

## 6

## O Teorema de Composicionalidade de Coecke

### 6.1

#### Introdução ao Teorema

Neste capítulo apresentaremos o principal resultado desta dissertação: uma demonstração simplificada do teorema de Composicionalidade de Coecke. A apresentação e a demonstração original deste teorema são dadas em (5). A peça chave da nossa simplificação será a utilização da propriedade de universalidade do produto tensorial, o que nos permitirá considerar quaisquer estados como estados-produto, ou desemaranhados.

Como vimos no capítulo 2, submeter um estado  $|\Phi\rangle$  ( $n$ -partido, por exemplo) a uma medição, nada mais é do que medir uma grandeza observável do sistema que encontra-se neste estado. Tal grandeza é representada por um operador linear, digamos  $A$ , e o resultado da observação é sempre um dos autovalores de  $A$ , ou seja, informação clássica. Além disso, pelo Postulado IV, o estado do sistema após a medição é  $P_j|\phi\rangle$ , onde  $P_j$  é o projetor espectral de  $A$  associado ao autovalor  $a_j$  que foi observado.

Logo, processar a informação quântica agregada ao estado  $|\phi\rangle$  é submeter-lhe a uma sequência de observáveis  $A_1, \dots, A_m$  atuando em subprodutos tensoriais nos quais são não degenerados (as projeções espectrais têm posto 1). A cada passo recebemos certa informação clássica: o autovalor medido. O estado final é então dado por:

$$|\psi\rangle = P_m P_{m-1} \dots P_1 |\phi\rangle, \quad (6-1)$$

onde cada  $P_i$  é a projeção espectral dada pelo autovetor associado ao autovalor em questão. Assumimos também para os estados quânticos do nosso interesse que a evolução unitária no tempo é trivial, ou seja  $U = I$ .

Neste trabalho consideraremos a versão mais simples do teorema, onde todas as observações são bipartidas. Isso significa que as projeções sempre agirão sobre o produto tensorial de dois espaços de Hilbert ( $\mathcal{H}_a$  e  $\mathcal{H}_b$ ) dos  $n$  que formam o espaço de estados composto ( $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_a \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_b \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ ).

De fundamental importância para a apresentação do teorema será a

construção de certos diagramas, a qual iniciaremos a seguir.

Cada espaço de Hilbert que compõe o espaço de estados  $n$ -partidos será representado por uma linha vertical, cuja orientação temporal é dada de baixo para cima, como no diagrama (6.1):

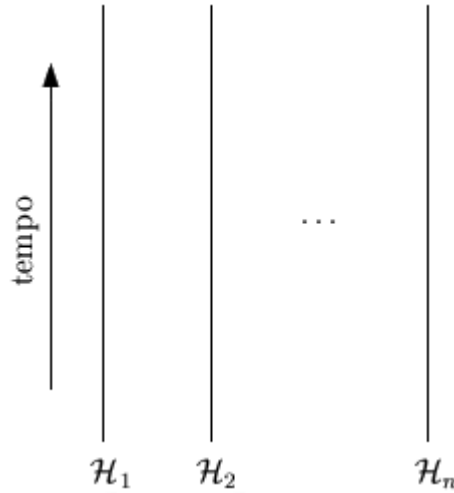


Figura 6.1

Como queremos tratar do processamento de informação quântica, devemos também representar neste diagrama as diversas projeções bipartidas que são aplicadas ao estado inicial. Assim, se uma projeção  $P_i$  age sobre  $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ , então desenharemos um retângulo que cruze as linhas associadas a  $\mathcal{H}_a$  e  $\mathcal{H}_b$ , e mais nenhuma outra, como no diagrama (6.2):

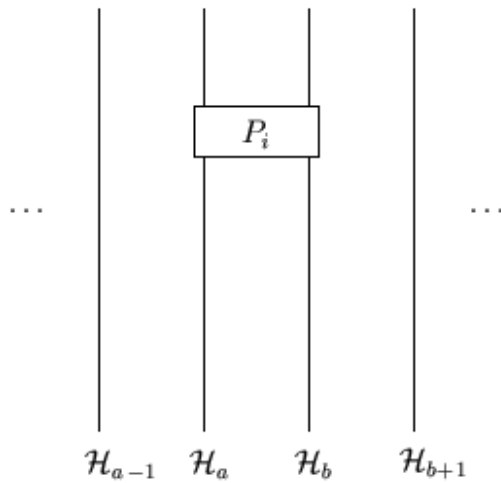


Figura 6.2

Ao considerarmos então quatro projeções,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (onde o índice de cada uma representa a ordem temporal em que elas devem ser aplicadas ao estado), um possível diagrama é o dado pela figura (6.3):

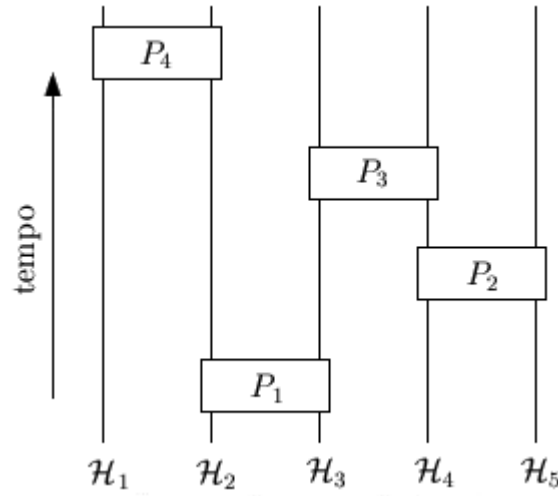


Figura 6.3

Observemos, no entanto, que este não é o único diagrama que podemos construir para representar a aplicação das quatro projeções. Por exemplo,  $P_1$  age sobre estados pertencentes a  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ , enquanto  $P_2$ , sobre  $\mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{H}_5$ . Como não há espaços de Hilbert em comum, podemos afirmar que o estado obtido através da sequência  $P_4 P_3 P_2 P_1 |\phi\rangle$  é o mesmo estado resultante de  $P_4 P_3 P_1 P_2 |\phi\rangle$ . Mais geralmente, quaisquer operadores que não possuam espaços de Hilbert em comum nos subprodutos sobre os quais atuam podem comutar, sem que isto interfira no estado final. Assim, o diagrama (6.4) também é possível:

