

3

Base Teórica

Nesse capítulo estão descritos os conceitos teóricos que são a base para o desenvolvimento da dissertação. O problema de mensuração e controle de risco financeiro tem motivado pesquisadores e tomadores de decisão a buscar indicadores capazes de identificarem quão arriscada é uma decisão. Uma fértil área de pesquisa desenvolveu-se na última década, tratando do problema de encontrar medidas de risco capazes de quantificar apropriadamente o risco de uma determinada posição assumida por um investidor.

Nesta dissertação, serão também avaliadas opções do tipo européias em contratos de compra de energia elétrica através do Modelo de Simulação de Monte Carlo. Monte Carlo é uma ferramenta de simulação estatística que utiliza métodos de amostragem para resolver problemas de natureza estocástica ou determinística.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: a seção 3.1 discute os conceitos básicos de risco e retorno em carteiras de investimento. A seção 3.2 apresenta métricas alternativas para avaliação de risco entre elas o Value at Risk e o Conditional Value at Risk. A seção 3.3 apresenta a teoria das opções financeiras e o método de Simulação de Monte Carlo para avaliação de opções européias. Na seção 3.4 é feita uma revisão sobre os principais trabalhos relacionados à teoria de opções aplicadas ao Setor Elétrico Brasileiro.

3.1.

Risco e Retorno de Carteiras

O termo “risco” é usualmente empregado em operações financeiras, e está associado com a probabilidade de se ganhar abaixo do esperado. Em geral, os

investimentos são avaliados em termos de taxas de retorno, e na medida que não se possa determinar adiantadamente qual será a taxa de retorno, tem-se uma situação de incerteza ou de risco [6][7][8].

Como medida de risco e retorno normalmente utiliza-se o desvio-padrão (ou variância) e o valor esperado do retorno, respectivamente. O risco do investimento é definido a partir da distribuição probabilística de retornos, desde que esta inclua todos os eventos possíveis.

O retorno esperado é a média ou tendência central da distribuição probabilística de retornos. É calculado pelo somatório dos produtos dos retornos dos possíveis eventos pelas respectivas probabilidades de ocorrência:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n pr_i R_i \quad (3.1)$$

onde:

pr_i é a probabilidade do evento i ;

R_i é o retorno desse evento;

n é o número de eventos.

Uma medida estatística normalmente usada para medir o risco é o desvio-padrão, que mede a dispersão da distribuição de probabilidades. Quanto maior for o desvio-padrão, maior a dispersão das expectativas em torno da média ou retorno esperado e, conseqüentemente, maior o risco (ou incerteza) do investimento.

O desvio-padrão (σ) é definido como sendo a raiz quadrada do somatório dos produtos das probabilidades dos eventos pelo quadrado da diferença entre cada retorno possível e o retorno esperado:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n pr_i [R_i - \bar{R}]^2} \quad (3.2)$$

onde:

pr_i é a probabilidade do evento i ;

R_i é o retorno desse evento;
 n é o número de eventos;
 \bar{R} é o retorno esperado da distribuição.

Quando o cálculo é realizado considerando toda a população de retornos, e todos os retornos tiverem a mesma probabilidade de ocorrência (equiprováveis), o desvio-padrão populacional da distribuição pode ser estimada da seguinte forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \quad (3.3)$$

Se o cálculo é realizado considerando uma amostra da população, um estimador não tendencioso do desvio-padrão amostral pode ser calculado do seguinte modo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \quad (3.4)$$

O retorno esperado (média) e o risco (desvio-padrão) de uma carteira com n ativos podem ser expressos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \bar{R}_c &= \sum_{i=1}^n W_i \bar{R}_i \\ \sigma_c &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde:

W_i = fração do ativo i na carteira;

W_j = fração do ativo j na carteira;

σ_i = desvio-padrão dos retornos do ativo i ;

σ_j = desvio-padrão dos retornos do ativo j ;

