1
Introdução

Dado qualquer número real x existe uma (única) seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números naturais (em alguns casos esta seqüência pode ser finita) tal que o número x pode ser escrito da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

onde a_0 é um número inteiro. Esta expressão é a expansão em *frações contínuas* do número x, que denotaremos por $x = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Isto significa que o número x é o limite da seqüência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}.$$

Os números a_i são chamados os *quocientes* de x e as frações p_k/q_k são os *convergentes* de x.

O objetivo deste texto é apresentar a teoria de frações contínuas enfatizando os seus aspectos ergódicos e de aproximação.

Uma das vantagens da expansão em frações contínuas é que podemos obter propriedades dos números reais apenas olhando sua expansão em frações contínuas. Por exemplo: os números racionais se caracterizam por ter expansão finita (Teorema 2.1), um número que é solução de uma equação algébrica de segundo grau se caracteriza por ter expansão periódica. Outra vantagem da expansão em frações contínuas é que podemos construir números transcendentes que são bem aproximados por números racionais.

Para representar um número real em frações contínuas introduziremos a *Transformação de Gauss*. Esta transformação é uma função do intervalo $[0, 1)$

nele próprio com infinitas descontinuidades. Os quocientes da expansão em frações contínuas de um número x estão determinados pela órbita de x pela transformação de Gauss que é dada por,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

onde $\lfloor \varsigma \rfloor$ denota a parte inteira de ς.

Veremos que a transformação de Gauss possui uma medida ergódica equivalente à medida de Lebesgue. O Teorema Ergódico de Birkhoff nos permitirá, usando essa medida (chamada *medida de Gauss*), obter propriedades sobre a representação em frações contínuas de quase todo número em $[0, 1)$. Essas propriedades ergódicas permitem responder a algumas perguntas sobre os números reais em $[0, 1)$.

Por exemplo, nós podemos perguntar quantas vezes aparece um determinado número natural n na expansão em frações contínuas de um número real x. Obviamente, a resposta a esta pergunta depende do número x. Há infinitos x tais que n não aparece nunca na sua expansão em frações contínuas. Porém, podemos responder a esta questão em termos probabilísticos: para quase todo número x do intervalo $[0, 1)$ (isto é, um conjunto de medida de Lebesgue total) o número n aparece com uma determinada freqüência que não depende de x (de fato, somente depende de n, a fórmula precisa se encontra na Proposição 5.13). A resposta a este tipo de problema exemplifica a aplicação da teoria ergódica ao estudo das frações contínuas.

Uma outra pergunta que nós podemos fazer é como caracterizar números com quocientes limitados (isto é, $a_i \leq M$ para todo $i \geq 0$) através do seu tipo de aproximação por números racionais. Essa pergunta é respondida no Teorema 4.15 que afirma que números com quocientes limitados não admitem soluções para a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2},$$

quando C é suficientemente pequeno. Também podemos responder a essa pergunta em termos probabilísticos: os conjuntos para os quais esta desigualdade não tem solução constituem um conjunto de medida nula (Corolário 5.18). Assim, quase todo número x em $[0, 1)$ admite infinitas soluções para a desigualdade acima para todo $C > 0$.

Responderemos a perguntas deste tipo ao longo do texto. A dissertação está dividida em sete capítulos que passamos a descrever brevemente.

O Capítulo 2 é dedicado a caracterização da expansão em frações contínuas dos números racionais e irracionais (um número é racional se, e somente se, sua expansão em frações contínuas é finita). Neste capítulo introduziremos a Transformação de Gauss que é usada para obter a expansão em frações contínuas de números do intervalo $[0,1)$ (as imagens de um número irracional pela transformação de Gauss determinam os seus quocientes). Estudaremos também os convergentes de um número real e suas propriedades algébricas que desempenham um importante papel no nosso estudo. Através dos convergentes obteremos uma relação biunívoca entre os números reais e a expansão em frações contínuas.

Dois exemplos interessantes sobre expansão em frações contínuas são dados no Capítulo 3. O primeiro é o número de ouro (o número cujos quocientes são todos iguais a 1), que aparecerá na dissertação como um contra-exemplo importante no Capítulo 4 (no contexto de aproximações por racionais). Também obteremos a expansão do número de Euler e. Veremos que, surpreendentemente, a expansão em frações contínuas do número e tem uma fórmula de recorrência simples: $2+[1,2,1,1,4,1,1,8,1,1,16,1,1,\ldots]$.

No Capítulo 4, veremos as leis de aproximação de números reais por racionais (aproximação Diofantina). Um resultado importante deste capítulo será que os convergentes de um número são as melhores aproximações (por números racionais) dele. Trataremos também da prova do Teorema de Liouville, que carateriza os números algébricos como aqueles que não admitem boas aproximações por números racionais que excedem uma determinada ordem.

Este capítulo será relacionado com o Capítulo 5, onde obteremos alguns dos resultados vistos para quase todo ponto em $[0,1)$ (ponto de vista ergódico).

Finalmente, neste capítulo, veremos a caracterização dos números reais com expansões periódicas como os números que são soluções de um equação quadrática, que terá como um exemplo o número de ouro.

Destinaremos o Capítulo 5 ao estudo das propriedades topológicas (transitividade, existência de órbitas densas, densidade de pontos periódicos) e ergódicas da transformação de Gauss. Definiremos a medida de Gauss, que é uma medida invariante e ergódica pela transformação de Gauss e equivalente à medida de Lebesgue. A partir daí, usaremos o Teorema de Birkhoff para provar alguns resultados probabilísticos (como a distribuição de determinado número na expansão em frações contínuas) sobre a expansão em frações contínuas de um conjunto de medida total de números reais.

Estabeleceremos no Capítulo 6 a relação entre o shift de Bernoulli e a transformação de Gauss. Desta forma re-obteremos as propriedades topológicas da transformação de Gauss vistas no Capítulo 5.

Finalmente, o último capítulo do texto destina-se ao cálculo da entropia da transformação de Gauss. Para esse cálculo serão usados dois resultados importantes, o Teorema de Shannon-McMillan-Breiman e o Teorema de Kolmogorov-Sinai.

Na medida do possível, esta dissertação conterá todas as informações necessárias para sua total compreensão, mas por questão de espaço alguns resultados básicos e definições da teoria da medida são omitidos (veja as referências (11) e (12)). Também enunciaremos sem prova o Teorema Ergódico de Birkhoff e os Teoremas de Shannon-McMillan-Breiman e de Kolmogorov-Sinai. Estes resultados podem ser encontrados nas referências (6), (8) e (9).

Concluirei esta introdução explicando alguns dos motivos que me levaram ao tema frações contínuas. No início da dissertação de mestrado comecei estudando o texto de Karma Dajani e Cor Kraaikamp (referência (1)) sobre teoria ergódica dos números. Este texto levantou meu interesse sobre aspectos ergódicos de expansões de números reais, não apenas expansão em frações contínuas como também as β-expansões (que envolvem as expansões n-árias, onde n é um número natural). Após um seminário no curso de Introdução aos Sistemas Dinâmicos me motivei a estudar mais sobre as expansões em frações contínuas. Meu interesse me levou ao texto clássico sobre frações contínuas de A. Ya. Khintchine, que é a principal influência e referência desta dissertação, embora os enfoques da dissertação e do texto sejam diferentes. Outras referências e influências foram aparecendo naturalmente ao longo do desenvolvimento da dissertação.