



Diego Orlando

**Absorção Pendular para Controle de Vibrações de Torres
Esbeltas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro, março de 2006



Diego Orlando

Absorção Pendular para Controle de Vibrações de Torres Esbeltas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Presidente/Orientador
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Carlos Magluta

Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE-UFRJ

Prof. João Luis Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 03 de março de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Diego Orlando

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Passo Fundo (UPF), em janeiro de 2004. Participou de projetos de iniciação científica no Laboratório de Ensaios em Sistemas Estruturais (LESE-UPF). Ingressou no curso de mestrado em Engenharia Civil da PUC-Rio em março de 2004, atuando na área de Dinâmica Estrutural e Controle de Vibrações.

Ficha Catalográfica

Orlando, Diego

Absorção pendular para controle de vibrações de torres esbeltas / Diego Orlando ; orientador: Paulo Batista Gonçalves. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2006.

168 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Torres esbeltas. 3. Absorção dinâmica de vibrações. 4. Absorção pendular. 5. Controle de vibrações. 6. Oscilações não-lineares. 7. Estabilidade dinâmica. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Dedico este trabalho como minha mais saudosa homenagem aos meus pais,
Wilson Orlando e Melânia Maria Orlando, por todo amor, carinho e auxílio no
decorrer da minha vida.
Para meu irmão Thiago Orlando, pela amizade e por todas as oportunidades de
brincadeira e descontração.

Agradecimentos

Agradeço a vida, e àqueles que passam fazendo-a valer a pena.

Ao Professor Paulo Batista Gonçalves pelas conversas, pelo auxílio constante na realização deste trabalho, pela paciência e por sua amizade.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio pelos ensinamentos transmitidos.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A meus familiares que sempre acreditaram em mim, em especial a minhas avós e a meus avôs (Fidelis Orlando e Bonifácio Popiolek, in memoriam). A minha “Tia Ninha”, que ainda está viva em minha memória.

Aos meus amigos de uma vida inteira, em especial Eduardo de Mattos, Erblai de Mattos Junior, Cleiton Batista Silverio, Henrique Marek, André Guimarães, Eduardo Zimmer, Maikel Orlando, Célio França, Taiana França, Denise Marek, Carla Dall’Agnol, Osmar Cervieri e Jaime Giolo.

Aos Professores, Engenheiros e amigos Zacarias Chamberlain e Gilnei Artur Drehmer pelo constante apoio e incentivo.

Aos colegas e amigos que colaboraram nessa Dissertação em especial Frederico Martins, André Muller, Eduardo Pasquetti, Walter Menezes e Igor Otiniano.

Aos grandes amigos Julio e Gisele Holtz, Patrícia Cunha, Fernando Ramires e Alexandre Del Savio obrigado pelo incentivo e apoio.

Aos colegas, companheiros e amigos de festa e descontração Adriano, Thiago Pecin, Ygor, Christiano, Tiago Proto e Adenilson.

Aos antigos companheiros de republica Tinho, Zé, Fred, Pasquetti e Magnus, por terem me aturado tanto tempo e aos novos colegas de apartamento Thiago, Erblai

e Luis Gustavo.

A Cnpq e a Capes pelo apoio financeiro, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

A PUC-Rio pela complementação da bolsa através do programa de bolsa de rendimento acadêmico.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram de uma forma ou outra na realização desta Dissertação.