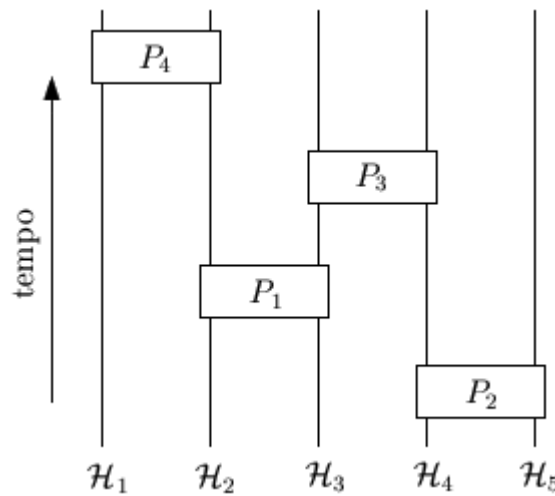


Figura 6.4

E então é fácil ver que o diagrama (6.5), por exemplo, é proibido:

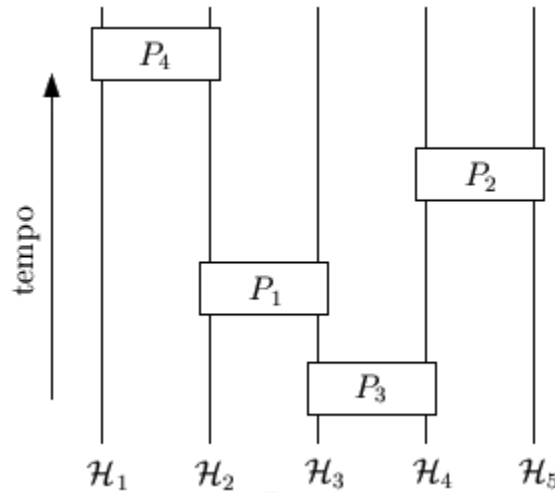


Figura 6.5

já que fizemos duas trocas de projeções que não comutam:  $P_1$  com  $P_3$  e  $P_3$  com  $P_2$ . Para o exemplo dado pela figura (6.3), qualquer ordem de aplicação dos operadores deve então respeitar a duas regras:

- $P_4$  e  $P_3$  devem vir sempre depois de  $P_1$ ;
- $P_3$  deve vir sempre depois de  $P_2$ .

Obviamente, de acordo com a ordem adotada, os instantes de tempo em que obteremos a informação clássica proveniente de cada medição serão alterados. Entretanto, como veremos, isto não altera o resultado do teorema de composicionalidade.

Antes de avançarmos em nosso estudo, vamos destacar os conceitos que já apresentamos nesta seção:

**Definição (diagramas):** O espaço de estados  $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$  associado a um sistema quântico composto é representado por um diagrama que consiste de  $n$  linhas verticais, onde cada uma delas representa um dos  $n$  espaços de Hilbert em questão. A ordem temporal de evolução de estados no diagrama é dada de baixo para cima.

**Definição (caixas de projeção):** As projeções bipartidas associadas aos autovalores obtidos através de medições de grandezas observáveis de um sistema quântico composto são representadas por retângulos que cruzam duas verticais (contíguas nos nossos exemplos) nos diagramas descritos acima. Inicialmente, deve-se dispor as caixas respeitando-se a ordem temporal em que as medições acontecem, mas é também permitido movê-las para cima ou para baixo, desde que aquelas que compartilhem uma mesma linha não passem

umas pelas outras.

O enunciado do teorema de Coecke para o exemplo simples dado pela figura (6.3) (ou pela figura (6.4), pois já vimos que as duas representam essencialmente o mesmo processo) é o seguinte:

Seja

$$|\phi_1^{in}\rangle \otimes |\phi_{2345}^{in}\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4 \otimes \mathcal{H}_5)$$

o estado inicial (ou seja, tal que a parte correspondente a  $\mathcal{H}_1$  é desemaranhada do resto). Então, após a aplicação das projeções  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (seguindo alguma ordem que não desrespeite as restrições citadas anteriormente), o estado final é da forma

$$|\phi_{1234}^{out}\rangle \otimes |\phi_5^{out}\rangle \in (\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_4) \otimes \mathcal{H}_5 ,$$

(ou seja, tal que a parte correspondente a  $\mathcal{H}_5$  é desemaranhada do resto) onde

$$|\phi_5^{out}\rangle = F_2 \circ F_3 \circ F_1 \circ F_4 |\phi_1^{in}\rangle . \quad (6-2)$$

Devemos então definir tais funções  $F_i$ . Seja  $|\Omega_i\rangle$  o vetor que define a projeção  $P_i = |\Omega_i\rangle\langle\Omega_i|$ . Como esta é uma projeção bipartida, vamos tomar  $|\Omega_i\rangle = \alpha \otimes \beta \in \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ , onde  $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$  é o subproduto sobre o qual  $P_i$  atua. Assim, a função (antilinear)  $F_i$  é dada por universalidade assim:

$$\begin{aligned} F_i &: \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\beta \\ |\phi\rangle &\mapsto \langle\phi|\alpha\rangle|\beta\rangle , \end{aligned} \quad (6-3)$$

a qual depende linearmente de  $\Omega_i$ .

É importante também que se note a não-trivialidade deste teorema. A ordem das funções  $F_i$  dada em (6-2) não é uma mera arrumação de funções que comutam. Como vimos,  $F_3$  e  $F_2$ , por exemplo, não podem ser trocadas de lugar. Além disso, pensando num fluxo de informação quântica que viaje no tempo e vai sendo alterado por cada operador aplicado, a eq. (6-2) parece nos dizer que a informação viaja de volta no tempo, já que  $F_2$  vem depois de  $F_3$  e,  $F_1$ , depois de  $F_4$ . O modo como esta ordem foi obtida é o assunto da próxima seção.

## 6.2

### Enunciando o Teorema em Qualquer Arranjo de Projeções

Vamos agora estabelecer um conjunto de regras para a construção de caminhos orientados nos diagramas que descrevemos na seção anterior.

**Definição (caminhos):** Um conjunto de segmentos de reta orientados sobre diagramas que possuem caixas de projeção é dito um caminho se respeitar o seguinte:

- os caminhos começam na parte de baixo do diagrama, orientados para cima;
- suas trajetórias são sempre sobre as verticais ou sobre as caixas do diagrama;
- sempre que encontrarem uma caixa de projeção, devem usá-la para passar à outra vertical que a cruza, e daí orientar o percurso no sentido contrário àquele antes do encontro;
- os caminhos terminam quando percorrem uma vertical num sentido tal que não haverá mais nenhum encontro com caixas.

