p_{i-1}\, q_{i-2})}{q_{i-2}\, q_i} = \frac{a_i\,(-1)^{i-1}}{q_{i-2}\, q_i},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue usando a Propriedade (III). Isto é,

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i\,(-1)^{i-1}}{q_{i-2}\, q_i},\ i \geq 2. \tag{2-9}$$

Tomando agora $i = 2\,n$ e $i = 2\,n+1$ em (2-8) e $i = 2\,n+1$ em (2-9) e observando que os q_i e os a_i são inteiros positivos, obtemos

$$\frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}} - \frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}} = \frac{(-1)^{2\,n}}{q_{2\,n-1}\, q_{2\,n}} = \frac{1}{q_{2\,n-1}\, q_{2\,n}} > 0, \quad \frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}} < \frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}};$$

$$\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}} - \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}} = \frac{(-1)^{2\,n+1}}{q_{2\,n}\, q_{2\,n+1}} = \frac{-1}{q_{2\,n}\, q_{2\,n+1}} < 0, \quad \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}} > \frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}};$$

$$\frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}} - \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}} = \frac{a_{2\,n+1}\,(-1)^{2\,n}}{q_{2\,n-1}\, q_{2\,n+1}} = \frac{a_{2\,n+1}}{q_{2\,n-1}\, q_{2\,n+1}} > 0, \quad \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}} < \frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}}.$$

Então,

$$\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}} < \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}} < \frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}}.$$

Analogamente, tomando $i = (2\,n+1)$ e $i = (2\,n+2)$ em (2-8) e $i = (2\,n+2)$ em (2-9), obtemos as seguintes desigualdades:

$$\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}}-\frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}}=\frac{(-1)^{2\,n+1}}{q_{2\,n}\,q_{2\,n+1}}=\frac{-1}{q_{2\,n}\,q_{2\,n+1}}<0,\quad \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}}>\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}};$$

$$\frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}}-\frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}=\frac{(-1)^{2\,n+2}}{q_{2\,n+1}\,q_{2\,n+2}}=\frac{1}{q_{2\,n+1}\,q_{2\,n+2}}>0,\quad \frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}<\frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}};$$

$$\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}}-\frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}=\frac{a_{2\,n+2}\,(-1)^{2\,n+1}}{q_{2\,n}\,q_{2\,n+2}}=\frac{-a_{2\,n+2}}{q_{2\,n}\,q_{2\,n+2}}<0,\quad \frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}>\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}}.$$

Então,

$$\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}}<\frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}<\frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}}.$$

Isto conclui a prova do lema. □

Observação 2.11 *De fato, na prova do lema é possível obter*

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}<\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}<\ldots<\frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}<\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Para isso é suficiente no primeiro passo considerar $i = 2\,n$ e $i = (2\,n + m)$ na equação (2-8) e $i = (2\,n + m)$ em (2-9), onde m é qualquer número ímpar. Na segunda etapa o raciocínio é similar.

A seguir veremos que $x^+ = x^-$. Como vimos na prova do Lema 2.10,

$$\frac{p_{2\,j-1}}{q_{2\,j-1}}-\frac{p_{2\,j}}{q_{2\,j}}=\frac{(-1)^{2\,j}}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}=\frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}.$$

Assim,

$$\left|\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}}-\frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right|=\left|\frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}\right|=\frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}.$$

Como a seqüência q_i é monótona crescente e $q_i > 1$ se $i \geq 2$, temos que:

$$\left|\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}}-\frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right|\to 0$$

quando $j \to \infty$. Logo,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}}-\frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right)=0.$$

Portanto:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}=x^-=x^+=\lim_{j\to\infty}\frac{p_{2j}}{q_{2j}}.$$

Assim concluímos a prova da primeira parte da proposição: a seqüência de convergentes é convergente.

Falta ver, que o limite é um número irracional x. Temos que $x = x^+ = x^-$, isto é,

$$x = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = \lim_{i\to\infty} a_0 + [a_1, a_2, ..., a_i] = a_0 + [a_1, a_2, ...].$$

Vamos mostrar que x é irracional. Para isso note que pelo Lema 2.10

$$\frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}} < x < \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}}.$$

Então,

$$0 < x - \frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}} < \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}} - \frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}}.$$

E assim, pela Propriedade (III),

$$\begin{aligned} 0 < |x\, q_{2\,i} - p_{2\,i}| \ &< \left| \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}}\, q_{2\,i} - p_{2\,i} \right| = \left| \frac{p_{2\,i-1}\, q_{2\,i} - p_{2\,i}\, q_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}} \right| = \\ &= \left| \frac{(-1)^{2i}}{q_{2\,i-1}} \right| = \frac{1}{q_{2\,i-1}}. \end{aligned}$$