Resumo

Orlando, Diego; Gonçalves, Paulo Batista. **Absorção Pendular para Controle de Vibrações de Torres Esbeltas**. Rio de Janeiro, 2006. 168p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho, estuda-se o desempenho de um absorção pendular no controle de vibrações de torres altas e esbeltas, ocasionadas por carregamentos dinâmicos, tais como, por exemplo, cargas ambientais. Em virtude da possibilidade de oscilações de grande amplitude, considera-se na modelagem do problema a não-linearidade do pêndulo. O principal objetivo é estudar o comportamento do sistema torre-pêndulo, submetido a um carregamento harmônico, no regime não-linear, abordando-se aspectos gerais ligados à estabilidade dinâmica. Apresenta-se, inicialmente, a formulação necessária para obter o funcional de energia do sistema coluna-pêndulo, tanto para o caso linear quanto para o caso não-linear, do qual derivam-se as equações diferenciais parciais de movimento. A partir das equações lineares, obtêm-se as frequências naturais e modos de vibração para alguns casos relevantes de coluna. A seguir, com base na análise modal do sistema coluna-pêndulo, deriva-se um modelo de dois graus de liberdade capaz de descrever com precisão o comportamento do sistema na vizinhança da frequência fundamental da coluna, do qual obtêm-se as equações de movimento e as equações de estado não-lineares. Uma análise paramétrica detalhada das oscilações não-lineares do sistema coluna-pêndulo demonstra que o absorção pendular passivo pode reduzir ou amplificar a resposta da coluna. No estudo da influência da não-linearidade geométrica do pêndulo, verifica-se a importância dessa na resposta do sistema, evidenciando que a não-linearidade não pode ser desprezada nessa classe de problema. Por fim, com base nos resultados, propõe-se um absorção pendular híbrido. Os estudos revelam que este controle é mais eficiente que o passivo e que não requer grande gasto de energia.

Palavras-chave

Torres esbeltas, absorção dinâmico de vibrações, absorção pendular, controle de vibrações, oscilações não-lineares, estabilidade dinâmica.

Abstract

Orlando, Diego; Gonçalves, Paulo Batista. **Vibration Control of Slender Towers with a Pendulum Absorber**. Rio de Janeiro, 2006. 168p. MSc. Dissertation - Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the present work the performance of a pendulum absorber in the vibration control of tall and slender towers, caused by dynamic loads, such as, environmental loads, is studied in detail. Due to the possibility of large amplitude oscillations, the non-linearity of the pendulum is considered in the modeling of the problem. The main objective of this research is to study the behavior of the tower-pendulum system, submitted to a harmonic load, in the nonlinear regimen, with emphasis on general aspects related to its dynamic stability. It is presented, initially, the formulation necessary for the derivation of the system's energy functional, both for the linear and the nonlinear cases, from which the partial differential equations of motion are derived and the vibration frequencies and related vibration modes are obtained. Then, based on the modal analysis of the column-pendulum system, a two degrees of freedom model, capable of describing with precision the behavior of the system in the neighborhood of the fundamental frequency of the column is derived, from which the equations of motion and the nonlinear state-space equations are obtained. A detailed parametric analysis of the nonlinear oscillations of the system is carried out. It shows that the pendulum may reduce or amplify the response of the column. The results show a marked influence of the geometric not-linearity of the pendulum on the response of the system, showing that its not-linearity cannot be neglected in this class of problems. Finally, based on the results, a hybrid control approach is proposed. These studies show that this control strategy is more efficient than the passive control alone and that it does not require a large amount of energy.

Keywords

Slender towers, dynamic vibration absorber, pendulum absorber, vibration control, nonlinear oscillations, dynamic stability.

Sumário

1	Introdução	27
1.1.	Motivação	32
1.2.	Objetivos	33
1.3.	Organização do Trabalho	33
2	Formulação do Problema	35
2.1.	Funcional de Energia do Sistema – Formulação Não-Linear	36
2.1.1.	Energia Potencial Total da Coluna	37
2.1.2.	Energia Cinética da Coluna	42
2.1.3.	Amortecimento da Coluna	43
2.1.4.	Força Harmônica	44
2.1.5.	Funcional de Energia da Coluna – Formulação Não-Linear	44
2.1.6.	Funcional de Energia do Pêndulo – Formulação Não-Linear	44
2.1.7.	Montagem do Funcional de Energia do Sistema – Formulação Não-Linear	47
2.2.	Funcional de Energia do Sistema – Coluna Linear	47
2.3.	Dedução das Equações Diferenciais de Movimento	48
3	Freqüências Naturais e Modos de Vibração da Coluna	50
3.1.	Coluna de Seção Constante sem Força Axial	50
3.1.1.	Estudo das Freqüências Naturais	57
3.1.2.	Estudo dos Modos de Vibração	60
3.2.	Coluna de Seção Variável com Força Axial	62
3.2.1.	Avaliação da Força Axial	66
3.2.2.	Exemplo Numérico	67
3.2.2.1.	Coluna sem o Efeito do Peso Próprio	69
3.2.2.2.	Coluna com o Efeito do Peso Próprio	69
4	Solução do Sistema Coluna-Pêndulo	71
4.1.	Solução Modal	71