$\rho_{i,j}$ = coeficiente de correlação entre os retornos dos ativos i e j ;

\bar{R}_i = retorno esperado do ativo i;

\bar{R}_j = retorno esperado do ativo j;

O risco (desvio-padrão) de uma carteira depende da correlação entre os retornos dos ativos integrantes, medida pelo coeficiente de correlação (ρ) que varia entre -1 e $+1$. O coeficiente de correlação mede o grau e a relação de dependência entre duas variáveis aleatórias (retornos dos ativos). No caso de correlação perfeita positiva ($\rho=+1$), não se consegue nenhuma diversificação com a combinação dos ativos. Quando $\rho=-1$, obtém-se o maior ganho de diversificação possível.

A idéia de que o risco de uma carteira pode ser atenuado através da diversificação foi inicialmente apresentada por Harry Markowitz [9]. Markowitz também desenvolveu um modelo para auxiliar investidores na construção de carteiras ótimas, com base na relação risco x retorno desejado.

3.2. Métricas de Risco

A principal inovação proposta por Markowitz foi à interpretação do retorno de uma carteira como uma variável aleatória cujo risco é avaliado por meio de sua variância, isto é, do segundo momento da distribuição. A partir desta abordagem foi possível compreender que a diversificação reduz o risco, na medida em que carteiras que contêm ativos negativamente correlacionados possuem variância inferior a soma das variâncias individuais.

Um problema nesta abordagem é que a variância do retorno de uma carteira apresenta propriedades indesejáveis como a inadequação para avaliar situações de perdas extremas, situadas nas caudas da distribuição de probabilidade. Seguiram-se ao modelo de Markowitz, numa mesma linha, modelos que empregam medidas de risco definidas por outros momentos de distribuições de probabilidade, como o caso de Konno, 1991, que propõe o uso do primeiro momento absoluto da distribuição como métrica.

A prática da gestão de risco mostrou que considerar o primeiro e segundo momento da distribuição de probabilidade do retorno de uma carteira como medida de risco era insatisfatório, na medida em que não permite identificar anomalias ou mesmo a extensão de possíveis perdas com uma dada carteira.

Nenhuma metodologia de avaliação de risco de mercado mudaria tanto os conceitos de gestão de carteiras como o Valor em Risco (VaR). O VaR é uma métrica percentílica definida como o mínimo retorno esperado para um dado nível de confiança. Sua simplicidade em resumir a avaliação do risco de uma instituição utilizando um único número o tornaria um padrão de mercado no final dos anos noventa.

Com a evolução e melhor compreensão dos eventos relacionados à distribuição do retorno dos ativos, surge uma medida de risco que utiliza em sua estrutura, informações sobre eventos que ocorrem nas caudas das distribuições de probabilidades. Esta medida, denominada VaR Condicional (CVaR), tem ocupado destaque na literatura mais recente a respeito de risco e conduz a modelos lineares de grandes dimensões quando empregada para composição de portfólios.

3.2.1. Value at Risk (VaR)

O VaR pode ser definido como a pior (ou maior) perda esperada ao longo de um determinado intervalo de tempo para determinado nível de confiança, cujo cálculo utiliza técnicas estatísticas padrões comumente usadas. [10][11]

A maior vantagem do uso do VaR está no fato de este resumir em um único número a exposição total ao risco de mercado. O primeiro passo para a mensuração do VaR é a escolha de dois fatores: o horizonte de tempo e o nível de confiança dentro do qual se deseja medi-lo.

Para o cálculo do VaR de uma carteira, define-se W_0 como o investimento inicial e R como a sua taxa de retorno. O valor da carteira no final do horizonte considerado será:

$$W = W_0(1 + R) \quad (3.6)$$

O menor valor da carteira para um determinado nível de confiança c , será dado por:

$$W^* = W_0(1 + R^*) \quad (3.7)$$

O VaR pode ser derivado da distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira, $f(w)$. A determinado nível de confiança c , deseja-se descobrir a pior realização possível W^* , tal que a probabilidade de um valor menor que W^* , $p = P(w \leq W^*)$, seja:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p \quad (3.8)$$

O valor W^* é chamado quantil da distribuição, ou em outras palavras, um nível de perda que só é superado por $(1 - c)\%$ dos casos observados.