A escolha da primeira linha a ser percorrida é dada pelo índice da parte desemaranhada do estado inicial, e o começo do trajeto é sempre por baixo. Assim, depois de passar pelas caixas, o índice do espaço de Hilbert associado à vertical na qual o caminho termina (por onde ele sai do diagrama) é o mesmo da parte desemaranhada do estado final.

Voltando então ao exemplo da figura (6.3), a hipótese que o teorema apresenta é de que o estado inicial é da forma  $|\phi_1^{in}\rangle \otimes |\phi_{2345}^{in}\rangle$ . Logo, nossa trajetória deve começar por  $\mathcal{H}_1$ . Vamos marcar este caminho no diagrama (6.6):

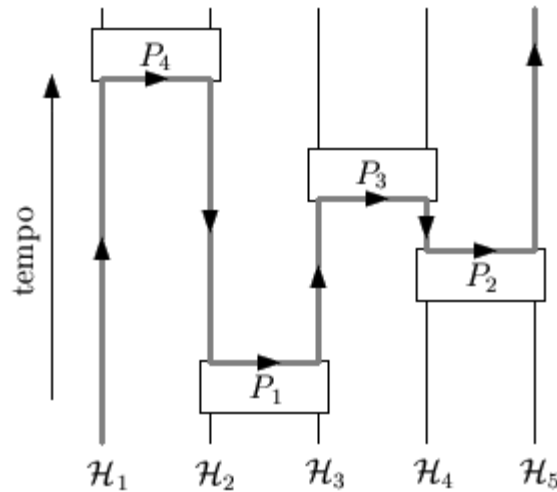


Figura 6.6

A partir deste novo gráfico podemos verificar que o índice da parte desemaranhada do estado final  $|\phi_5^{out}\rangle$  é o mesmo da vertical de saída,  $\mathcal{H}_5$ .

Uma observação mais atenta nos faz perceber que a ordem das funções sugerida pelo Teorema de Coecke nada mais é do que a ordem pela qual nosso caminho atravessa as caixas numeradas do diagrama. Daqui também vê-se claramente que, de fato, as figuras (6.3) e (6.4) representam o mesmo exemplo, já que seus respectivos caminhos encontram as caixas de projeção exatamente na mesma ordem, o que não faz com que a conclusão do teorema (que diz respeito à ordem em que devem ser aplicadas as funções para obtermos a parte livre do estado final) seja então alterada. Logo, obteremos sempre o mesmo resultado desde que consideremos diagramas que respeitem as regras que enumeramos.

Segue agora o enunciado do teorema que queremos demonstrar:

**Teorema de Composicionalidade de Coecke:** Dados um diagrama e um caminho, sejam  $i = 1$  o índice da vertical por onde este começa, e  $i = n$  o da vertical por onde ele termina. Se as caixas de projeção  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , são numeradas de acordo com a ordem em que o caminho as atravessa, e se o estado inicial é da forma

$$|\psi_1^{in}\rangle \otimes |\psi_{2\dots n}^{in}\rangle$$

(ou seja, tal que a parte correspondente à vertical  $i = 1$  é desemaranhada do resto) então o estado final (obtido com a aplicação das projeções representadas no diagrama) é dado por

$$|\psi_{1\dots n-1}^{out}\rangle \otimes |\psi_n^{out}\rangle,$$

(ou seja, tal que a parte correspondente à vertical  $i = n$  é desemaranhada do resto), onde

$$|\psi_n^{out}\rangle = F_m F_{m-1} \dots F_1 |\psi_1^{in}\rangle.$$

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema, vamos apresentar um exemplo relevante. Seja  $|\phi_1^{in}\rangle \otimes |\phi_{23}^{in}\rangle$  o estado inicial. Se o diagrama considerado for o (6.7),

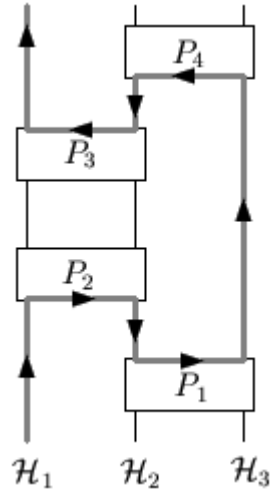


Figura 6.7

então o estado final é da forma  $|\phi_1^{out}\rangle \otimes |\phi_{23}^{out}\rangle$ , onde

$$|\phi_1^{out}\rangle = F_3^{op} \circ F_4^{op} \circ F_1 \circ F_2 |\phi_1^{in}\rangle, \quad (6-4)$$

e  $F^{op}$  é definida a seguir.

Como  $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$  é isomorfo a  $\mathcal{H}_\beta \otimes \mathcal{H}_\alpha$ , garantimos a existência de funções que vão na direção oposta a de  $F_i$ . Assim como na definição (6-3), tomaremos o vetor  $|\Omega_i\rangle = \alpha \otimes \beta \in \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$  como aquele que define a projeção bipartida  $P_i$ . Logo, podemos escrever estas novas funções citadas na conclusão do teorema como:

$$F_i^{op} : \mathcal{H}_\beta \rightarrow \mathcal{H}_\alpha$$

$$|\phi\rangle \mapsto \langle \phi | \beta \rangle |\alpha\rangle.$$

Estas devem ser utilizadas sempre que os caminhos atravessam as caixas no sentido contrário ao usual, ou seja, da direita para a esquerda.

### 6.3

#### A Demonstração para um Caso Simples

Nesta seção provaremos o teorema de Coecke para um caso simples, onde o espaço de estados será o produto tensorial entre apenas três espaços de Hilbert. Este exemplo será importante para que nos familiarizemos com o argumento que utilizaremos na próxima seção, onde é dada a demonstração para o caso geral, isto é, para estados  $n$ -partidos.

Em (5) e (6), Coecke afirma que a conclusão de seu teorema (ou seja, a descrição da parte livre do estado final) é sempre dada por funções



antilineares,  $F_i$  e  $F_i^{op}$ . Entretanto, vamos mostrar que existem funções lineares que descrevem exatamente os mesmos estados.

Utilizando a propriedade da universalidade do produto tensorial, dado um estado produto da forma  $|\Omega\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \in \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ , podemos definir de maneira única duas aplicações lineares através do seguinte:

$$\begin{aligned} g_\Omega &: \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\beta^* \\ |\phi\rangle &\mapsto \langle\alpha|\phi\rangle\langle\beta| \\ f_\Omega &: \mathcal{H}_\alpha^* \rightarrow \mathcal{H}_\beta \\ \langle\phi| &\mapsto \langle\phi|\alpha\rangle|\beta\rangle, \end{aligned} \tag{6-5}$$

onde  $*$  significa que estamos considerando o espaço dual, dos bras.