4.2. Exemplo	72
4.3. Justificativa para o Modelo de dois Graus de Liberdade	76
4.3.1. Equações Não-Lineares do Modelo de Dois Graus de Liberdade	76
4.4. Correlação com o Modelo Discreto de Dois Graus de Liberdade	76
4.5. Relação Freqüência-Amplitude da Coluna com Pêndulo Absorção	79
5 Estudo Paramétrico do Sistema Coluna-Pêndulo	87
5.1. Influência da Freqüência da Excitação no Comportamento do Sistema	87
5.2. Influência da Freqüência do Pêndulo no Comportamento do Sistema	97
5.3. Influência das Condições Iniciais do Pêndulo Absorção no Comportamento do Sistema	100
5.3.1. Resposta do Sistema a um Carregamento Senoidal	100
5.3.2. Comportamento do Sistema sob um Pulso Senoidal	104
5.3.3. Comportamento do Sistema sob um Pulso Retangular	105
5.3.4. Comportamento do Sistema para uma Velocidade Inicial	106
5.4. Influência do Amortecimento do Pêndulo no Comportamento do Sistema	107
5.5. Influência de uma Mola com Rigidez Linear	108
5.5.1. Variação da Rigidez Linear	109
5.5.2. Efeito de uma Mola Não-Linear	111
6 Resposta do Sistema Não-Linear	114
6.1. Obtenção das Equações Algébricas Não-Lineares	114
6.2. Resultados Numéricos	117
6.2.1. Exemplo 1	118
6.2.2. Exemplo 2	127
7 Absorção Dinâmica de Vibrações Híbrido	139

7.1. Comportamento do Sistema em Função dos Parâmetros da Força de Controle	142
7.1.1. Influência do parâmetro f	143
7.1.2. Influência do parâmetro β	147
7.2. Comportamento do Sistema Considerando Defasagem no Cálculo da Força de Controle	151
7.3. Comportamento do Sistema para um Pulso Retangular	155
7.4. Comportamento do Sistema para um Pulso com Amplitude Variável	157
8 Conclusões e Sugestões	160
8.1. Conclusões	160
8.2. Sugestões	161
9 Referências Bibliográficas	162

Lista de Figuras

Figura 1.1: Torres de telecomunicações.	27
Figura 1.2: Desprendimento de vórtices (Techet, 2005).	28
Figura 2.1: Coluna em estudo.	35
Figura 2.2: Deslocamento transversal e encurtamento da coluna.	38
Figura 2.3: Elemento infinitesimal da linha neutra da viga.	38
Figura 2.4: Parâmetros do pêndulo.	45
Figura 3.1: Coluna de seção constante sem força axial.	51
Figura 3.2: Modos de vibração da coluna.	54
Figura 3.3: Parcelas da condição de continuidade do esforço cortante.	55
Figura 3.4: Variação da primeira frequência em função de α e ν .	58
Figura 3.5: Variação da segunda frequência em função de α e ν .	59
Figura 3.6: Variação da terceira frequência em função de α e ν .	59
Figura 3.7: Comparação entre as três primeiras frequências quando $\nu = 1$.	60
Figura 3.8: Forma do primeiro modo de vibração variando-se ν .	61
Figura 3.9: Forma do segundo modo de vibração variando-se ν .	61
Figura 3.10: Forma do terceiro modo de vibração variando-se ν .	62
Figura 3.11: Coluna de seção variável com força axial.	63
Figura 3.12: Variação da força axial (Li <i>et al.</i> , 2000).	67
Figura 3.13: Coluna do exemplo numérico.	68
Figura 3.14: Modos de vibração da coluna sem o efeito do peso próprio.	69
Figura 3.15: Modos de vibração da coluna com o efeito do peso próprio.	70
Figura 4.1: Exemplo em estudo.	72
Figura 4.2: Modos de vibração do sistema coluna-pêndulo.	75
Figura 4.3: Sistema discreto massa-pêndulo.	77