O cálculo do VaR pode ser simplificado de forma considerável supondo que a distribuição dos retornos é normal. Quando este for o caso, o VaR poderá ser derivado diretamente do desvio-padrão da carteira, utilizando-se um fator multiplicativo que depende do nível de confiança adotado. Essa abordagem é muitas vezes denominada de paramétrica, por envolver a estimativa de um parâmetro, no caso o desvio padrão, e não simplesmente a leitura de um quantil da distribuição empírica.

Intuitivamente, pode-se esperar que a abordagem baseada no desvio-padrão seja mais precisa. Na verdade, $\hat{\sigma}$ utiliza informações pertinentes à distribuição inteira (em termos de todos os desvios quadrados ao redor da média), ao passo que

um quantil utiliza apenas a ordenação dos dados e as duas observações ao redor do valor estimado. Entretanto, sempre que o modelo estocástico gerador da distribuição não puder ser definido, deve-se utilizar a medida de VaR não paramétrica (quantil).

A partir do momento em que a função de distribuição de probabilidades é conhecida, o cálculo do VaR pode ser realizado através da leitura de um determinado quantil desta distribuição (abordagem não paramétrica). Entretanto a grande dificuldade para o cálculo do VaR está associada ao conhecimento das reais características de tal função de distribuição.

Basicamente, as abordagens quanto as características da função de distribuição para o cálculo do VaR podem ser classificadas em dois grupos. O primeiro baseia-se na Avaliação Local, podendo ser exemplificado pelo Método Delta-Normal, que pressupõe que os retornos de todos os ativos sejam normalmente distribuídos. Um modelo baseado na aproximação de uma distribuição normal pode subestimar o VaR verdadeiro. Uma limitação desta abordagem é que este método não mensura o risco de opções adequadamente, pois o VaR de uma opção é uma função não linear do VaR do ativo objeto.

O segundo utiliza a Avaliação Plena, que pode ser implementada através dos métodos de Simulação Histórica ou Monte Carlo Estruturado, apresentados a seguir. Para carteiras com grande número de opções, é recomendável o uso de um método de Avaliação Plena para a mensuração do VaR.

O método da Simulação Histórica tem como princípio que as prováveis realizações das variáveis objeto-aleatórias são representadas por uma janela da série temporal histórica de tais variáveis. Em outras palavras, assume-se que uma janela da série histórica se repetirá no futuro.

Para o caso de uma carteira de ativos, este processo é feito para cada uma das taxas de retorno dos ativos que compõem a carteira. Em seguida é calculado o retorno da carteira associado a cada uma das prováveis realizações (cenários futuros) das variáveis objeto aleatórias através da seguinte fórmula:

$$R_{p,\tau} = \sum_{i=1}^N W_{i,t} R_{i,\tau} \quad \text{com} \quad \tau = 1, \dots, t \quad (3.9)$$

onde:

$R_{p,\tau}$ - retorno da carteira associada a τ -ésima realização das variáveis objeto-aleatórias (cenário futuro τ);

$R_{i,\tau}$ - retorno do investimento i associada a τ -ésima realização da variável objeto-aleatória correspondente (cenário futuro τ);

$W_{i,t}$ – peso atual do ativo i na carteira;

N - número de ativos que compõem a carteira;

t – número de realizações das variáveis objeto-aleatórias (cenários futuros).

Nota-se que os pesos $W_{i,t}$ são mantidos iguais a seus valores correntes. O retorno associado a cada cenário futuro não representa uma carteira real, mas reconstrói uma janela do histórico de uma carteira hipotética por meio de sua posição atual.