Para o teorema a ser demonstrado, podemos usar tanto a função definida em (6-3), como as funções definidas em (6-5), e isto segue do seguinte fato: ao tomarmos  $|\Lambda\rangle = |\beta'\rangle \otimes |\gamma\rangle \in \mathcal{H}_\beta \otimes \mathcal{H}_\gamma$ , teremos

$$\begin{aligned} (f_\Lambda \circ g_\Omega)|\phi\rangle &= f_\Lambda(\langle\alpha|\phi\rangle\langle\beta|) \\ &= \langle\alpha|\phi\rangle\langle\beta|\beta'\rangle|\gamma\rangle \\ &= F_\Lambda(\langle\phi|\alpha\rangle|\beta\rangle) \\ &= (F_\Lambda \circ F_\Omega)|\phi\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$f_\Lambda \circ g_\Omega = F_\Lambda \circ F_\Omega. \tag{6-6}$$

Assim, utilizando (6-6) podemos, por exemplo, reescrever (6-2) como:

$$\begin{aligned} |\phi_5^{out}\rangle &= F_2 \circ F_3 \circ F_1 \circ F_4 |\phi_1^{in}\rangle \\ &= f_2 \circ g_3 \circ f_1 \circ g_4 |\phi_1^{in}\rangle. \end{aligned}$$

Além disso, assim como  $F_i^{op}$ , também podemos definir funções  $f^{op}$  e  $g^{op}$  que vão na direção oposta a  $f_i$  e  $g_i$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} g_\Omega^{op} &: \mathcal{H}_\beta \rightarrow \mathcal{H}_\alpha^* \\ |\phi\rangle &\mapsto \langle\beta|\phi\rangle\langle\alpha|, \\ f_\Omega^{op} &: \mathcal{H}_\beta^* \rightarrow \mathcal{H}_\alpha \\ \langle\phi| &\mapsto \langle\phi|\beta\rangle|\alpha\rangle. \end{aligned}$$

E daí é fácil concluir que (6-4) será escrita a partir de agora como

$$|\phi_1^{out}\rangle = f_3^{op} \circ g_4^{op} \circ f_1 \circ g_2 |\phi_1^{in}\rangle ,$$

ou seja, novamente o índice *op* caracteriza as funções que devem ser utilizadas na descrição do estado final caso o caminho passe pelas caixas da direita para a esquerda.

Um outro ponto importante a ser considerado antes que iniciemos a demonstração é o seguinte: além de projeções, um sistema quântico pode também sofrer a ação de operadores unitários, como vimos no capítulo 2, na seção sobre evolução de sistemas quânticos isolados. Tais operadores são frequentemente unipartidos, e sua representação será dada como no diagrama (6.8):

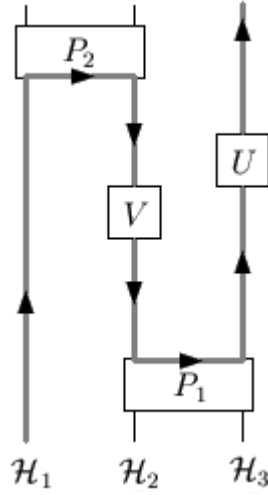


Figura 6.8

Ou seja, os caminhos atravessam  $U$  e  $V$  como se eles não estivessem ali. O enunciado do teorema de Coecke para este exemplo é o seguinte: se o estado inicial é da forma  $|\phi_1^{in}\rangle \otimes |\phi_{23}^{in}\rangle$ , então o estado final é  $|\phi_3^{out}\rangle \otimes |\phi_{12}^{out}\rangle$ , onde

$$|\phi_3^{out}\rangle = U \circ f_1 \circ V^\dagger \circ g_2 |\phi_1^{in}\rangle \quad (6-7)$$

Introduziremos a seguir uma ferramenta que nos permitirá desconsiderar a ação destes operadores no estado final.

No início deste capítulo, afirmamos que nossa demonstração é mais simples do que aquela dada pelo próprio Coecke em (5), devido à utilização da universalidade do produto tensorial. Entretanto, temos um problema no fato de que os operadores  $P_i = |\Omega_i\rangle\langle\Omega_i|$  dependem quadraticamente de  $|\Omega_i\rangle$ , já que a universalidade só se aplica se a dependência for linear. Assim, passamos

então a considerar no lugar das projeções, operadores gerais de posto 1:

$$Q_{\Lambda, \Omega} = (\Omega, \cdot) \Lambda = |\Lambda\rangle\langle\Omega|$$

Sabemos que se  $|\Lambda\rangle$  e  $|\Omega\rangle$  forem vetores normalizados, então um operador deste tipo pode ser escrito como  $U|\Omega\rangle\langle\Omega|$  ou  $|\Lambda\rangle\langle\Lambda|V$ , onde  $U$  e  $V$  são unitários. Logo, aplicar operadores gerais de posto 1 a um sistema nada mais é do que intercalar operadores unitários entre as projeções. Ou seja, se provarmos o teorema de composicionalidade utilizando operadores  $Q_{\Lambda, \Omega}$ , teremos automaticamente uma demonstração para o caso em que unitários aparecem explicitamente no estado final, como em (6-7). É esta então a trilha que iremos adotar.

Com estes novos operadores, o processamento de informação descrito pela eq.(6-1) é escrito como:

$$|\psi\rangle = Q_m Q_{m-1} \dots Q_1 |\phi\rangle, \quad (6-8)$$

onde  $Q_i = Q_{\Lambda_i, \Omega_i} = |\Lambda_i\rangle\langle\Omega_i|$ .

Agora, utilizando a definição de produto interno parcial dada no capítulo 3, escrevemos a ação do operador bipartido  $Q_{\Lambda, \Omega}$  (que age em, digamos,  $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ ) sobre o estado  $|\phi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \in \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$  como:

$$\begin{aligned} Q_{\Lambda, \Omega} |\phi\rangle &= |\Lambda\rangle\langle\Omega| \phi\rangle \\ &= |\Lambda\rangle\langle\Omega| \alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \\ &= \Lambda \otimes (\Omega, \alpha) \beta \\ &= \Lambda \otimes \Omega \rfloor \phi. \end{aligned}$$

E assim, (6-8) transforma-se em:

$$|\psi\rangle = \Lambda_m \otimes \Omega_m \rfloor \Lambda_{m-1} \otimes \Omega_{m-1} \rfloor \dots \Lambda_2 \otimes \Omega_2 \rfloor \Lambda_1 \otimes \Omega_1 \rfloor \phi$$

Desta última equação vemos claramente que o estado final,  $|\psi\rangle$ , depende linearmente de  $|\phi\rangle$  e de cada  $|\Lambda_j\rangle$ , e antilinearmente de cada  $|\Omega_j\rangle$ , o que nos permite então evocar a universalidade do produto tensorial, e tomar todos os vetores ( $|\phi\rangle, |\Lambda_j\rangle$  e  $|\Omega_j\rangle$ ) como sendo vetores-produto.