Figura 4.4: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna.	82
Figura 4.5: Comportamento do fator de amplificação da rotação no topo da coluna.	82
Figura 4.6: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna para o ajuste ótimo.	85
Figura 4.7: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna para diferentes relações de μ .	86
Figura 5.1: Espectro de resposta de deslocamento do sistema para $\omega_p / \omega_c = 0.7965$.	88
Figura 5.2: Espectro de resposta de deslocamento do sistema para $\omega_p / \omega_c = 1.00$.	88
Figura 5.3: Espectro de resposta de deslocamento do sistema para $\omega_p / \omega_c = 1.1151$.	89
Figura 5.4: Espectro de resposta de deslocamento da coluna para $\omega_p / \omega_c = 0.7965$.	89
Figura 5.5: Espectro de resposta de deslocamento da coluna para $\omega_p / \omega_c = 1.00$.	90
Figura 5.6: Espectro de resposta de deslocamento da coluna para $\omega_p / \omega_c = 1.1151$.	90
Figura 5.7: Variação das amplitudes máximas de deslocamento da coluna original e com absorvedor na resposta permanente.	92
Figura 5.8: Diagramas de bifurcação para o deslocamento da coluna na resposta permanente.	93
Figura 5.9: Resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré da resposta permanente da coluna.	94
Figura 5.10: Diagramas de bifurcação para o deslocamento angular do pêndulo na resposta permanente.	95
Figura 5.11: Resposta no tempo, plano fase e seção de Poincaré da resposta permanente do pêndulo.	96
Figura 5.12: Amplitudes máximas da resposta total e permanente da coluna e do pêndulo.	98

Figura 5.13: Comportamento das amplitudes durante a resposta permanente.	99
Figura 5.14: Comportamento da força adimensional F .	100
Figura 5.15: Comportamento das amplitudes máximas da coluna na resposta total para um carregamento harmônico senoidal.	101
Figura 5.16: Comportamento das amplitudes máximas da coluna na resposta permanente para um carregamento harmônico senoidal.	101
Figura 5.17: Resposta da coluna no tempo para um carregamento harmônico senoidal.	102
Figura 5.18: Comportamento das amplitudes máximas do pêndulo na resposta total para um carregamento harmônico senoidal.	102
Figura 5.19: Comportamento das amplitudes máximas do pêndulo na resposta permanente para um carregamento harmônico senoidal.	103
Figura 5.20: Resposta do pêndulo no tempo para um carregamento harmônico senoidal.	103
Figura 5.21: Pulso senoidal.	104
Figura 5.22: Comportamento das amplitudes máximas da coluna para um pulso senoidal.	104
Figura 5.23: Comportamento das amplitudes máximas do pêndulo para um pulso senoidal.	105
Figura 5.24: Pulso retangular.	105
Figura 5.25: Comportamento das amplitudes máximas da coluna para um pulso retangular.	106
Figura 5.26: Comportamento das amplitudes máximas da coluna para uma velocidade inicial.	106
Figura 5.27: Amplitudes de deslocamento da coluna na resposta transiente para diferentes valores de ξ_p .	107
Figura 5.28: Influência da variação da taxa de amortecimento do pêndulo nas amplitudes máximas de resposta da coluna e do pêndulo.	108
Figura 5.29: Comportamento das amplitudes máximas do sistema na resposta total em função da variação de rigidez do pêndulo.	110