Raciocinando por absurdo, suponhamos que x seja racional, digamos $x = \dfrac{b}{a}$. Então, multiplicando a desigualdade anterior por a, obtemos

$$0 < |x\, q_{2\,i}\, a - \ p_{2\,i}\, a| = |b\, q_{2\,i} - \ p_{2\,i}\, a| < \frac{a}{q_{2\,i-1}}.$$

Lembramos que a seqüência (q_i) é (estritamente) monótona crescente e $q_i > 1$ para todo $i \geq 2$. Portanto, podemos escolher i suficientemente grande de forma que $a < q_{i-1}$. Isto significa que

$$0 < |b\, q_{2\,i} \ - \ p_{2\,i}\, a| < \frac{a}{q_{2\,i-1}} < 1.$$

Mas isto contradiz o fato de $b\, q_{2\,i} \ - \ p_{2\,i}\, a \in \mathbb{Z}$. Logo x é irracional. $\square$

Mostraremos na próxima seção que a expansão em frações contínuas do número $x = \lim_{n\to\infty} [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é dada pelos a_i.

2.3.4 Dinâmica simbólica da Transformação de Gauss e expansão em frações contínuas

Já mostramos que dado x um número real qualquer a sua expansão em frações contínuas (dada pelos $a_k(x)$) é finita quando x é racional e infinita quando x é irracional. Além disto, quando x é irracional a seqüência $a_0 + [a_1(x), \ldots, a_k(x)]$ converge a x. Falta demonstrar que dada qualquer seqüência de números (a_k) existe um único número real x tal que sua expansão em frações contínuas é dada pela seqüência dos a_k. Desta forma estabeleceremos uma relação biunívoca entre as expansões em frações contínuas e a reta real. Mais precisamente:

Teorema 2.12 *Existem as seguintes correspondências biunívocas dadas pela expansão em frações contínuas:*

– *entre as seqüências finitas e os números racionais,*

$$\{(a_k),\ a_i \in \mathbb{N} \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ e } a_0 \in \mathbb{Z}\} \mapsto x \in \mathbb{Q}; \;\; x = a_0 + [a_1, \ldots, a_n];$$

– *entre as seqüências infinitas e os números irracionais,*

$$\{(a_k),\ a_i \in \mathbb{N} \text{ para } i \geq 1 \text{ e } a_0 \in \mathbb{Z}\} \mapsto x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \;\; x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots].$$

Para demonstrar o Teorema 2.12 estudaremos os itinerários dos pontos do intervalo $[0, 1)$ pela Transformação de Gauss via uma dinâmica simbólica com infinitos símbolos. Decomporemos o intervalo $[0, 1)$ em intervalos

$$I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), \quad k \geq 1,$$

e a cada ponto associaremos uma seqüência $a_k(x)$ de forma que $a_k(x) = m$ se $T^{k-1}(x) \in I_m$. Veremos que o número $[a_1(x), \ldots, a_k(x)]$ é precisamente o k-ésimo convergente de x. Seguem a prova do teorema e os detalhes desta construção.

Pela definição de T, temos que $T(I_k) = [0, 1)$ para todo $k \geq 1$. Dados k e $j \in \mathbb{N}$, definimos $I_{k,j}$ como o subconjunto de I_k tal que

$$T(I_{k,j}) = I_j.$$

Da monotonia estrita de T no intervalo I_k e a condição $T(I_k) = [0, 1)$, obtemos que estes conjuntos estão bem definidos e que são intervalos não vazios.

Suponhamos agora, por indução, que para todo $1 \leq k \leq n$ e para toda família de k números naturais $i_1, i_2, \ldots, i_k$, estão definidos intervalos não vazios $I_{i_i,\ldots,i_k}$ (que chamaremos de *cilindros* de ordem k) que verificam as relações

$$I_{i_1,\ldots,i_k} \subset I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}, \quad T^{k-1}(I_{i_1,\ldots,i_k}) = I_{i_k} \quad \text{e} \quad T(I_{i_1,\ldots,i_k}) = I_{i_2,\ldots,i_k}.$$

