



Danielle de Rezende Jorge

Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproximação

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Rio de Janeiro
março de 2006



Danielle de Rezende Jorge

Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproximação

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Lorenzo Justiniano Díaz Casado

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Sérgio Bernardo Volchan

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira

IMPA

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de março de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Danielle de Rezende Jorge

Graduação: Matemática-Universidade Federal Fluminense (1999-2003).

Mestrado: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2004-2006).

Ficha Catalográfica

Jorge, Danielle de Rezende

Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproximação / Danielle de Rezende Jorge; orientador: Lorenzo Justiniano Díaz Casado. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 126 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Aproximação diofantina. 3. Convergentes e Quocientes. 4. Frações contínuas. 5. Ergodicidade. 6. Entropia. 7. Teorema Ergódico de Birkhoff. 8. Transformação de Gauss. 9. Transitividade. I. Díaz, Lorenzo J.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico este trabalho à Nassiro Santos, Edgard Jorge e Fernando Rezende.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão Edgard pela paciência, pelo amor e pelo apoio de todos os dias. Em especial à minha mãe, meu anjo da guarda, que sempre acreditou em mim.

Ao meu namorado André e sua família pelo carinho e ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus familiares pela compreensão e pelo incentivo.

Ao meu orientador Lorenzo J. Díaz pela paciência e empenho para que esse trabalho fosse realizado.

Aos professores Sérgio Volchan, Carlos Gustavo Tamm e Rafael Ruggiero pelas sugestões que contribuíram muito na elaboração desse trabalho.

Aos meus amigos, por dividirem comigo as alegrias e as tristezas do dia-a-dia.

A todos os funcionários e professores do departamento de matemática pela ajuda prestada. Em especial para Creuza.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Jorge, Danielle de Rezende; Díaz, Lorenzo J.. **Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproximação**. Rio de Janeiro, 2006. 126p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho apresentaremos a teoria de frações contínuas enfatizando a interação entre a teoria de números (expansões de números, aproximações diofantinas e boas aproximações) e a teoria ergódica.

Estudaremos a transformação de Gauss e construiremos uma medida ergódica desta transformação. Usando o Teorema Ergódico de Birkhoff obteremos resultados sobre a expansão em frações contínuas de quase todo número real em $[0, 1)$. Obteremos propriedades sobre a aproximação de números reais por racionais, sobre a frequência com que aparecem determinados números na expansão em frações contínuas, etc.

Estudaremos também o *shift de Bernoulli* e sua relação com a transformação de Gauss. Finalmente, calcularemos a entropia desta transformação.

Palavras-chave

Aproximação diofantina. Convergentes e Quocientes. Frações contínuas. Ergodicidade. Entropia. Teorema Ergódico de Birkhoff. Transformação de Gauss. Transitividade.

Abstract

Jorge, Danielle de Rezende; Díaz, Lorenzo J.. **Continued fractions: ergodic and approximation properties**. Rio de Janeiro, 2006. 126p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We study the theory of continued fractions emphasizing the interaction between theory of numbers (expansion of numbers, diophantine approximations, best approximations) and ergodic theory.

We study the Gauss transformation and construct its ergodic measure. Using the Birkhoff Ergodic Theorem we obtain results about the expansion in continued fractions of almost every real number in $[0, 1)$. We obtain properties about the approximation of real numbers by rational ones, the frequency of digits in the expansion by continued fractions, etc.

We also study the Bernoulli shift and its relation with the Gauss map. Finally, we calculate the entropy of such a transformation.

Keywords

Diophantine approximation. Convergents and Quotients. Continued fractions. Ergodicity. Entropy. Birkhoff Ergodic Theorem. Gauss map. Transitivity.

Sumário

1	Introdução	9
2	Expansão em frações contínuas	13
2.1	Expansão em frações contínuas de números racionais. O Algoritmo de Divisão	14
2.2	Expansão em frações contínuas de números irracionais	18
2.3	Convergentes	22
3	Exemplos	41
3.1	O número de ouro e a seqüência de Fibonacci	41
3.2	A expansão do número e	43
4	Convergentes e boas aproximações	49
4.1	Aproximação por convergentes	50
4.2	Boas aproximações	52
4.3	Ordem de Aproximação	59
4.4	Teorema de Liouville: aproximação de números algébricos	68
4.5	Uma conseqüência do Teorema 4.1: periodicidade	70
5	Transformação de Gauss: Propriedades topológicas e ergódicas	79
5.1	Propriedades Topológicas	80
5.2	Propriedades Ergódicas	81
5.3	Conseqüências da ergodicidade	88
5.4	Aplicação para aproximação Diofantina	99
6	O shift de Bernoulli	113
7	Entropia da Transformação de Gauss	117