Figura 5.30: Comportamento das amplitudes máximas do sistema na resposta permanente em função da variação de rigidez do pêndulo.	111
Figura 6.1: Variação de $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$.	119
Figura 6.2: Variação de ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$.	119
Figura 6.3: Variação do ângulo de fase φ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$.	120
Figura 6.4: Variação do ângulo de fase ψ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$.	120
Figura 6.5: Influência do amortecimento do pêndulo em $\bar{\theta}$ e ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$.	121
Figura 6.6: Variação de $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	121
Figura 6.7: Variação do deslocamento angular $\bar{\theta}$ ao longo do tempo para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	122
Figura 6.8: Variação de ζ para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	123
Figura 6.9: Variação do deslocamento ζ ao longo do tempo para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	123
Figura 6.10: Variação do ângulo de fase φ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	124
Figura 6.11: Variação do ângulo de fase ψ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	124
Figura 6.12: Variação das amplitudes de deslocamento $\bar{\theta}$ e ζ (\bar{x} / x_{est}) para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$ (Pinheiro, 1997).	125

- Figura 6.13: Influência da não-linearidade do pêndulo em $\bar{\theta}$ e ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.092$. 127
- Figura 6.14: Influência da não-linearidade do pêndulo em $\bar{\theta}$ e ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.0$, $\mu = 0.20$, $F = 0.092$ e $\xi_{p\acute{o}t\text{imo}} = 0.25$. 127
- Figura 6.15: Amplitudes de deslocamento angular $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 128
- Figura 6.16: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Variação da coordenada $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 129
- Figura 6.17: Amplitudes de deslocamento ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 129
- Figura 6.18: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Variação da coordenada ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 130
- Figura 6.19: Amplitudes de deslocamento angular $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 130
- Figura 6.20: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Variação da coordenada $\bar{\theta}$ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 131
- Figura 6.21: Variação do deslocamento angular $\bar{\theta}$ ao longo do tempo para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 132
- Figura 6.22: Amplitude de deslocamento ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 133
- Figura 6.23: Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Variação da coordenada ζ para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 133
- Figura 6.24: Variação do deslocamento ζ ao longo do tempo para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$. 134

Figura 6.25: Comportamento das amplitudes de deslocamento angular do pêndulo para diferentes valores de ζ_s e $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$ e $\mu = 0.04$.	136
Figura 6.26: Comportamento das amplitudes de deslocamento da coluna para diferentes valores de ζ_s e $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 0.0\%$ e $\mu = 0.04$.	136
Figura 6.27: Comportamento das amplitudes de deslocamento da coluna original para diferentes valores de ζ_s .	137
Figura 6.28: Comportamento das amplitudes de deslocamento angular do pêndulo para diversos valores de ζ_s e $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$ e $\mu = 0.04$.	137
Figura 6.29: Comportamento das amplitudes de deslocamento da coluna para diversos valores de ζ_s e $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$ e $\mu = 0.04$.	138
Figura 7.1: Comportamento da função $\tanh(\beta x)$.	140
Figura 7.2: Comportamento das amplitudes do sistema e da força de controle.	141
Figura 7.3: Comparação das amplitudes de deslocamento da coluna, sem e com a força de controle.	142
Figura 7.4: Comparação das amplitudes de deslocamento angular do pêndulo, sem e com a força de controle.	142
Figura 7.5: Comportamento das amplitudes de deslocamento da coluna no tempo variando f .	145
Figura 7.6: Comportamento das amplitudes de deslocamento angular do absorvedor pendular no tempo variando f .	147
Figura 7.7: Comportamento das amplitudes de deslocamento da coluna no tempo variando β .	148
Figura 7.8: Comportamento das amplitudes de deslocamento angular do absorvedor pendular no tempo variando β .	150
Figura 7.9: Comportamento da função $\text{sign}(x)$.	150