O VaR da carteira é então obtido através da leitura de um determinado quantil da distribuição. Alternativamente, poder-se-ia supor normalidade e confiar na variância para o cálculo do VaR. Como discutido anteriormente, a suavização da distribuição por meio de aproximação normal diminui o efeito da irregularidade na distribuição decorrente da variabilidade amostral. Tal processo fornece estimativas mais precisas para o VaR, contanto que a distribuição não seja muito diferente da normal.

O Monte Carlo Estruturado (MCE) é o método mais potente de cálculo do valor em risco. Ele captura grande quantidade de riscos, inclusive os não-lineares, os de volatilidade, e até mesmo os de modelo.

O método é semelhante ao de Simulação Histórica, exceto pelo fato das prováveis realizações (cenários futuros) das variáveis objeto-aleatórias serem criadas através de sorteios aleatórios a partir de um processo estocástico.

O conceito básico do MCE é simular, repetidamente, um processo estocástico para as variáveis de interesse, cobrindo grande quantidade de situações possíveis. As simulações recriam a distribuição inteira do valor da carteira.

As etapas do MCE são as seguintes:

- Escolhe-se um processo estocástico e seus parâmetros para modelar o comportamento das variáveis de interesse;
- Gera-se uma trajetória aleatória para as variáveis de interesse chegando-se a um valor S^1_T no horizonte desejado;
- Calcula-se o valor da carteira F^1_T a partir de S^1_T ;
- Repete-se as etapas 2 e 3 tantas vezes quanto necessário, obtendo-se uma distribuição de valores, $F^1_T, F^2_T, \dots, F^N_T$, a partir da qual o VaR possa ser calculado. Ao nível de confiança selecionado c , o VaR é o valor da carteira excedido em c vezes o número de simulações.

O método de Simulação de Monte Carlo será novamente discutido na seção 3.3.1, pelo fato deste método ser de grande aplicação a teoria de opções.

3.2.2. Conditional Value at Risk (CVaR)

Embora o VaR seja uma medida de risco largamente aceita e utilizada, seu uso tem sofrido críticas por parte da comunidade acadêmica pelo fato de ser uma medida de risco que não fornece nenhuma informação a respeito das perdas que o excede, as quais podem ser significativamente grandes. As críticas e limitações ao uso do VaR levaram a proposição do Conditional Value at Risk (CVaR) como medida de risco.

Para distribuições contínuas, o Valor em Risco Condicional (CVaR) pode ser definido como a média das perdas residentes na porção α da cauda da distribuição [12]. Os valores de VaR_α e $CVaR_\alpha$ são definidos respectivamente por :

$$VaR_\alpha = VaR(x, \alpha) = \min\{\zeta : F_\alpha(x, \zeta) \geq 1 - \alpha\} \quad (3.10)$$

$$\phi_\alpha(x) = CVaR_\alpha(x) = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(x,y) \geq VaR_\alpha(R(x))} f(x,y) p(y) dy \quad (3.11)$$

Para cada x , a função de perda, $f(x,y)$ é uma variável aleatória com distribuição em \mathfrak{R} induzida por y , sendo que y possui distribuição de probabilidade $p(y)$. Para contornar a inconveniência de se trabalhar com a integral presente em $\phi_\alpha(x)$, pode-se caracterizar $\phi_\alpha(x)$ em termos da função F_α dada por:

$$F_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{y \in \mathfrak{R}^n} [f(x,y) - \zeta]^+ p(y) dy \quad \text{onde } [t]^+ = \max(t, 0) \quad (3.12)$$

Ou seja, o CVaR a um nível de confiança α pode ser definido como o valor esperado condicional das perdas de um portfolio, dado que as perdas a serem contabilizadas são maiores ou iguais ao VaR. Por exemplo, para $\alpha = 95\%$, o CVaR é dado pela média das 5% maiores perdas.