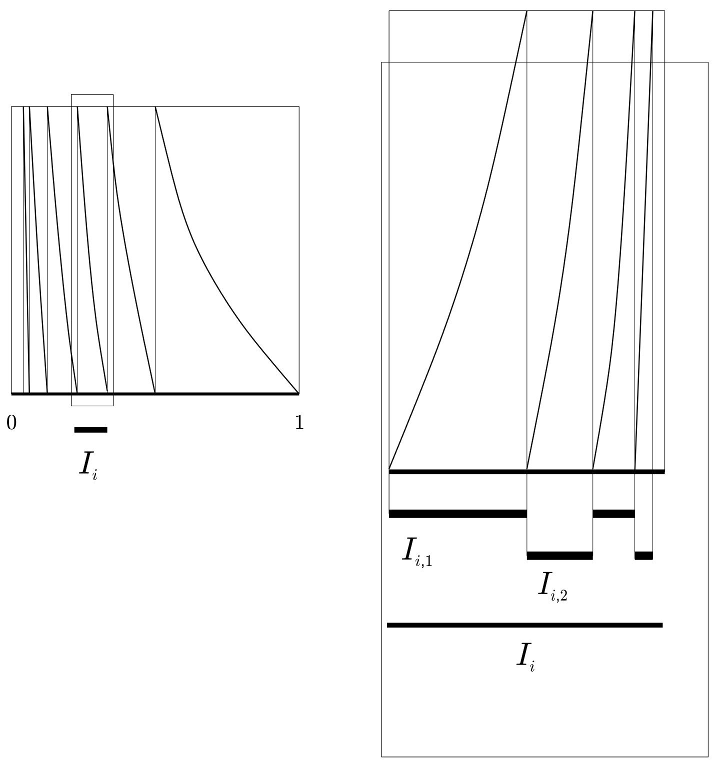

Figura 2.5: Cilindros de segunda ordem

Acabamos de ver que estas relações são verdadeiras para $k = 2$. A seguir construiremos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}$ tais que

$$I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}} \subset I_{i_1,\dots,i_n}, \quad T^n(I_{i_1,\dots,i_{n+1}}) = I_{i_{n+1}} \quad \text{e} \quad T(I_{i_1,\dots,i_{n+1}}) = I_{i_2,\dots,i_{n+1}}.$$

Dados números naturais $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}$, consideremos o intervalo $I_{i_1,\dots,i_n}$ e observamos que, pela hipótese de indução,

$$T^{n-1}(I_{i_1,\dots,i_n}) = I_{i_n},$$

portanto,

$$T^n(I_{i_1,\dots,i_n}) = T(I_{i_n}) = [0,1).$$

Como a transformação T^n é estritamente monótona, raciocinando como no primeiro passo da indução, dado $I_{i_{n+1}}$ existe um subintervalo J de $I_{i_1,\dots,i_n}$ tal que $T^n(J) = I_{i_{n+1}}$. Agora é suficiente tomar $I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}} = J$. Finalmente,

$$T^n(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_{n+1}}.$$

Para cada j, $1 \leq j \leq n$, consideramos a restrição de T^j ao intervalo $I_{i_1,\ldots,i_n}$, que denotamos por $T^j_{i_1,\ldots,i_n}$. Estas transformações são injetivas. Assim temos,

$$T(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = T(T^{-n}_{i_1,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}})).$$

Observe que como $T^{-n}_{i_1,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}) \subseteq I_{i_1,\ldots,i_n}$, temos que $T^{-(n-1)}_{i_1,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}) = T(T^{-n}_{i_1,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}})) \subseteq T(I_{i_1,\ldots,i_n})$. Assim, pela hipótese de indução, $T^{-(n-1)}_{i_1,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}) \subseteq I_{i_2,\ldots,i_n}$.Considere então a restrição de T^j ao intervalo $I_{i_2,\ldots,i_n}$ que denotaremos por $T^j_{i_2,\ldots,i_n}$. Obtemos então,

$$T(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = T^{-(n-1)}_{i_2,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}).$$

Por outro lado, pela hipótese de indução,

$$T^{n-1}(I_{i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_{n+1}}.$$

Isto é,

$$I_{i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}} = T^{-(n-1)}_{i_2,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}).$$

Portanto,

$$T(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = T^{-(n-1)}_{i_2,\ldots,i_n}(I_{i_{n+1}}) = I_{i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}}.$$

Isto termina a construção dos intervalos $I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}$.

Observamos que esta construção implica que para toda família $i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}$ de números naturais e todo número natural i_{n+2} se verifica

$$\text{fecho } (I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}}) \subset I_{i_1,\ldots,i_n}. \tag{2-10}$$

Para isto é suficiente lembrar a definição de $I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}}$ (dado pela relação $T^n(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}}) = I_{i_{n+1},i_{n+2}}$) e observar que $T^n(I_{i_1,\ldots,i_n}) = [0,1)$, T^n é estritamente monótona, e que o fecho de $I_{i_{n+1},i_{n+2}}$ está contido em $[0,1)$.

Observação 2.13 *Dada uma seqüência i_k de números naturais se verifica*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_k} \neq \emptyset.$$

Para obter esta observação é suficiente verificar que, pela equação (2-10), se verifica

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{fecho } (I_{i_1,\ldots,i_{k+2}}).$$

Como a última interseção é de uma família de compactos encaixados, ela é não vazia.

