3
Produto Tensorial

Sistemas quânticos individuais podem interagir para formarem sistemas quânticos compostos. Existe um postulado em Mecânica Quântica que descreve como o espaço de estados do sistema composto é construído a partir dos espaços de estados dos sistemas individuais. Entretanto, antes de apresentá-lo, vamos desenvolver a noção de produto tensorial de espaços vetoriais (7, 21).

3.1
Definição por Universalidade

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Diremos que um espaço vetorial denotado por $V \otimes W$, junto com uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} i \ &: \ V \times W \to V \otimes W \\ &(v, w) \mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

é o produto tensorial de V e W se, ao considerarmos um outro espaço vetorial U sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e B também uma aplicação bilinear:

$$\begin{aligned} B \ &: \ V \times W \to U \\ &(v, w) \mapsto B(v, w) \ , \end{aligned}$$

afirmarmos que existe uma, e somente uma, transformação *linear*

$$L : V \otimes W \to U$$

tal que

$$B(v, w) = L(v \otimes w) \ ,$$

isto é, $B = L \circ i$:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[dr, "L"] & \\
V \times W \arrow[u, "i"] \arrow[r, "B"'] & U
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1

Ou seja, dizemos que a aplicação i é uma aplicação bilinear universal, pois qualquer outra é uma composição de i seguida por uma linear. Esta é a propriedade universal do produto tensorial, também chamada *mapeamento universal* ou *universalidade*.

Mais geralmente, o produto tensorial de n espaços vetoriais $V_1, \ldots, V_n$ é dado por um espaço vetorial que denotaremos por $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, junto com uma aplicação n-linear universal:

$$i : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Precisamente, isto quer dizer que qualquer outra transformação n-linear $B : V_1 \times \ldots \times V_n \to U$ (onde U é outro espaço vetorial) pode ser escrita de forma única como:

$$B = L \circ i \ \ ,$$

onde $L : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to U$ é uma transformação linear.

É interessante notar que esta propriedade também vale para aplicações antilineares. Para mostrar isso, o principal é que se veja que uma aplicação $\varphi : V \to W$ é antilinear se e somente se $\varphi : V \to \overline{W}$ é linear, onde $\overline{W}$ é o espaço conjugado a W. Este novo espaço difere de W apenas pelo fato de que, se $w \in \overline{W}$ e $z \in \mathbb{C}$, então o produto escalar é definido por $z \cdot w = \overline{z}w$.

O que queremos de fato provar é que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[dr, "\hat{\alpha}"] & \\
V \times W \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\alpha"'] & W
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2

onde i é definida como antes, e α e $\hat{\alpha}$ são antilineares. Utilizando o fato citado anteriormente, podemos trocar W por $\overline{W}$ no diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[dr, "\hat{\alpha}"] & \\ V \times W \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\alpha"'] & \overline{W} \end{tikzcd}$$

Figura 3.3

onde α agora é linear. Assim, pela propriedade da universalidade para aplicações lineares, afirmamos que $\hat{\alpha} : V \otimes W \to \overline{W}$ (linear) existe e é única. Logo, garantimos o mesmo para a aplicação antilinear $\hat{\alpha} : V \otimes W \to W$.

Uma consequência importante da propriedade universal é que quaisquer dois produtos tensoriais são isomorfos. De fato, vamos supor que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & V \otimes W \arrow[d, "\phi"] \\ V \times W \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \\ & V \otimes W \end{tikzcd}$$

Figura 3.4

Observe que se $\phi = I$, então esta hipótese é satisfeita (já que $i = I \circ i$). Assim, pela universalidade (que afirma que ϕ é única), podemos dizer que $\phi \equiv I$.

Agora consideremos um outro produto tensorial de V e W, o qual será caracterizado por $V \hat{\otimes} W$ e $\hat{i} : V \times W \to V \hat{\otimes} W$. Pela propriedade fundamental, a transformação linear $\psi : V \otimes W \to V \hat{\otimes} W$ que faz o seguinte diagrama comutar é única:

$$\begin{tikzcd} & V \otimes W \arrow[d, "\psi"] \\ V \times W \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\hat{i}"'] & \\ & V \hat{\otimes} W \end{tikzcd}$$

Figura 3.5

Entretanto, $V \hat{\otimes} W$ também é um produto tensorial. Ou seja, é possível aplicar novamente o mapeamento universal e então garantir a existência e unicidade de uma transformação linear $\hat{\psi} : V\hat{\otimes}W \to V \otimes W$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} & V \otimes W \\ V \times W \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "\hat{i}"'] & \\ & V\hat{\otimes}W \arrow[uu, "\hat{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

Figura 3.6

Como $\hat{\psi} \circ \psi : V \otimes W \to V \otimes W$, esta composição agora faz o papel de ϕ no diagrama (1). Ou seja, como antes, $\hat{\psi} \circ \psi = I$. Podemos também considerar $\psi \circ \hat{\psi} : V\hat{\otimes}W \to V\hat{\otimes}W$ e então utilizarmos o mesmo argumento para afirmar que $\psi \circ \hat{\psi} = I$. Segue assim que dois produtos tensoriais quaisquer são sempre isomorfos.