Adotar o CVaR como métrica de risco de um portfolio se caracteriza como uma estratégia de gerenciamento de riscos mais conservadora do que o VaR. Isto porque o CVaR de um portfolio a um nível de confiança $\alpha\%$ nunca será menor do que o respectivo VaR. O CVaR também se constitui em uma medida de risco altamente flexível. Quando $\alpha \rightarrow 1$, o CVaR tende ao mínimo da distribuição e quando $\alpha \rightarrow 0$, o CVaR tende ao valor esperado da distribuição.

Marzano [3] de forma a definir a estratégia de comercialização de energia que maximize o valor esperado dos valores presentes das remunerações líquidas de uma empresa geradora, sujeita ao controle de sua exposição ao risco, propõe

em uma de suas abordagens para solução deste problema o Valor em Risco Condicional como medida de risco. Nesta abordagem é mostrado que o CVaR é uma medida consistente de risco.

3.3. Opções Financeiras

Uma opção é o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um bem ou ativo por um preço fixo em uma data prefixada ou até uma data prefixada. [13]

O fato de ser um direito, e não uma obrigação, gera uma assimetria benéfica ao proprietário da opção, já que o exercício somente será feito no caso da oscilação no preço do ativo ser favorável ao seu detentor.

Uma opção de compra dá o direito de comprar o bem ou ativo objeto, enquanto que uma opção de venda dá o direito de vendê-lo. O ativo objeto pode ser uma ação de determinada firma, um contrato futuro sobre outro ativo ou uma commodity, entre outros.

O preço fixo para a compra ou venda do ativo objeto é chamado de preço de exercício. A data prefixada para o exercício da opção é conhecida como data de expiração ou maturidade da opção. As opções financeiras são geralmente classificadas de acordo com sua possibilidade de exercício antecipado. Opções européias são opções cujos direitos podem ser exercidos apenas nas suas respectivas datas de vencimento, enquanto as opções americanas dão o direito de exercício em qualquer data até a maturidade das mesmas. Essa característica confere às opções americanas um valor no mínimo igual ao valor das opções européias semelhantes.

A precificação de uma opção européia envolve apenas a simulação de preços no instante final T . Já a precificação de uma opção americana é um

problema mais complexo por envolver a possibilidade de exercício antecipado em qualquer instante t_i até o vencimento da opção em T.

Existem ainda outros tipos de opções como, por exemplo, as opções asiáticas, cujo *payoff* depende do preço médio do ativo medido durante uma parte ou toda a vida da opção. Outro exemplo é a opção barreira, cujo *payoff* depende tanto do preço do ativo no vencimento da opção, como também se o preço atingiu determinado valor em algum momento da trajetória.

Considerando uma opção sobre um ativo que na data de vencimento vale S e tenha um preço de exercício X, nessa data, o valor da opção será dado por:

$$F = \max(0; S - X) \text{ para uma opção de compra} \quad (3.13)$$

$$F = \max(0; X - S) \text{ para uma opção de venda}$$

O valor da opção antes do vencimento depende de apenas 6 parâmetros:

- preço do ativo-objeto (S)
- preço de exercício da opção (X)
- volatilidade do ativo-objeto (σ)
- tempo que falta para a expiração da opção (τ)
- taxa de juros livre de risco (r)
- dividendos do ativo-objeto (δ)

A tabela seguinte mostra estes fatores e o efeito no preço da opção quando acontece um aumento em uma das variáveis, mantendo todas as outras constantes.

Tabela 3-1 – Efeito no Preço das Opções

Variável	Européia		Americana	
	Call	Put	Call	Put
Preço Corrente	+	-	+	-
Preço no Vencimento	-	+	-	+
Tempo para o Vencimento	?	?	+	+
Volatilidade	+	+	+	+
Taxa de Juros Livre de Risco	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

Black&Scholes (1973) desenvolveram uma solução analítica de precificação de uma call européia. Para isto, adotaram as seguintes premissas: o preço S da ação segue um processo de Wiener generalizado, não existem custos de transação, não há pagamento de dividendos, não há oportunidade para arbitragem, tempo contínuo e taxa livre de risco constante.