Figura 7.10: Variação da amplitude máxima da coluna em função de β .	155
Figura 7.11: Variação da amplitude máxima da coluna em função de f .	155
Figura 7.12: Comportamento das amplitudes do sistema com a força de controle para um pulso retangular.	156
Figura 7.13: Força de excitação da equação (7.3).	158

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Comparação dos resultados.	53
Tabela 3.2: Freqüências naturais da coluna sem o efeito do peso próprio (rad/s).	69
Tabela 3.3: Freqüências naturais da coluna com o efeito do peso próprio (rad/s).	70
Tabela 4.1: Freqüências naturais do sistema (rad/s).	74
Tabela 4.2: Modos de vibração do sistema.	75
Tabela 5.1: Valores máximos da resposta não controlada.	98
Tabela 5.2: Amplitudes de deslocamento da coluna na resposta transiente para diferentes ξ_p .	107
Tabela 5.3: Variação da relação de freqüências com a variação da rigidez do pêndulo.	109
Tabela 5.4: Amplitudes máximas da coluna na resposta total com a variação de rigidez não-linear.	112
Tabela 5.5: Amplitudes máximas do pêndulo na resposta total com a variação de rigidez não-linear.	113
Tabela 5.6: Amplitudes máximas da resposta da coluna na fase permanente em função da variação de rigidez não-linear	113
Tabela 5.7: Amplitudes máximas da resposta do pêndulo na fase permanente em função da variação de rigidez não-linear.	113
Tabela 6.1: Comparação das amplitudes máximas obtidas no domínio da freqüência e no domínio do tempo para $\omega_p / \omega_c = 0.833$, $\xi_p = 26.23\%$, $\mu = 0.20$ e $F = 0.041$.	126
Tabela 6.2: Comparação das amplitudes máximas obtidas no domínio da freqüência e no domínio do tempo para $\omega_p / \omega_c = 1.018$, $\xi_p = 7.0\%$, $\mu = 0.04$ e $\zeta_s = 0.007$.	135
Tabela 7.1: Influência do parâmetro f nas amplitudes máximas da coluna na resposta total.	143

Tabela 7.2: Influência do parâmetro f nas amplitudes máximas da coluna na resposta permanente.	144
Tabela 7.3: Influência do parâmetro f nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta total.	145
Tabela 7.4: Influência do parâmetro f nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta permanente.	146
Tabela 7.5: Influência do parâmetro β nas amplitudes máximas da coluna na resposta total.	147
Tabela 7.6: Influência do parâmetro β nas amplitudes máximas da coluna na resposta permanente.	148
Tabela 7.7: Influência do parâmetro β nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta total.	149
Tabela 7.8: Influência do parâmetro β nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta permanente.	149
Tabela 7.9: Influência da defasagem nas amplitudes máximas da coluna na resposta total para $f = 1.00$ e $\beta = 6000$.	151
Tabela 7.10: Influência da defasagem nas amplitudes máximas da coluna na resposta permanente para $f = 1.00$ e $\beta = 6000$.	151
Tabela 7.11: Influência da defasagem nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta total para $f = 1.00$ e $\beta = 6000$.	152
Tabela 7.12: Influência da defasagem nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta permanente para $f = 1.00$ e $\beta = 6000$.	152
Tabela 7.13: Influência da defasagem nas amplitudes máximas da coluna na resposta total para $f = 1.00$ e $\beta = 60$.	153
Tabela 7.14: Influência da defasagem nas amplitudes máximas da coluna na resposta permanente para $f = 1.00$ e $\beta = 60$.	153
Tabela 7.15: Influência da defasagem nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta total para $f = 1.00$ e $\beta = 60$.	154
Tabela 7.16: Influência da defasagem nas amplitudes máximas do pêndulo na resposta permanente para $f = 1.00$ e $\beta = 60$.	154
Tabela 7.17: Influência da duração do pulso retangular na resposta da coluna.	156