Na seção anterior, definimos que as projeções eram representadas por caixas. Levando em consideração que

$$Q_{\Lambda, \Omega} = \Lambda \otimes \Omega \rfloor \cdot, \quad (6-9)$$

representaremos os operadores  $Q$  também por caixas, mas partidas ao meio:  $\Lambda$  ficará em cima e  $\Omega$  ficará embaixo, como representado na figura (6.9) a seguir.

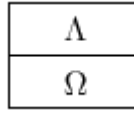


Figura 6.9

Iniciaremos agora a demonstração do teorema de Coecke para um exemplo simples. Consideraremos o seguinte processo:

$$|\psi\rangle = Q_3 Q_2 Q_1 |\phi\rangle.$$

Com (6-9), escrevemos  $|\psi\rangle$  como:

$$|\psi\rangle = \Lambda_3 \otimes \Omega_3 \rfloor \Lambda_2 \otimes \Omega_2 \rfloor \Lambda_1 \otimes \Omega_1 \rfloor \phi. \quad (6-10)$$

Um diagrama que pode representar este caso é o (6.10):

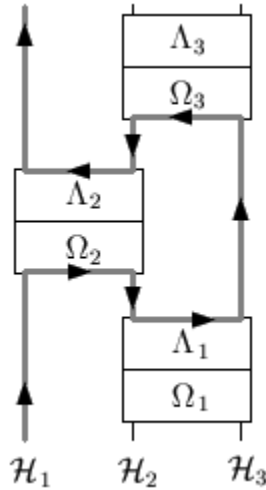


Figura 6.10

Como já vimos que a universalidade pode ser utilizada, vamos tomar todos os vetores como sendo desemaranhados:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle, \\ |\Lambda_j\rangle &= |\mu_j\rangle \otimes |\nu_j\rangle, \\ |\Omega_j\rangle &= |\sigma_j\rangle \otimes |\tau_j\rangle. \end{aligned}$$

Assim, o diagrama (6.10) pode ser reconstruído, originando o diagrama (6.11):

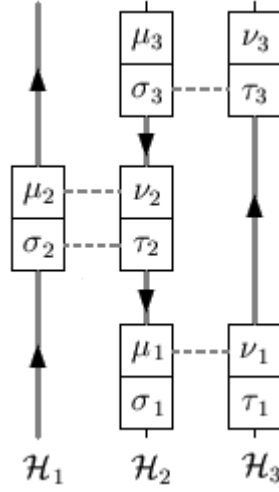


Figura 6.11

Com esta última figura, é bastante claro que o que temos na verdade são três processos independentes, já que todos os operadores são unipartidos. Ou seja, já que tomamos como estado inicial um estado produto, o estado final também é desemaranhado. Além disso, como cada um destes operadores é da forma  $(\sigma_j, \cdot)\mu_j$  ou  $(\tau_j, \cdot)\nu_j$ , podemos escrever o estado resultante como:

$$\psi = (\sigma_2, \phi_1)\mu_2 \otimes (\sigma_1, \phi_2)(\tau_2, \mu_1)(\sigma_3, \nu_2)\mu_3 \otimes (\tau_1, \phi_3)(\tau_3, \nu_1)\nu_3 \quad (6-11)$$

Entretanto, todos estes produtos internos nada mais são do que números complexos. Podemos então rearrumar a equação anterior e escrever  $\psi$  como:

$$\psi = (\sigma_2, \phi_1)(\tau_2, \mu_1)(\tau_3, \nu_1)(\sigma_3, \nu_2)\mu_2 \otimes \mu_3 \otimes \nu_3(\sigma_1, \phi_2)(\tau_1, \phi_3) \quad (6-12)$$

Observemos que os produtos alocados no primeiro fator não foram escolhidos arbitrariamente: eles são aqueles provenientes dos segmentos verticais do caminho que indicamos no diagrama (6.10).

A última expressão que obtivemos para o estado final deste processo, (6-12), pode também ser escrita em termos das funções  $f_i$  e  $g_i$  que definimos no início desta sessão:

$$\psi = f_{\Lambda_2}^{op} \circ g_{\Omega_3}^{op} \circ f_{\Lambda_1} \circ g_{\Omega_2}(\phi_1) \otimes (\Lambda_3 \otimes \Omega_1] \phi_{23} \ , \quad (6-13)$$

onde  $\phi_{23} = \phi_2 \otimes \phi_3$ .

De fato, a primeira parte de (6-12) é:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_2, \phi_1)(\tau_2, \mu_1)(\tau_3, \nu_1)(\sigma_3, \nu_2)\mu_2 &= \langle \sigma_2 | \phi_1 \rangle \langle \tau_2 | \mu_1 \rangle \langle \tau_3 | \nu_1 \rangle \langle \sigma_3 | \nu_2 \rangle | \mu_2 \rangle \\
 &= f_{\Lambda_2}^{op}(\langle \sigma_2 | \phi_1 \rangle \langle \tau_2 | \mu_1 \rangle \langle \tau_3 | \nu_1 \rangle \langle \sigma_3 |) \\
 &= f_{\Lambda_2}^{op} \circ g_{\Omega_3}^{op}(\langle \sigma_2 | \phi_1 \rangle \langle \tau_2 | \mu_1 \rangle | \nu_1 \rangle) \\
 &= f_{\Lambda_2}^{op} \circ g_{\Omega_3}^{op} \circ f_{\Lambda_1}(\langle \sigma_2 | \phi_1 \rangle \langle \tau_2 |) \\
 &= f_{\Lambda_2}^{op} \circ g_{\Omega_3}^{op} \circ f_{\Lambda_1} \circ g_{\Omega_2} | \phi_1 \rangle ,
 \end{aligned}$$

e o restante,

$$\begin{aligned}
 \mu_3 \otimes \nu_3(\sigma_1, \phi_2)(\tau_1, \phi_3) &= \mu_3 \otimes \nu_3(\sigma_1 \otimes \tau_1, \phi_2 \otimes \phi_3) \\
 &= \Lambda_3(\Omega_1, \phi_{23}) \\
 &= \Lambda_3 \otimes \Omega_1 | \phi_{23} .
 \end{aligned}$$