A seguir relacionaremos os intervalos $I_{i_1,\ldots,i_n}$ com a expansão em frações contínuas.

Proposição 2.14 *Seja $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$. Então o n-ésimo convergente de x, $[a_1(x),\ldots,a_n(x)]$, verifica $a_j(x) = i_j$, para todo $j = 1,\ldots,n$.*

Prova: A prova é por indução. Se $x \in I_{i_1} = [1/(i_1+1), 1/i_1)$. Pela equação (2-4), temos

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = i_1.$$

Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para todo $1 \leq k \leq n$. Consideremos $x \in I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}$. Como $I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \subset I_{i_1,\ldots,i_n}$, temos $a_1(x) = i_1,\ldots,a_n(x) = i_n$. Por outro lado, pelas propriedades dos intervalos $I_{i_1,\ldots,i_k}$, temos

$$T(x) \in T(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_2,\ldots,i_n,i_{n+1}}.$$

Portanto, pela hipótese de indução,

$$a_1(T(x)) = i_2,\ldots,a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Finalmente, o resultado decorre da equação (2-5),

$$a_{n+1}(x) = a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Isto conclui a prova da afirmação. $\square$

Pela Proposição 2.14, se $x \in I_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ então seu n-ésimo convergente $[a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)]$ verifica $a_j(x) = i_j$, $j = 1, ..., n$. Isto significa que

$$I_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \subset \{x \in (0,1); i_1 = a_1(x),\, i_2 = a_2(x), ...,\, i_n = a_n(x)\}.$$

A inclusão em sentido contrário é óbvia. Assim obtemos que $I_{i_1,\ldots,i_k}$ está formado pelos números em $[0,1)$ cujo n-ésimo convergente é $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Proposição 2.15 *Dada uma seqüência infinita i_k de números naturais existe um único número (necessariamente irracional) x cuja expansão em frações contínuas $[a_1(x),\ldots,a_n(x),\ldots]$ verifica $a_k(x) = i_k$ para todo k.*

Prova: É suficiente escolher

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_k} \neq \emptyset,$$

lembre a Observação 2.13. A unicidade de x segue de

$$[i_1, i_2, \ldots, i_k] = [a_1(x), a_2(x), \ldots a_k(x)] \to x,$$

lembre a Proposição 2.14. A irracionalidade segue do fato da expansão ser infinita (Proposição 2.14). □

Corolário 2.16 *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das seqüências infinitas de números naturais e o conjunto de números irracionais do intervalo* $[0, 1)$ *dada pela expansão em frações contínuas:*

$$x \to [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots].$$

Este corolário é exatamente a segunda parte do Teorema 2.12, quando escolhemos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - a_0 \in [0, 1)$.

Finalmente, faremos alguns comentários sobre a expansão em frações contínuas dos números racionais em $[0, 1)$ que provam a primeria parte do Teorema 2.12. Para isto novamente escolhemos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - a_0 \in [0, 1)$.

Afirmamos que dado qualquer número racional $x \in [0, 1)$ existe um primeiro $j \geq 0$, tal que $T^j(x) = 1/k$ para algum $k \geq 1$. Caso contrário, pela construção dos intervalos $I_{i_1,\ldots,i_n}$, existiria uma seqüência infinita i_k tal que $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\ldots,i_k}$. Pela Proposição 2.14, como $x \in I_{i_1,\ldots,i_k}$, sua expansão têm no mínimo k termos. Como k pode ser escolhido arbitrariamente grande, temos que a expansão de x é infinita. Portanto, x seria irracional (lembre a Proposição 2.9), o que é uma contradição..

Agora, se $x = 1/k$ temos que $x = [a_1(x)] = [k]$. Suponhamos agora que $x, T(x), \ldots, T^{j-1}(x)$ não são da forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, e que $T^j(x) = 1/k$. A primeira condição, $T^i(x) \neq 1/n$ para todo $i = 1, \ldots, j-1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $x \in I_{i_1,\ldots,i_j}$ para certos $i_1, i_2, \ldots, i_j$. Portanto, temos determinados os primeiros j termos da expansão em frações contínuas de x (que são exatamente $i_1, i_2, \ldots, i_j$). Como $T^j(x) = 1/k$, $T^j(x) = [k]$. Finalmente, pela equação (2-5), $a_{j+1}(x) = a_1(T^j(x)) = k$. Isto implica que

$$x = [i_1, \ldots, i_j, k].$$

Desta forma obtemos:

Existe uma correspondência biunívoca entre as seqüências finitas de números naturais e os números racionais dada pela expansão em frações contínuas.

Esta afirmação é exatamente a primeira parte do Teorema 2.12. A prova deste teorema agora está concluida.