3.2 Existência do Produto Tensorial de Espaços Lineares

Nosso objetivo nesta seção será apresentar uma demonstração da existência do produto tensorial. É suficiente trabalharmos com o produto de dois espaços vetoriais, pois o caso com um número arbitrário de espaços é completamente análogo a este.

Dados V, W e U espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e uma aplicação bilinear $B : V \times W \to U$, devemos então provar a existência de um espaço $V \otimes W$ e de uma aplicação $i : V \times W \to V \otimes W$, e depois a existência, unicidade e linearidade da transformação $L : V \otimes W \to U$, tal que $B(v, w) = L(v \otimes w)$. Ou seja, construiremos um produto tensorial e, a partir daí, mostraremos que a universalidade é válida. É exatamente por isso que afirmamos que esta propriedade é a que define o produto tensorial.

Sejam V^* e W^* os espaços duais de V e W, ou seja, os espaços dos funcionais lineares $V \to \mathbb{K}$ e $W \to \mathbb{K}$, respectivamente. Dados $v \in V$ e $w \in W$, definiremos um funcional bilinear $v \otimes w$ em $V^* \times W^*$ através do seguinte:

$$\begin{aligned} v \otimes w \ \ &: \ \ V^* \times W^* \to \mathbb{K} \\ &\quad\ (\phi, \psi) \mapsto \phi(v)\psi(w). \end{aligned} \tag{3-1}$$

Sendo $L(V^*, W^*; \mathbb{K})$ o espaço de todos os funcionais bilineares em $V^* \times W^*$, seja $V \otimes W$ o subespaço deste conjunto, gerado por todos os $v \otimes w$. Sabemos que seus elementos podem ser escritos como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \otimes w_i \,,$$

onde assumimos que $\alpha_i \neq 0$, $\forall i$.

Considerando uma aplicação $B : V \times W \to U$ bilinear, podemos afirmar que, se existe uma aplicação linear $L : V \otimes W \to U$ tal que $B(v, w) = L(v \otimes w)$, então, utilizando a linearidade de B, temos que L deve ser dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} L(\alpha_i v_i \otimes w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} B(\alpha_i v_i, w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(v_i, w_i) \ , \end{aligned}$$

e daí a unicidade de L segue de sua existência. Mas não basta apenas supor que L existe e mostrar que ela é única: também devemos provar que L é bem definida. Para isso, vamos tomar $\alpha = 0$ e verificar que isto implica em $L(\alpha) = 0$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(v_i, w_i) = 0 \,.$$

Uma simplificação conveniente surge quando observamos dois fatos óbvios, meras consequências da linearidade das aplicações:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i v_i) \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (\alpha_i w_i) \ ,$$

$$\sum_{i-1}^{n} \alpha_i B(v_i, w_i) = \sum_{i=1}^{n} B(\alpha_i v_i, w_i) = \sum_{i=1}^{n} B(v_i, \alpha_i w_i) \ .$$

Assim, já que os coeficientes α_i podem ser movidos livremente, vamos considerar que $\alpha_i = 1$, $\forall i$.

A demonstração de que L é bem definida vai ser dada por indução em n. Ao tomarmos $n = 1$, teremos $\alpha = v \otimes w$. Nossa hipótese é que $\alpha = 0$, ou seja, que $v \otimes w = 0$. A partir disto, temos que estudar dois casos:

- Se $v = 0$ ou $w = 0$, então $L(\alpha) = B(v, w) = 0$, como queríamos;
- Se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, então existem elementos $\phi \in V^*$ e $\psi \in W^*$ tais que $\phi(v) \neq 0$ e $\psi(w) \neq 0$. Entretanto, $0 = (v \otimes w)(\phi, \psi) = \phi(v)\psi(w) \neq 0$, absurdo!

Logo, este segundo caso deve ser descartado, e a prova para $n = 1$ está completa.

A hipótese de indução a ser considerada é a seguinte:

Se

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i = 0 \ ,$$

então

$$\sum_{i=1}^{n-1} B(v_i, w_i) = 0 \ .$$

Vamos então à demonstração para o caso geral. Ao considerarmos

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0 \ ,$$

queremos mostrar que

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} B(v_i, w_i) = 0 \ .$$

Entretanto, se algum v_i ou algum w_i forem iguais a zero, podemos eliminar os termos correspondentes das duas equações e assim supor que $v_i \neq 0$ e $w_i \neq 0$, $\forall i$. Em particular, podemos afirmar que existe um funcional $\psi_0 \in W^*$ tal que $\psi_0(w_n) \neq 0$.