Ou seja, o estado final  $|\psi\rangle$  é de fato dado por (6-13) se os estados  $|\phi_{23}\rangle$ ,  $|\Lambda_j\rangle$  e  $|\Omega_j\rangle$  forem desemaranhados (já que foi esta a hipótese utilizada para chegarmos a esta expressão). Entretanto, o lado direito de eq.(6-13) não deixa de fazer sentido se os estados  $|\Lambda_j\rangle$  e  $|\Omega_j\rangle$  forem emaranhados, e depende deles linear ou antilinearmente. Portanto, utilizando novamente a universalidade, garantimos que as expressões (6-10) e (6-13) são sempre iguais, e então definem exatamente o mesmo vetor,  $|\psi\rangle$ . Assim está completa a demonstração para este exemplo simples, já que a ordem das funções que devem ser aplicadas a  $|\phi_1\rangle$  (dada pela primeira parte de (6-13)) para que obtenhamos o estado final é exatamente aquela pela qual o caminho atravessa as caixas, como enunciado pelo teorema de composicionalidade.

Na próxima seção, vamos incrementar o argumento que foi apresentado, a fim de obtermos finalmente a demonstração do teorema de Coecke para o caso de sistemas quânticos associados a espaços de estados  $n$ -partidos.

## 6.4

### Demonstração para o Caso Geral

Na demonstração do caso particular dada anteriormente, utilizamos operadores  $Q_{\Lambda, \Omega}$  que agem sobre estados multipartidos  $|\phi\rangle$  e produzem estados da forma  $\Lambda \otimes (\Omega | \phi)$ , que nada mais são do que estados compostos de dois fatores desemaranhados: um estado  $\Lambda$ , que pertence ao estado formado pelo subproduto tensorial bipartido no qual  $Q_{\Lambda, \Omega}$  atua, e  $(\Omega | \phi)$ , pertencente ao subproduto complementar.

Entretanto, queremos agora provar o teorema para diagramas de tamanho arbitrário, isto é, com  $n$  verticais para representar espaços de Hilbert.

Para isso, a peça fundamental será descrever um outro procedimento físico (diferente de  $Q$ ) que produza os mesmos estados  $\Lambda \otimes (\Omega|\phi)$ .

O primeiro passo é aplicar ao estado  $|\phi\rangle$  a projeção  $P = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ . Como vimos no capítulo 2, com certa probabilidade obtemos como resultado o estado  $|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi\rangle$  ou, utilizando a notação matemática,  $\Omega \otimes (\Omega|\phi)$ . Assim como na aplicação de  $Q_{\Lambda,\Omega}$ ,  $\Omega$  e  $(\Omega|\phi)$  são independentes, pertencentes a espaços diferentes: o primeiro ao subproduto no qual  $P$  atua, o segundo ao espaço complementar.

O próximo passo é aplicar algum procedimento que atue somente no subproduto mencionado, e que tenha como resultado a destruição de  $\Omega$ , sem portanto alterar o estado  $(\Omega|\phi)$ . Daí, para que finalmente obtenhamos o estado  $\Lambda \otimes (\Omega|\phi)$ , basta que apliquemos um novo processo independente (ou seja, que não perturba  $\Omega|\phi$ ): a preparação do estado  $\Lambda$ . Dessa forma, podemos de fato afirmar que o sistema encontra-se no estado desejado.

Como a ação de  $Q_{\Lambda,\Omega}$  é agora descrita por processos independentes, vamos representar este operador no diagrama por retângulos com duas partes separadas, como na figura (6.12):

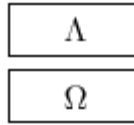


Figura 6.12

Voltando ao exemplo representado pela figura (6.10), podemos utilizar a figura (6.12) para redesenhá-lo como no diagrama (6.13):

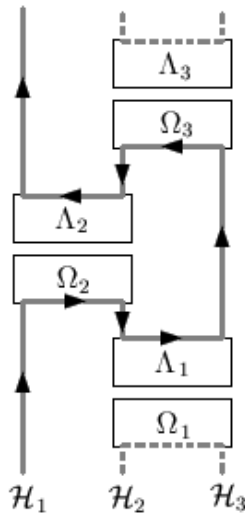


Figura 6.13

É importante notar que o diagrama foi quebrado em peças desconexas. Em particular, cada uma delas representa um termo da eq.(6-12): o processador de estados que atua no primeiro espaço de Hilbert que compõe o produto tensorial completo (indicado pelas setas), a operação  $(\Omega_1] \cdot)$  (indicada pelo caminho tracejado inferior) e a operação  $(\Lambda_3 \otimes \cdot)$  (indicada pelo caminho tracejado superior).

Considerando um diagrama geral, com  $n$  verticais, ao utilizarmos estas caixas partidas, obviamente vamos quebrá-lo em partes desconexas. Entretanto, a que mais vai nos interessar é aquela que o caminho sugerido pelo teorema de composicionalidade percorre completamente. Começando por baixo, o trajeto segue alternadamente por partes  $\Omega$  e  $\Lambda$ , até chegar ao topo do diagrama. Isto nos sugere usar a partir de agora a seguinte notação: em vez de numerarmos os dois componentes de cada caixa utilizando a ordem temporal em que os operadores são aplicados, os índices serão dados somente às partes que são realmente atravessadas pelo caminho, e na ordem em que isto acontece.

Além disso, também adotaremos como convenção o seguinte:

$$\begin{aligned} \Omega_j &\in \mathcal{H}_{\alpha(j)} \otimes \mathcal{H}_{\alpha'(j)} \\ \text{e } \Lambda_j &\in \mathcal{H}_{\beta(j)} \otimes \mathcal{H}_{\beta'(j)}, \end{aligned}$$

onde a ordem dos índices  $j = 1, \dots, k$  é exatamente a ordem em que o caminho passa pela caixa em questão.

Sabemos que as únicas verticais que atravessam apenas uma caixa  $Q$  são a primeira e a última do diagrama. Ou seja, em todas as outras, se o caminho entra depois de ter atravessado uma componente  $\Omega_j$ , obrigatoriamente terá que descer e entrar em uma  $\Lambda_j$ . Analogamente, se passa a percorrer uma vertical depois de atravessar uma componente  $\Lambda_j$ , vai subir por esta linha e entrar em uma  $\Omega_j$ . Logo, vemos claramente que  $\beta(j) = \alpha'(j)$  se o caminho é orientado para baixo, e  $\beta'(j) = \alpha(j+1)$  se for para cima.