Partindo-se então da premissa que o preço S da ação segue o movimento geométrico browniano, descrito pela seguinte equação:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.14)$$

onde:

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$$

$$\varepsilon \approx N(0,1)$$

Seja f o preço de um derivativo dependente da ação básica S . É razoável supor que f seja função do preço da ação S e do tempo t . Genericamente, pode-se dizer que o preço de qualquer derivativo é uma função de suas variáveis estocásticas objeto e tempo. Portanto, no estudo de derivativos, é essencial compreender o comportamento das funções de variáveis estocásticas. Um resultado importante nessa área é o Lema de Itô.

Supondo que o valor de uma variável x siga o processo de Itô dado pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \quad (3.15)$$

Os parâmetros a e b são funções do valor da variável objeto x e do tempo t . São conhecidos como taxa de crescimento esperado instantâneo e taxa de variância instantânea.

Supondo que o valor de uma variável x siga o processo de Itô e considerando a existência de um derivativo G função de x e t , ou seja,

$$G = f(x, t)$$

O Lema de Itô define o processo seguido por G como:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right] dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (3.16)$$

Então, pelo Lema de Itô descrito acima, temos:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.17)$$

A parcela dz das duas equações é a mesma e compõe a parte estocástica do modelo. Montando uma carteira apropriada de ações e opções, podemos eliminar este componente. Seja π o valor desta carteira dado por:

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (3.18)$$

Dada uma variação $d\pi$ no valor da carteira com o tempo dt . Substituindo df e dS e considerando que pelo fato da equação não envolver o termo dz , esta carteira tem de possuir um retorno igual a taxa livre de risco r , a equação diferencial de Black&Scholes é dada por:

$$rf = \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + (r - q) \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (3.19)$$

A solução desta equação diferencial é dada por:

$$F = Se^{-\delta(T-t)} N(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.20)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - \delta + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

Para a correta utilização da fórmula desenvolvida por Black&Scholes, é necessário que o mercado seja suficientemente completo⁴ de forma a não permitir oportunidades de arbitragem⁵, já que a fórmula foi deduzida através da avaliação por arbitragem.

A aditividade dos valores das opções é trivial quando as mesmas são escritas sobre ativos distintos, porém, quando escritas sobre um único ativo, essa característica não é tão trivial assim. [14]

Geralmente, o exercício de uma opção altera o valor do seu ativo objeto, alterando assim o valor das opções subsequentes. Se duas opções são de tipos opostos, supõe-se que elas sejam otimamente exercíveis sobre circunstâncias opostas. Nesse caso, dado que as opções praticamente não se interagem, o valor da carteira seria aproximadamente igual a soma do valor individual de cada opção que a compõe.

Nesta dissertação, as opções a serem avaliadas serão do tipo européias. Duas opções européias que não interagem entre si seriam puramente aditivas se ambas tivessem o mesmo tempo de maturidade, pois a probabilidade de que ambas fossem exercidas simultaneamente seria nulo, ou seja, quando não existir interação entre as mesmas, os seus valores serão adicionados linearmente.

⁴ Um mercado se diz completo quando existem ativos suficientes para reproduzir a remuneração de um título derivativo, como por exemplo uma opção.

⁵ É um dos conceitos centrais da teoria de avaliação de ativos financeiros. Significa tomar posições simultâneas em diferentes ativos de tal forma que um deles garanta um retorno livre de risco, maior do que o retorno do ativo livre de risco do mercado.

3.3.1. Simulação de Monte Carlo para Avaliação de Opções Europeias

Os diferentes métodos numéricos que se propõem a avaliar opções são classificados tradicionalmente em três categorias: soluções numéricas para as equações diferenciais, árvore binomial (Cox, Ross e Rubinstein, 1979) e simulação de Monte Carlo. Dentre estes procedimentos, a simulação de Monte Carlo é usada para avaliar derivativos do tipo europeu, enquanto o método de árvores binomiais seria em geral apropriado para avaliar opções do tipo americano. Boyle (1977) introduziu o modelo de Simulação de Monte Carlo na avaliação de opções e parece a de mais fácil utilização quando se faz possível a sua implementação.