Agora, utilizando a definição (3-1), temos:

$$0 = \alpha(\phi, \psi_0) = \sum_{i=1}^{n} \phi(v_i)\psi_0(w_i) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_0(w_i) v_i\right) \ .$$

Como esta expressão vale para todo $\phi \in V^*$, necessariamente teremos

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_0(w_i) v_i = 0 \ .$$

Além disso, como $\psi_0(w_n) \neq 0$, podemos tomar

$$\gamma_i = \frac{\psi_0(w_i)}{\psi_0(w_n)}$$

e obtermos

$$\begin{aligned} & \psi_0(w_n)v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_0(w_i)v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v_n + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i v_i \end{aligned} \tag{3-2}$$

Logo, utilizando esta última igualdade,

$$\begin{aligned} 0 = \alpha = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i + v_n \otimes w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i v_i \right) \otimes w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes (w_i - \gamma_i w_n) \ . \end{aligned}$$

Novamente utilizando (3-2), podemos também escrever o seguinte:

$$\begin{aligned} L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} B(v_i, w_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} B(v_i, w_i) + B(v_n, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} B(v_i, w_i) + B\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i v_i \, , \, w_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} B(v_i \, , \, w_i - \gamma_i w_n) \ , \end{aligned}$$

já que, assim como a aplicação $\cdot \otimes \cdot$, B também é bilinear.

Agora, pela hipótese de indução,

$$\sum_{i=1}^{n-1} B(v_i \, , \, w_i - \gamma_i w_n) = 0 \ .$$

Logo, $L(\alpha) = 0$, como queríamos demonstrar.

A última propriedade a ser demonstrada, a linearidade de L, segue claramente da construção.

3.3 Aplicações da Universalidade

Consideremos os operadores lineares

$$\begin{aligned} & A : V_1 \to V_2 \\ \text{e} \quad & B : W_1 \to W_2 \ . \end{aligned}$$

Como a aplicação $(v, w) \mapsto Av \otimes Bw$ é bilinear, utilizamos a universalidade para definir a seguinte transformação linear:

$$\begin{aligned} A \otimes B \ : \ & V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2 \\ & v \otimes w \mapsto Av \otimes Bw \ . \end{aligned}$$

Um caso particular desta construção que será importante no capítulo 6 é o seguinte: seja $V_2 = \mathbb{K}$ (vale lembrar que $\mathbb{K}$ é o corpo onde todos os espaços vetoriais em questão são definidos). Assim,

$$A : V_1 \to \mathbb{K} \ ,$$

ou seja, A é um funcional linear pertencente a V_1^*. A partir de agora, vamos denotá-lo por ϕ.

É fácil mostrar que $\mathbb{K} \otimes W_2$ é isomorfo a W_2. Explicitamente, o isomorfismo pode ser dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \otimes W_2 \ &\to \ W_2 \\ \beta \otimes w \ &\mapsto \ \beta w \, , \end{aligned}$$

a qual é bem definida por universalidade e obviamente sobrejetora. Já a injetividade segue pelo fato de que se $\xi \in \mathbb{K} \otimes W_2$, então:

$$\begin{aligned} \xi &= \beta_1 \otimes w_1 + \beta_2 \otimes w_2 + \ldots + \beta_n \otimes w_n \\ &= \beta_1 (1 \otimes w_1) + \ldots + \beta_n (1 \otimes w_n) \\ &= 1 \otimes \beta_1 w_1 + \ldots + 1 \otimes \beta_n w_n \\ &= 1 \otimes (\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n) \\ &= 1 \otimes w'. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o resultado $\mathbb{K} \otimes W_2 \cong W_2$, podemos definir por universalidade (assim como no caso geral) a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi \otimes B \quad : \quad & V_1 \otimes W_1 \to W_2 \\ & v \otimes w \mapsto \phi(v) B w. \end{aligned}$$

Se tomarmos ainda $W_2 = W_1$ e $B = I$, teremos definido o *produto interno parcial* (ou *contração*):

$$\begin{aligned} \phi \rfloor \cdot \quad : \quad & V_1 \otimes W_1 \to W_1 \\ & v \otimes w \mapsto \phi(v) w. \end{aligned}$$

3.4 Produto Tensorial de Espaços de Hilbert

Os espaços vetoriais mais importantes nesta dissertação possuem algumas propriedades adicionais: são espaços de Hilbert finito-dimensionais, os quais, como já vimos, são espaços de estados associados a sistemas quânticos.

Apresentaremos agora mais um ponto relevante para nossos desenvolvimentos posteriores: a definição do produto interno em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, onde $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são dois espaços deste tipo. A seguinte condição define de forma única, também por universalidade, esta operação:

$$(h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2) = (h_1, h_2)(k_1, k_2).$$

Neste ponto vale ainda a pena adicionar alguns novos termos ao dicionário que iniciamos na subseção 2.3.2:

Matemático	Físico
$v \otimes w$	$\vert v\rangle \vert w\rangle$
$(\Omega, \cdot)\rfloor(v \otimes w)$	$\langle \Omega \vert v\rangle \vert w\rangle$

Com a noção de produto tensorial bem construída, estamos agora aptos a avançar no estudo dos fundamentos da Mecânica Quântica. No próximo capítulo serão apresentados os conceitos de estados produto e emaranhado, e poderemos então explicar como a universalidade simplifica a demonstração do teorema de composicionalidade de Coecke.