Tabela 7.18: Influência da duração do pulso retangular na resposta do pêndulo.	157
Tabela 7.19: Influência do parâmetro ε_0 nas amplitudes máximas da coluna.	158
Tabela 7.20: Influência do parâmetro ε_0 nas amplitudes máximas do pêndulo.	159

Lista de Símbolos

A ,	área da seção transversal da coluna de seção transversal constante;
A_j ,	amplitudes; constantes da função f_n ;
A_0 ,	área da seção transversal da base da coluna de seção transversal variável;
A_x ,	área da seção transversal a uma altura x da base da coluna de seção transversal variável;
b ,	número de termos necessários para descrição do campo de deslocamento com a precisão desejada;
C ,	coeficiente de amortecimento da coluna;
\mathbf{C} ,	vetor de constantes;
C_d ,	coeficiente de amortecimento da massa do modelo discreto;
C_i ,	constantes;
C_p ,	coeficiente de amortecimento do pêndulo;
C_{pd} ,	coeficiente de amortecimento do pêndulo no modelo discreto;
d_{ext} ,	diâmetro externo da seção da coluna;
ds ,	elemento infinitesimal curvo;
dx ,	elemento infinitesimal linear na direção do eixo x ;
e ,	espessura da parede da coluna;
E ,	módulo de elasticidade do material da torre; energia dissipada;
E_d ,	energia dissipada do sistema;
EI_0 ,	rigidez a flexão na base da coluna;
EI_x ,	rigidez a flexão da coluna na seção x ;
f ,	magnitude da força de controle;
f_n ,	função de aproximação para deflexão da coluna;
F ,	força de excitação adimensional;
\mathbf{F} ,	matriz de coeficientes;

FA_{ζ} ,	fator de amplificação de deslocamento da coluna;
FA_{ψ} ,	fator de amplificação de rotação da coluna;
$FA_{\zeta_ótimo}$,	fator de amplificação da coluna ótimo;
F_c ,	força de controle;
F_e ,	força de excitação para uma explosão, ou terremoto, ou rajada de vento;
F_o ,	amplitude da força de excitação;
g ,	aceleração da gravidade;
I ,	momento de inércia da seção transversal da coluna;
I_n ,	função de Bessel de terceiro tipo;
I_x ,	momento de inércia da seção transversal da coluna, na seção x;
l ,	comprimento da haste do pêndulo absorvor;
l_d ,	comprimento da haste do pêndulo no modelo discreto;
J_n, J_i ,	função de Bessel de primeiro tipo;
L ,	comprimento da coluna;
L_1 ,	comprimento da extremidade engastada até a massa concentrada M_c ;
L_2 ,	comprimento da massa concentrada M_c até a extremidade livre da coluna;
\mathbf{K} ,	matriz de rigidez do sistema coluna-pêndulo;
K_d ,	rigidez elástica da massa do modelo discreto;
K_n ,	função de Bessel de quarto tipo;
K_{nl} ,	rigidez não-linear do pêndulo absorvor;
K_p ,	rigidez torsional do pêndulo absorvor;
K_{pd} ,	rigidez torsional do pêndulo do modelo discreto;
m ,	massa do pêndulo absorvor;
m_d ,	massa do pêndulo do modelo discreto;
M ,	massa por unidade de comprimento na coluna da seção transversal constante;
\mathbf{M} ,	matriz de massa do sistema coluna-pêndulo;

