



**Débora Freire Mondaini**

**A Universalidade do Produto Tensorial e o  
Teorema de Composicionalidade de Coecke**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. George Svetlichny

Rio de Janeiro  
Março de 2006



**Débora Freire Mondaini**

## **A Universalidade do Produto Tensorial e o Teorema de Composicionalidade de Coecke**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. George Svetlichny**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Tomei**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Derek Douglas Jack Hacon**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Luiz Davidovich**

Instituto de Física

Departamento de Física Matemática — UFRJ

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de Março de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Débora Freire Mondaini**

Graduação em Matemática Pura, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (março/2001 – julho/2004).

Mestrado em Matemática Aplicada, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (agosto/2004 – fevereiro/2006).

#### Ficha Catalográfica

Mondaini, Débora

A Universalidade do Produto Tensorial e o Teorema de Composicionalidade de Coecke / Débora Freire Mondaini; orientador: George Svetlichny. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 64 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Mecânica Quântica. 3. Informação Quântica. 4. Universalidade. 5. Emaranhamento. 6. Teleportação. I. Svetlichny, George. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Agradeço especialmente a meus pais, por todo o amor e incentivo à pesquisa científica.

Aos meus irmãos, por toda a paciência demonstrada nos últimos meses e toda a ajuda para que esta dissertação fosse escrita.

À Carmem, por todo seu carinho e dedicação.

À Perpétua, pela amizade e palavras de incentivo.

Ao meu orientador George Svetlichny, pela paciência e empenho na elaboração deste trabalho.

Aos meus bons e verdadeiros amigos, pelo apoio que me é dado há vários anos.

Aos professores do Departamento de Matemática, por todos os ensinamentos.

Aos funcionários deste mesmo departamento, por toda a ajuda, principalmente Creuza e Orlando.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Mondaini, Débora; Svetlichny, George. **A Universalidade do Produto Tensorial e o Teorema de Composicionalidade de Coecke**. Rio de Janeiro, 2006. 64p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O propósito deste trabalho é apresentar uma demonstração simplificada do Teorema da Composicionalidade de Coecke, o qual diz respeito ao processamento de informação quântica agregada a estados emaranhados  $n$ -partidos. Utilizando a propriedade da universalidade do produto tensorial em nossa prova, veremos que é possível considerar todos os estados relevantes como sendo estados-produto, o que torna a demonstração bem mais fácil. Apresentaremos ainda o processo de teleportação de estados quânticos, tão comentado nos dias de hoje, e verificaremos finalmente que tal processo é uma aplicação trivial do teorema de Coecke.

## Palavras-chave

Mecânica Quântica. Informação Quântica. Universalidade. Emaranhamento. Teleportação.

## Abstract

Mondaini, Débora; Svetlichny, George. **Tensor Product Universality and Coecke's Compositionality Theorem**. Rio de Janeiro, 2006. 64p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The purpose of this work is to present a simplified demonstration of Coecke's Compositionality Theorem, which refers to the quantum information processing associated to  $n$ -partite entangled states. By using the universal property of the tensor product in our proof, we will see that is possible to consider all the relevant states as being product states, which turns the demonstration much easier. We will present also the teleportation process of quantum states, so called nowadays, and verify finally that such a process is a trivial application of Coecke's theorem.

## Keywords

Quantum Mechanics. Quantum Information. Universality. Entanglement. Teleportation.

# Sumário

1	Introdução	8
2	Fundamentos de Mecânica Quântica	10
2.1	A Necessidade de uma Nova Teoria	10
2.2	Polarização da Luz e Superposição de Estados	11
2.3	Postulados de Mecânica Quântica e Notação de Dirac	13
3	Produto Tensorial	19
3.1	Definição por Universalidade	19
3.2	Existência do Produto Tensorial de Espaços Lineares	22
3.3	Aplicações da Universalidade	26
3.4	Produto Tensorial de Espaços de Hilbert	27
4	Informação Quântica	28
4.1	O Qubit	28
4.2	Coexistência de Sistemas Quânticos	30
4.3	Estados Produto e Emaranhado e Universalidade	31
4.4	Múltiplos Qubits	31
4.5	Medições de Sistemas Compostos	32
5	Criptografia e Teleportação	35
5.1	Criptografia Quântica	35
5.2	Teleportação	36
6	O Teorema de Composicionalidade de Coecke	41
6.1	Introdução ao Teorema	41
6.2	Enunciando o Teorema em Qualquer Arranjo de Projeções	45
6.3	A Demonstração para um Caso Simples	48
6.4	Demonstração para o Caso Geral	54
6.5	Aplicação: Teleportação	58
7	Conclusão	62