O diagrama (6.14) ajuda a fixar estas idéias:



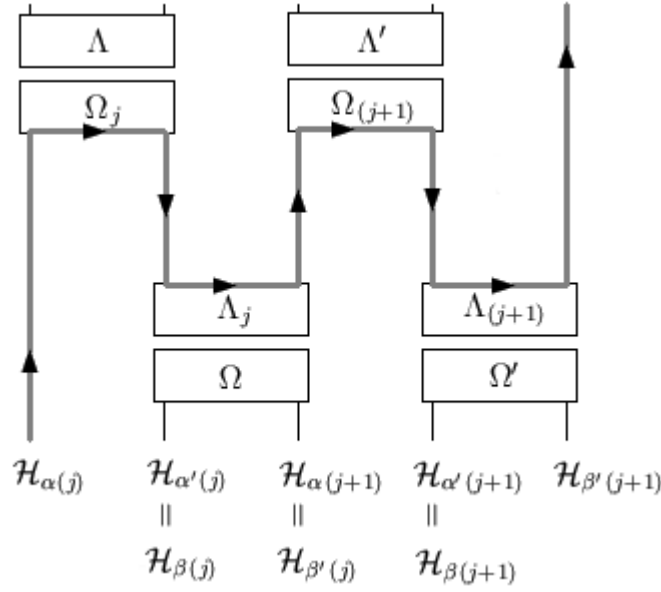


Figura 6.14

As componentes que não receberam índices poderão ser ou não atravessadas pelo caminho, com índices diferentes daqueles indicados. A ordem temporal neste diagrama só é fiel em relação a duas caixas sucessivas.

A partir de agora, a demonstração em muito se aproximará daquela dada na seção anterior. Já vimos que a utilização dos operadores  $Q_{\Lambda, \Omega}$  nos permite evocar a universalidade do produto tensorial para tomar todos os estados  $\Omega_j$  e  $\Lambda_j$  desembaranhados. Sejam então:

$$\begin{aligned} \Omega_j &= \omega_j \otimes \tilde{\omega}_j \\ \text{e } \Lambda_j &= \lambda_j \otimes \tilde{\lambda}_j. \end{aligned}$$

Além disso, como pedido no enunciado do teorema, vamos tomar o estado inicial  $|\phi\rangle$  na seguinte forma:

$$\phi = \varphi \otimes \varphi',$$

onde  $\varphi \in \mathcal{H}_{\alpha(1)}$  e  $\varphi'$  pertence ao subproduto complementar. Vale lembrar que  $\mathcal{H}_{\alpha(1)}$  é representado pela vertical por onde o caminho começa.

Sabemos que o estado final é aquele obtido após a aplicação de todos os operadores  $Q_{\Lambda, \Omega}$  representados no diagrama, os quais agem sobre diferentes subprodutos do espaço de estados completo. Pelo diagrama (6.14), é fácil ver que todos os fatores deste estado final que estão associados a um espaço  $\mathcal{H}_{\beta(j)}$  serão multiplicados pelo escalar  $(\tilde{\omega}_j, \lambda_j)$ , correspondente ao segmento do caminho orientado para baixo. Já os fatores associados a um espaço  $\mathcal{H}_{\beta'(j)}$

(desde que este não seja representado pela última vertical do diagrama) são multiplicados por um escalar  $(\omega_{j+1}, \tilde{\lambda}_j)$ , correspondente ao segmento orientado para cima. Falta então apenas tratar da primeira e última verticais. A primeira, associada ao espaço  $\mathcal{H}_{\alpha(1)}$ , é a linha vertical por onde iniciamos o caminho. Neste caso, o fator escalar é  $(\omega_1, \varphi)$ . Já para a última vertical (por onde saímos do diagrama), o que temos é um fator tensorial  $\tilde{\lambda}_k$ , o qual é completamente independente de todas as outras partes do estado final  $|\psi\rangle$  que construímos até agora. Ou seja, podemos escrever:

$$\psi = \tilde{\lambda}_k \otimes \hat{\psi} \quad (6-14)$$

Já que todos os escalares citados podem ser movidos livremente entre os fatores tensoriais, vamos arrumar a expressão obtida para  $|\psi\rangle$  de modo que eles passem todos a multiplicar a parte  $\tilde{\lambda}_k$ . Ou seja, se  $M$  é o produto de todos os escalares, então reescrevemos (6-14) como:

$$\psi = (M\tilde{\lambda}_k) \otimes \tilde{\psi} ,$$

onde  $M = (\omega_1, \phi)(\tilde{\omega}_1, \lambda_1)(\omega_2, \tilde{\lambda}_1) \dots (\tilde{\omega}_{k-1}, \lambda_{k-1})(\omega_k, \tilde{\lambda}_k)$ .

Como feito na seção 6.3, é simples verificar que:

$$M\tilde{\lambda}_k = f_{\Lambda_k} \circ g_{\Omega_k} \circ \dots \circ f_{\Lambda_1} \circ g_{\Omega_1}(\varphi) \quad (6-15)$$

Além disso, agora é bastante óbvio que a parte  $\tilde{\psi}$  do estado final é completamente independente dos vetores  $\Omega_j$  e  $\Lambda_j$ , já que estes últimos contribuem para o estado final apenas através dos escalares que já citamos, os quais foram todos passados para a parte  $\tilde{\lambda}_k$ . Isto prova a primeira parte do teorema de Coecke. A segunda parte (que diz respeito à descrição explícita do estado final) segue, assim como antes, pela propriedade da universalidade, o que garante que (6-15) realmente descreve a parte desemaranhada do estado resultante.

## 6.5

### Aplicação: Teleportação

No processo de teleportação descrito no capítulo 5, o sistema considerado era associado a um espaço de estados representado pelo produto tensorial de três espaços de Hilbert,  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ . Uma fonte produzia um par emaranhado pertencente a  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ , enquanto o estado do qubit que deve ser teleportado, por ser completamente independente dos demais, pertence a  $\mathcal{H}_1$ . Ou seja, as transformações que descrevem o processo são aplicadas a um estado que tem a parte correspondente a  $\mathcal{H}_1$ , digamos  $|\psi\rangle$ , desemaranhada do restante.

Como estado resultante obtemos um que tem como fator independente aquele correspondente a  $\mathcal{H}_3$ , que deve ser exatamente igual a  $|\psi\rangle$ . Isto nos sugere utilizar o teorema de Coecke para descrever tal processo, através de um diagrama e da composição de funções  $f_\Omega$  e  $g_\Omega$ , como definidas anteriormente.

O diagrama (6.15) ilustra bem o processo de teleportação. Vamos esclarecer a função de cada uma das caixas em seguida.