M_c ,	massa concentrada na coluna;
M_d ,	massa do modelo discreto;
M_o ,	massa por unidade de comprimento na base da coluna de seção transversal variável;
M_t ,	massa total da coluna;
M_x ,	massa por unidade de comprimento da coluna de seção transversal variável na seção x ;
n ,	parâmetro que descreve a mudança de seção transversal da coluna;
N ,	força axial na coluna de seção transversal constante;
N_0 ,	força axial na base da coluna de seção transversal variável;
N_x ,	força axial na coluna de seção transversal variável na seção x ;
P ,	carga concentrada no topo da coluna;
$P(x,t)$,	força transversal que age na seção x em um tempo t ;
q ,	carga axial devida ao peso próprio da coluna de seção transversal constante;
q_i ,	coordenadas generalizadas;
q_x ,	carga axial devida ao peso próprio da coluna de seção transversal variável na seção x ;
q_0 ,	carga axial devida ao peso próprio na base da coluna de seção transversal variável;
Q ,	força genérica externa;
t ,	tempo;
T ,	energia cinética; período do sistema coluna-pêndulo;
T_{pl} ,	energia cinética do pêndulo;
u ,	deslocamento axial;
U ,	energia interna de deformação; carga de vento;
U_f ,	energia da membrana gerada pela deformação axial;
U_m ,	energia de flexão gerada pelo alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas;
v ,	velocidade tangencial da massa do pêndulo;
V_p ,	potencial das cargas externas;

V_{pl} ,	energia potencial total do pêndulo;
$Y_n(d)$,	função de Bessel de segundo tipo;
x ,	coordenada axial;
w ,	deslocamento transversal da coluna;
\bar{w} ,	deslocamento transversal da coluna;
w_{es} ,	deslocamento estático da coluna;
W ,	trabalho;
W_{nc} ,	trabalho realizado pelas forças não conservativas;
W_p ,	trabalho realizado pela força harmônica;
$\frac{1}{R_0}$,	curvatura da estrutura indeformada;
$\frac{1}{R_f}$,	curvatura do eixo deformado;
α ,	relação entre a massa concentrada (M_c) e massa total da coluna (M_t); parâmetro de controle da rigidez não-linear do pêndulo;
β ,	parâmetro de controle da força de controle;
β_j ,	parâmetro de frequência;
δ ,	variação dos termos; função delta de Dirac;
ε ,	deformação específica da linha neutra;
ε_0 ,	parâmetro de controle da força de excitação F_e ;
ζ ,	parâmetro adimensional de deslocamento da coluna;
ζ_s ,	parâmetro adimensional de deslocamento estático; amplitude da força de excitação (adimensional);
ζ_{orig} ,	parâmetro adimensional de deslocamento da coluna original;
η ,	parâmetro que descreve a mudança de seção transversal da coluna;
ϖ ,	relação entre a frequência de excitação e a frequência natural da coluna;
θ ,	deslocamento angular do pêndulo absorvor;
$\bar{\theta}$,	deslocamento angular do pêndulo absorvor;
θ_0 ,	condição inicial do deslocamento angular do pêndulo absorvor;

\mathcal{G} ,	relação entre a frequência natural do pêndulo e a frequência natural da coluna;
$\mathcal{G}_{\text{ótimo}}$,	relação ótima entre a frequência natural do pêndulo e a frequência natural da coluna;
μ ,	relação entre a massa do pêndulo e massa da coluna;
ξ_c ,	taxa de amortecimento da coluna;
ξ_p ,	taxa de amortecimento do pêndulo absorvor;
$\xi_{p\text{ótimo}}$,	taxa de amortecimento do pêndulo absorvor ótimo;
π ,	energia potencial; pi;
ρ ,	massa por unidade de volume;
τ ,	parâmetro adimensional de tempo (dado por $\omega_e t$);
ν ,	parâmetro de posição da massa concentrada ao longo da coluna;
$\phi(x)$,	deslocamento lateral da torre; modos de vibração;
ϕ_1, ϕ_2 ,	funções peso;
φ ,	ângulo de fase;
χ ,	mudança de curvatura;
ψ ,	ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga; ângulo de fase;
ω ,	frequência do sistema coluna-pêndulo;
ω_c ,	frequência natural da coluna;
ω_e ,	frequência de excitação;
ω_p ,	frequência natural do pêndulo absorvor;
Γ ,	função gamma;
Δ ,	encurtamento na extremidade da coluna.