O método de Simulação de Monte Carlo foi apresentado na seção 3.2.1. como uma das abordagens propostas para o cálculo do VaR. Nesta seção este método será novamente discutido, tendo como objetivo a precificação de opções europeias.

A forma geral de precificação de opções através de Simulação de Monte Carlo pode ser dividida em 3 etapas, apresentadas a seguir. [11][15]

- Simulação do preço do ativo e outros parâmetros (variáveis de estado). Representa os parâmetros de input no processo de precificação e envolvem a geração de números aleatórios para cada variável de estado, geração das distribuições de probabilidades e construção dos caminhos de preços dos ativos;
- Determinação do *payoff* do ativo. Depende das características da opção que se pretende precificar;
- Precificação da opção através da média das simulações.

A Simulação de Monte Carlo é o modelo a ser escolhido quando uma ou mais das características a seguir estão presentes: Processos estocásticos mais complexos que o movimento geométrico browniano, opções dependentes de múltiplas variáveis de estado e processos estocásticos diversos e *payoffs*

dependentes da trajetória de preços do ativo. A flexibilidade da Simulação de Monte Carlo permite a utilização de qualquer processo estocástico.

Num título europeu, os *payoffs* independem das decisões do detentor ao longo da vida útil da opção. Assim, supondo a não existência de arbitragem, uma opção europeia só pode ser precificada com base no valor esperado de sua remuneração terminal. As etapas apresentadas anteriormente podem agora ser descritas como:

- Gerar um número aleatório Z_j e simular o preço do ativo objeto no instante T:

$$S_{T,j} = S_{0,j} e^{[(r-q-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j]} \quad (3.21)$$

- Calcular o *payoff* (f_T) da opção no vencimento para cada uma das trajetórias simuladas:

$$f_{T,j} = \max(S_{T,j} - X, 0) \text{ para uma opção de compra} \quad (3.22)$$

$$f_{T,j} = \max(X - S_{T,j}, 0) \text{ para uma opção de venda}$$

- Descontar cada um dos *payoffs* para o instante inicial usando a taxa livre de risco e calcular a média desses valores:

$$C \text{ ou } P = e^{-rT} \frac{\sum_{j=1}^M f_{T,j}}{M} \quad (3.23)$$

Se não for possível supor a não existência de oportunidades de arbitragem, o preço da opção ainda poderia ser avaliado através de Simulação de Monte Carlo, mas usando um taxa de desconto arbitrária. Neste caso, o mercado é incompleto e o valor da opção é uma aproximação do valor verdadeiro.

O erro na estimativa da precificação de opções pelo método de Simulação de Monte Carlo pode ser representado pelo desvio padrão da simulação dividido pela raiz quadrada do número de simulações. Quanto menor o desvio da simulação, maior a precisão dos resultados. Como o erro da estimativa é inversamente proporcional ao tamanho da amostra, melhores estimativas requerem maiores amostras e conseqüentemente um maior esforço computacional. O coeficiente de variação (3.24) é uma medida adimensional da precisão destas estimativas.

$$CV = \frac{SD(F_0)}{\hat{F}_0} \quad (3.24)$$

As estimativas feitas com Simulação de Monte Carlo não possuem um padrão bem definido de convergência para o valor verdadeiro. O erro das estimativas pode ser reduzido se o desvio padrão das estimativas puder ser reduzido de alguma forma. Existem várias técnicas para reduzir o erro, manipulando o desvio padrão (ou variância) das estimativas. Estas técnicas são conhecidas como técnicas de redução de variância. Frota [15] apresenta um apanhado geral destas técnicas aplicadas a problemas de avaliação de opções financeiras.