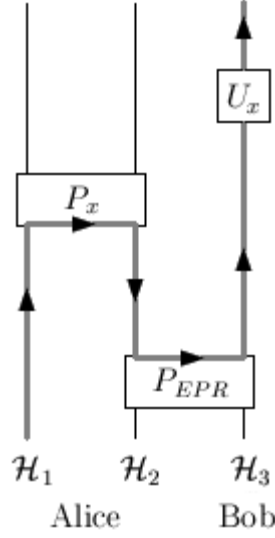


Figura 6.15

A caixa intitulada  $P_{EPR}$  é a primeira projeção a ser aplicada, na ordem temporal: consiste da preparação do par emaranhado da forma  $|00\rangle + |11\rangle$  (descartaremos nesta seção as constantes de normalização, mas isso não altera a descrição do processo de teleportação). Sabemos que o primeiro qubit é dado a Alice, e o segundo a Bob.

Como antes, o estado  $|\psi\rangle$  que desejamos teleportar será escrito como  $\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a$ . A única pequena mudança que faremos será com relação aos operadores que Alice aplica a seus qubits: no capítulo 5, afirmamos que ela deve aplicar as transformações  $U$  e  $H$  aos qubits que estão em seu poder para medir um observável do estado resultante na base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  e enviar a Bob a informação clássica que foi obtida. Entretanto, tais transformações não são de fato necessárias, e a teleportação ainda é realizada se Alice simplesmente utilizar como base para sua medição os estados  $\{|00\rangle + |11\rangle, |00\rangle - |11\rangle, |01\rangle + |10\rangle, |01\rangle - |10\rangle\}$ , e é exatamente esta operação que está representada pela caixa  $P_x$ . Já o operador unipartido  $U_x$  é o operador unitário que Bob escolhe para aplicar a seu qubit depois de ter recebido o resultado da medição realizada por Alice.

Assim, já que o estado inicial do sistema é

$$|\psi\rangle \otimes |\phi_{23}\rangle = (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes (|0\rangle_a|0\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b) \in \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3),$$

o teorema de Coecke afirma que o estado final pode ser escrito como:

$$|\phi_{12}\rangle \otimes |\varphi\rangle \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3,$$

onde  $|\varphi\rangle$  é dado por

$$|\varphi\rangle = U_x \circ f_{EPR} \circ g_x |\psi\rangle.$$

O que devemos verificar é que, de fato,  $|\varphi\rangle = |\psi\rangle$ . Ou seja, que  $U_x \circ f_{EPR} \circ g_x = I$ .

O vetor que define  $g_x$  é qualquer um dos quatro da nova base para medição que citamos. Assim, vamos tomá-lo de forma geral como

$$|\Omega\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_x |\psi\rangle = g_\Omega |\psi\rangle &= a\langle 0|\psi\rangle\langle 0| + b\langle 0|\psi\rangle\langle 1| + c\langle 1|\psi\rangle\langle 0| + d\langle 1|\psi\rangle\langle 1| \\ &= a(\alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle)\langle 0| + b(\alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle)\langle 1| \\ &\quad + c(\alpha\langle 1|0\rangle + \beta\langle 1|1\rangle)\langle 0| + d(\alpha\langle 1|0\rangle + \beta\langle 1|1\rangle)\langle 1| \\ &= a\alpha\langle 0| + b\alpha\langle 1| + c\beta\langle 0| + d\beta\langle 1| \\ &= (a\alpha + c\beta)\langle 0| + (b\alpha + d\beta)\langle 1|. \end{aligned}$$

Além disso, o vetor que define  $f_{EPR}$  é  $|\Lambda\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ . Então,

$$\begin{aligned} f_{EPR} \circ g_x |\psi\rangle &= f_\Lambda \circ g_\Omega |\psi\rangle \\ &= (a\alpha + c\beta)\langle 0|0\rangle|0\rangle + (b\alpha + d\beta)\langle 1|0\rangle|0\rangle \\ &\quad + (a\alpha + c\beta)\langle 0|1\rangle|1\rangle + (b\alpha + d\beta)\langle 1|1\rangle|1\rangle \\ &= (a\alpha + c\beta)|0\rangle + (b\alpha + d\beta)|1\rangle. \end{aligned}$$

Para definirmos o operador  $U_x$ , devemos antes analisar os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Sejam

$$\alpha' = a\alpha + c\beta \quad \text{e} \quad \beta' = b\alpha + d\beta.$$

A parte desemaranhada do estado final até este ponto (ou seja, após a aplicação de  $g_x$  e  $f_{EPR}$ ) é dada por  $\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ , de modo que:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Já que as entradas desta matriz (a qual chamaremos  $U_i$ ) são os coeficientes do vetor  $|\Omega\rangle$ , temos quatro possibilidades:

1. Se  $\Omega_1 = |00\rangle + |11\rangle$ , então  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
2. Se  $\Omega_2 = |00\rangle - |11\rangle$ , então  $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;
3. Se  $\Omega_3 = |01\rangle + |10\rangle$ , então  $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;
4. Se  $\Omega_4 = |01\rangle - |10\rangle$ , então  $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ou seja, se ao realizar a medição de um observável do sistema na base  $\{|\Omega_1\rangle, |\Omega_2\rangle, |\Omega_3\rangle, |\Omega_4\rangle\}$ , Alice obtiver um autovalor associado a  $|\Omega_1\rangle$ , então Bob, ao ser informado deste resultado, deve aplicar a operação  $U_1$  a seu qubit (já que  $U_1 U_1 = I$ ). O fator independente do estado final,  $\tilde{\alpha}|0\rangle + \tilde{\beta}|1\rangle$ , será então dado pelo seguinte:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U_1 U_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Logo, a parte desemaranhada do estado final de fato é igual à parte desemaranhada do estado inicial, como queríamos.

Entretanto, Alice pode ainda obter outros três autovalores: se for associado a  $|\Omega_2\rangle$ , então Bob deve aplicar  $U_2$  a seu qubit (pois  $U_2 U_2 = I$ ); se for relacionado a  $|\Omega_3\rangle$ , então a operação é  $U_3$  (pois  $U_3 U_3 = I$ ); e, finalmente, se o resultado for associado a  $|\Omega_4\rangle$ , então Bob deve considerar  $-U_4$  (pois  $U_4(-U_4) = I$ ). Em todos os três casos, assim como no primeiro, a teleportação será realizada, já que em qualquer um deles a composição  $U_x \circ f_{EPR} \circ g_x = I$ . Ou seja, o resultado desejado segue pelo teorema de composicionalidade.