Até o final da década de oitenta, poucos trabalhos utilizaram Simulação de Monte Carlo para avaliar opções, já que métodos numéricos como árvore binomial mostravam-se superiores seja em precisão, seja em eficiência computacional. A Simulação de Monte Carlo voltou ao cenário de avaliação de opções quando foi proposto um modelo para avaliação de opções com volatilidade estocástica. Neste modelo, o preço do ativo e sua volatilidade são estocásticos, tornando a sua formulação analítica bastante complexa. Técnicas de redução de variância foram utilizadas e conduziram a resultados relativamente precisos. A década de noventa pode ser considerada como o período de consolidação da Simulação de Monte Carlo como ferramenta para avaliação de opções.

3.3.2. Teoria das Opções Aplicada ao Setor Elétrico Brasileiro

Nesta seção será feita uma revisão sobre os principais trabalhos relacionados à teoria de opções aplicadas ao Setor Elétrico Brasileiro. Ainda existem poucos trabalhos publicados, sendo a maioria deles relacionada a precificação de opções sobre ativos reais, como por exemplo, projetos de investimento em geração.

Castro [16] estudou o valor da flexibilidade operacional. Um ativo de geração, por exemplo uma termelétrica, pode ser avaliado considerando que sua operação em cada período ao longo de sua vida útil seja uma opção sobre a diferença entre dois ativos, a eletricidade e o combustível. A termelétrica somente irá operar se a diferença for positiva.

Para cada estágio de operação (t), o valor da decisão de operar é semelhante ao valor de uma opção de compra do tipo européia em t . O valor desta opção é dado pela seguinte equação:

$$F_0(S) = E_0[e^{-\rho t} \pi(S_t, C)] \quad (3.25)$$

onde:

$$\pi_t = (P_c - P_{spot})xG_c + \max(P_{spot} - CO, 0)xG_t \quad (3.26)$$

Como a decisão deve ser tomada ao longo da vida útil da empresa, o valor de um projeto que possui a opção de decidir em cada período, se suspende ou não a operação é dada pelo somatório do valor de cada uma dessas decisões ao longo de sua vida útil. Calculado o valor do projeto com flexibilidade operacional, o valor da opção de flexibilidade operacional pode ser encontrado comparando-se este valor a de uma termelétrica inflexível, com as mesmas características.

Gomes [17] estudou a dinâmica de investimentos em termelétricas utilizando um modelo de opções reais para determinar as estratégias de escolha do

melhor momento de construção. As opções de espera foram avaliadas considerando-se incerteza exógena na expansão da oferta, incerteza na demanda e incerteza endógena na expansão da oferta através de modelos de teoria dos jogos.

Mathias [18] propõe uma metodologia para avaliação de projetos de geração hidráulica sob condições de incerteza. A teoria de opções é utilizada para avaliar este ativo e estabelecer as condições ótimas para o investimento.

O problema de precificar um projeto de geração pode ser entendido como o de avaliar uma concessão ou contrato de risco. O dono da concessão tem por um período de tempo finito o direito de exploração e precisa conhecer o valor que pode obter através do exercício deste direito. A flexibilidade no gerenciamento de um projeto de geração de energia elétrica é representada pela opção de comprar fluxos de caixa futuros do empreendimento (ativo objeto) realizando um investimento (preço de exercício) se assim for conveniente. O investimento pode ser feito a qualquer momento até a data limite da concessão, caracterizando portanto, uma opção de compra americana.

Gomes [19] calcula o valor adicionado aos consumidores livres de energia elétrica por contratos flexíveis. As flexibilidades foram modeladas como opções de compra e venda e valoradas utilizando-se simulação dos preços mensais de energia. Foram apresentadas sensibilidades em relação ao tamanho das flexibilidades, aos preços contratados e as taxas de desconto ajustadas ao risco. Encontrou-se que o valor conjunto das opções de escolha da quantidade e de redução pode ultrapassar 15% do valor do contrato.